

## CFD Prediction of the Most Appropriate Values of Prandtl Kolmogorov Constant in the Turbulent Boundary Layer

Dr. Nawar Abbas\*

(Received 5 / 9 / 2019. Accepted 11 / 12 / 2019)

### □ ABSTRACT □

This study aims to determine the scope of application and accuracy of the Prandtl Kolmogorov formula, through which the turbulence length scale  $L$  can be calculated, by selecting the most appropriate value of the experimental constant  $C$  used in this formula using CFD (Computational Fluid Dynamic) technique and comparing the results with the experimental data. One of the most important applications of this formula is in hybrid turbulence models in CFD in which the computational domain must be divided into two regions. In the first region near to the wall, the URANS method (Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes Equations) is applied and in the second region far from the wall, the LES method (Large Eddy Simulation) is applied. The open-source program (OpenFOAM), URANS method and  $k-\omega$  SST turbulence model have been used to perform the numerical calculations. The numerical results show a good agreement with the experimental data, which confirms the accuracy of the CFD solution in fluid dynamic applications and the accuracy of the Prandtl Kolmogorov Formula in the calculation of turbulent length scale.

**Keywords:** Prandtl Kolmogorov formula, turbulent boundary layer, turbulence length scale, CFD,  $k-\omega$  SST.

---

\* Assistant Professor, Marine Engineering Department, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Latakia, Syria. Email: dr.nawarnabilabbas@tishreen.edu.sy

## تحديد القيم الأنسب لثابت براندتل كولموغوروف ضمن الطبقة الحدية المضطربة باستخدام تقنية الـ CFD (ديناميك الموائع الحسابية)

د. نوار عباس\*

(تاريخ الإيداع 5 / 9 / 2019. قُبِلَ للنشر في 11 / 12 / 2019)

### □ ملخص □

يهدف هذا البحث إلى اختبار دقة ومجال تطبيق علاقة براندتل كولموغوروف والتي من خلالها يتم حساب الطول المميز للاضطراب (الدوامة)  $L$ ، وذلك من خلال اختيار القيمة الأنسب للثابت التجريبي المستخدم في هذه العلاقة باستخدام تقنية الـ CFD ومقارنة النتيجة مع النتائج التجريبية. من أهم تطبيقات هذه العلاقة هي استخدامها لتقسيم المجال الحسابي في نماذج الاضطراب الهجينة (Hybrid turbulence models) في تقنية الـ CFD حيث يتم أثناء استخدام هذه النماذج تقسيم المجال الحسابي إلى قسمين، القسم الأول وهو بالقرب من الجدار، حيث تتشكل وتتطور الطبقة الحدية، يتم فيه استخدام طريقة الـ URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes Equations)، وفي القسم الثاني، بعيدا عن الجدار، يتم استخدام طريقة الـ LES (Large Eddy Simulation). تم استخدام برنامج الـ OpenFOAM لإجراء حسابات الـ CFD، وتم استخدام طريقة الـ URANS ونموذج الاضطراب  $k - \omega$  SST من أجل حساب الجريان ومن ثم حساب قيمة  $L$ . النتائج التي تم الحصول عليها من الـ CFD تمت مقارنتها مع النتائج التجريبية. المقارنة تبين بأن هناك تطابق كبير بين الحسابات الرقمية والنتائج التجريبية، وهذا يؤكد لنا مدى دقة وجودة تقنية الـ CFD في حساب الجريانات، كما ويؤكد في نفس الوقت قدرة علاقة براندتل كولموغوروف على حساب الطول المميز للاضطراب.

**الكلمات المفتاحية:** علاقة براندتل كولموغوروف، الطبقة الحدية المضطربة، الطول المميز للاضطراب، CFD،  $k - \omega$  SST.

\* مدرس - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - قسم الهندسة البحرية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

**مقدمة:**

في الواقع هناك طريقتان من أجل دراسة وتحليل الجريانات بأنواعها المختلفة وهما: الطرق التجريبية وفيها يتم قياس التدفق و القوى من خلال أجهزة قياس محددة، والطرق الرقمية وفيها يتم حل ودراسة هذه المشاكل رقمياً باستخدام ما يسمى ديناميك الموائع الحسابية (CFD, Computational Fluids Dynamics). استخدام الطرق التجريبية يواجه حتى يومنا هذا العديد من المصاعب، ونذكر منها بشكل أساسي:

- الصعوبة الكبيرة في تأمين شروط الجريان المناسبة للتجربة (والمطابقة مع الواقع).
  - زيادة صعوبة إجراء التجربة عندما يكون الجسم المدروس كبير ويحوي ملحقات صغيرة جداً بالنسبة لحجمه و يجب أخذها بعين الاعتبار عند إجراء التجربة مثل السفينة و ملحقاتها (الرفاص، الدفة،... إلخ)، مما يزيد وبشكل كبير من صعوبة القياسات، وذلك بسبب الأبعاد الهندسية المعقدة والصغيرة للملحقات بالمقارنة مع السفينة.
  - الطول المحدود لقنوات الاختبار مثل قنوات جر السفن، مما يحد من عملية القياس.
  - التكاليف المادية الكبيرة، و الحاجة الزمنية الكبيرة للقياس.
- كل المشاكل المذكورة في الأعلى يمكن حلها باستخدام الطرق الرقمية (CFD)، والتي من خلالها يمكن حساب الجريان تحت أية شروط للإبحار. و يوجد العديد من هذه الطرق، ونذكر منها:
- طريقة الحل المباشر (DNS=Direct Numerical Simulation Method) والتي لا يمكن استخدامها في حالة الجريانات المعقدة ذات القيمة الكبيرة لأرقام رينولدز.

- طرق الـ URANS والـ LES وتعتبر من أكثر الطرق استخداماً في مجال الجريانات.
  - الطرق الهجينة (Hybrid Method) وهي طرق تدمج بين الـ URANS والـ LES.
- يتم استخدام تقنية الـ CFD حالياً في الكثير من التطبيقات الهندسية، سواء في المجال البحري، الطبي، الفضاء، وغيرها من المجالات الأخرى. في هذه الدراسة سيتم استخدام هذه التقنية من أجل حساب القيم الأنسب للثابت التجريبي في علاقة براندتل كولموغوروف ضمن الطبقة الحدية المضطربة، ومن ثم مقارنتها مع القيم التي تنتج من العلاقة التجريبية المعممة في الدراسة [1].

وفقاً لبراندتل كولموغوروف تعطى علاقة الطول المميز للاضطراب بالشكل التالي:

$$L = C \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (1)$$

حيث أن  $L$  [m] هي الطول المميز للاضطراب،  $C$  هو الثابت التجريبي الذي ستم دراسته،  $k$  الطاقة الحركية للاضطراب و  $\left[ \frac{J}{kg \cdot s} = \frac{m^2}{s^3} \right]$  معدل تبدد الاضطراب.

وفقاً للكثير من المراجع النظرية يتم اعتماد القيمة 0.168 للثابت في الطبقة الحدية، انظر [2, 3]، إلا أن هذه الفرضية لا تصلح على كامل مجال الطبقة الحدية وهذا ما سيتم إثباته. هذا الثابت هو قيد الدراسة منذ وقت طويل ففي عام 1975 قام الباحث Rodi بتقديم بعض الملاحظات حول قيمة هذا الثابت التجريبي وأكد بأنه لا يمكن اعتماد قيمة ثابتة له في كامل منطقة الجريان. بالرغم من ذلك لازال الكثير من الباحثين يعتمدون القيمة الثابتة لهذا الثابت التجريبي، فمثلاً قام الباحث كورنيف وزملائه في عام 2011 [10] باعتماد القيمة 0.168 لهذا الثابت في دراستهم، حيث قاموا بتطوير موديل رياضي هجين للمساعدة في حل الجريان بشكل جيد في منطقة مؤخرة السفينة. أثناء استخدام هذا الموديل يتم تقسيم المجال الحسابي إلى قسمين، الأول قريب من الجدار و يطبق فيه طريقة الـ URANS والثاني

بعيد عن الجدار ويطبق فيه طريقة الـ LES. يقوم مبدأ التقسيم على حساب قيمة  $L$  في كل خطوة زمنية، ومن ثم تتم مقارنة قيمته مع البارامتر  $\Delta$  في كل خلية ضمن المجال الحسابي بناء على المبدأ التالي:

$L > \Delta$  وبالتالي فإن الخلية تنتمي إلى المنطقة التي يطبق بها الـ LES، وفي الحالة المعاكسة فإن الخلية تنتمي إلى المنطقة التي يطبق بها الـ URANS. البارامتر  $\Delta$  يتم حسابه وفقاً للعلاقة التالية:

$$\Delta = \sqrt{d_{\max}^2 + \delta^2} \quad (2)$$

حيث أن  $d_{\max}$  هو طول أكبر ضلع في كل خلية ضمن المجال الحسابي و  $\delta$  هي الجذر التكعيبي لحجم كل خلية. مما سبق يتضح لنا بأن أغلب الباحثين يعتمدون حتى الآن القيمة الثابتة لهذا الثابت التجريبي على كامل منطقة الجريان، وعليه سيتم في هذا البحث إثبات عدم صحة هذه الفرضية.

### أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث في أمرين أساسيين، الأول: إظهار مدى دقة تقنية الـ CFD في حساب البارامترات المختلفة للجريان على اختلاف أنواعه، وحساب الطبقة الحدية. الثاني: هو اختبار دقة علاقة براندتل كولموغوروف وتحديد القيمة المناسبة لثابت هذه العلاقة ضمن الطبقة الحدية. ومن خلال هذه الدراسة يمكننا الاطلاع على الخطوات الواجب اتباعها من أجل إجراء عملية الـ CFD على المائع، والتي سيتم مناقشتها بشكل مفصل في دراسة لاحقة.

### طرق البحث ومواده:

البرنامج الذي تم استخدامه في هذه الدراسة هو برنامج الـ OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) وهو مكتوب بلغة الـ C++ object oriented. إن هذا البرنامج يملك الكثير من الميزات التي تمكننا من حل أي مشكلة في ميكانيك الأوساط المستمرة، بالإضافة إلى ميكانيك الموائع بأنواعها المختلفة (النيوتونية، غير النيوتونية، القابلة للانضغاط وغير القابلة للانضغاط).

الجريانات النيوتونية غير القابلة للانضغاط يمكن تمثيلها من خلال معادلات نافيه ستوكس بالإضافة إلى معادلة الاستمرار، وهذه المعادلات يمكن تقسيمها إلى أربع معادلات متمثلة في معادلة مصونية الكتلة ومعادلة مصونية كمية الحركة في الاتجاهات  $(x, y, z)$ . هذه المعادلات تم استخدامها من أجل توصف الجريان في هذه الدراسة. تعتمد تقنية الـ CFD الحديثة بشكل أساسي على هذه المعادلات والتي يمكن حلها إما بالشكل التفاضلي أو بالشكل التكاملية وهذا يعتمد على الطريقة التي يتبعها البرنامج المستخدم. فمثلاً في طريقة الفروق المنتهية (Finite-Difference-Method, FDM) يتم اعتماد الشكل التفاضلي لحل المعادلات الأساسية، وأما في طريقة الحجوم المنتهية (Finite-Volume-Method, FVM) يتم اعتماد الشكل التكاملية. برنامج الـ OpenFOAM يعتمد طريقة الحجوم المنتهية FVM في حل معادلات الجريان.

الشكل التفاضلي للمعادلات الناظمة للجريان

الشكل التفاضلي لمعادلة مصونية الكتلة في الإحداثيات الديكارتية:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (3)$$

الشكل التفاضلي لمعادلة مصونية كمية الحركة على المحور X:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w - \tau_{zx}) - \rho \cdot g_x = 0 \quad (4)$$

الشكل التفاضلي لمعادلة مصونية كمية الحركة على المحور Y:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v \cdot u - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v \cdot w - \tau_{zy}) - \rho \cdot g_y = 0 \quad (5)$$

الشكل التفاضلي لمعادلة مصونية كمية الحركة على المحور Z:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot u - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot w \cdot v - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w^2 + p - \tau_{zz}) - \rho \cdot g_z = 0 \quad (6)$$

حيث أن  $p$  هو الضغط،  $u, v, w$  هي مركبات السرعة على المحاور الإحداثية الديكارتية  $x, y, z$ ،  $\rho$  كثافة المائع،  $g_i$  مركبات تسارع الجاذبية الأرضية على المحاور الإحداثية الديكارتية،  $\tau_{ij}$  هو مصفوفة إجهادات رينولدز المضطربة (وهو عبارة عن مصفوفة ثلاثية الأبعاد  $3 \times 3$  ومتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي) ويمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} -\rho \cdot u'_x u'_x & -\rho \cdot u'_x u'_y & -\rho \cdot u'_x u'_z \\ -\rho \cdot u'_x u'_y & -\rho \cdot u'_y u'_y & -\rho \cdot u'_y u'_z \\ -\rho \cdot u'_x u'_z & -\rho \cdot u'_y u'_z & -\rho \cdot u'_z u'_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

حيث أن  $u'_i$  هي قيمة تأرجحات السرعة على المحاور الإحداثية الديكارتية. مصفوفة إجهادات رينولدز المضطربة غير معروفة القيمة وتجعل من نظام المعادلات غير مغلق لذلك يجب حسابها، ولهذا الغرض يتم استخدام الموديلات الرياضية لحساب قيمة هذه الإجهادات.

الشكل التكاملي للمعادلات النازمة للجريان

الشكل التكاملي لمعادلة مصونية الكتلة:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_A \rho \vec{u} dA = 0 \quad (8)$$

إن مجموع القوى المؤثرة على حجم المراقبة  $dV$  تساوي إلى معدل تغير كمية الحركة خلال الزمن، ولهذا يمكن كتابة معادلة كمية الحركة بالشكل التكاملي كمايلي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV + \int_A \rho u_i u_j dA = - \int_A T_{ij} dA + \int_V \rho f_i dV \quad (9)$$

حيث أن  $T_{ij}$  يمثل مصفوفة الإجهادات العامة والتي تعرف طبقاً لفرضية نيوتن كالتالي:

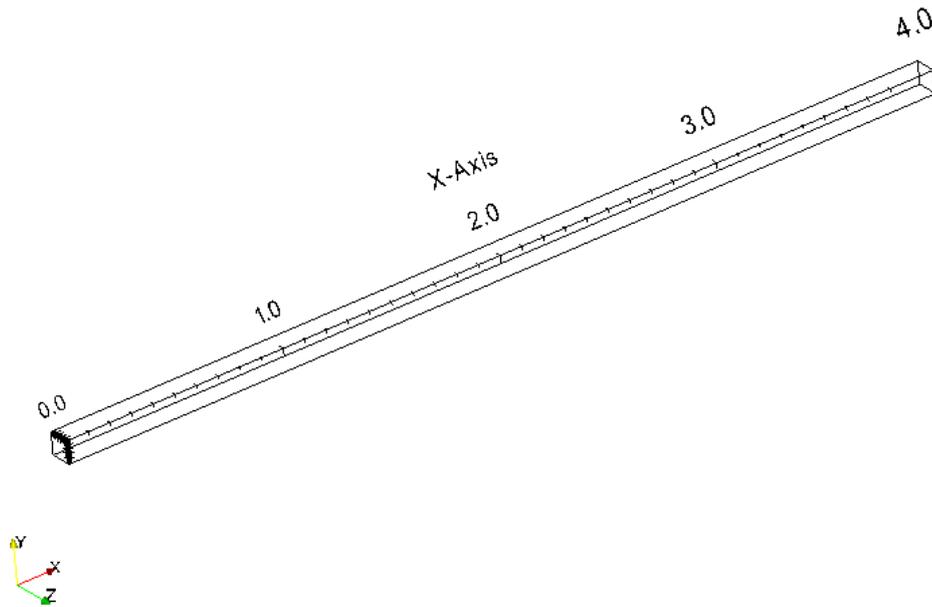
$$T_{ij} = - \left( p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (10)$$

$\delta_{ij}$  هو ثابت كرونكر،  $S_{ij}$  مصفوفة الانفعالات وتعطى بالشكل التالي:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

الأبعاد الهندسية

إن المجال الحسابي الذي تم استخدامه في هذه الدراسة هو متوازي مستطيلات وله الأبعاد الهندسية التالية:  $4 \times 0.1 \times 0.1$  m، انظر الشكل (1).

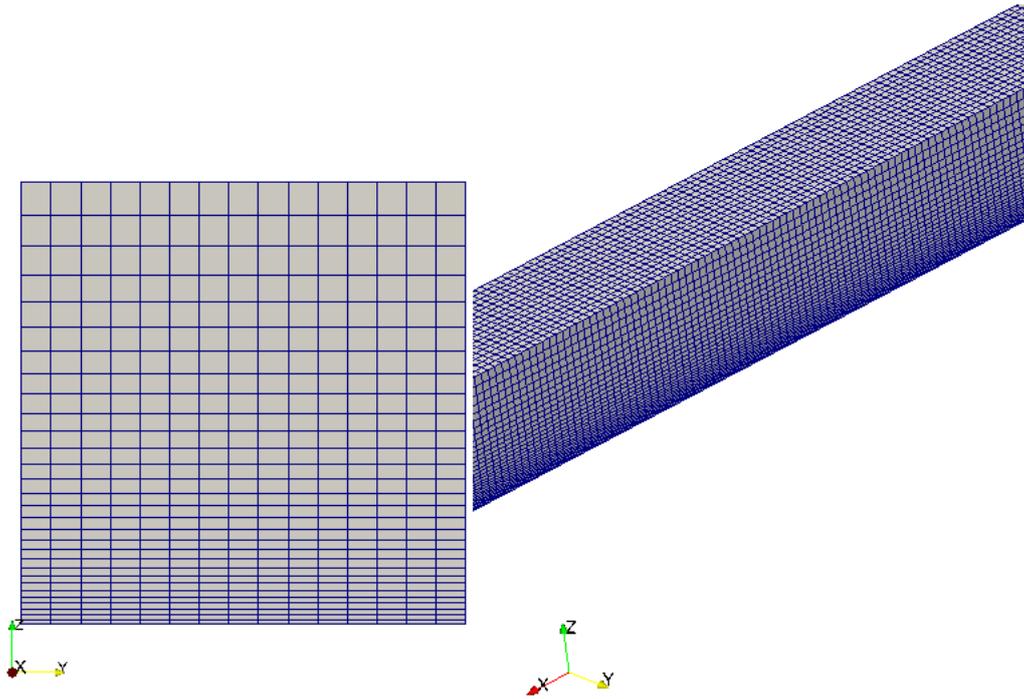


الشكل (1): المجال الحسابي المدروس.

السطح السفلي لمتوازي المستطيلات المستخدم يمثل الصفيحة المدروسة والتي ستتشكل عليها الطبقة الحدية، وطول هذا السطح (4 m) يعتبر كافياً لتشكيل الطبقة الحدية وتطورها بشكل كامل.

#### الشروط الحدية والبيئة الرقمية واعتباراتها

من أجل تغطية المجال الحسابي المدروس بشكل كامل لابد من تقسيمه الى خلايا صغيرة، ولهذا السبب نقوم بتقسيمه إلى مجموعة من الخلايا متوازية المستطيلات و المتشابهة، انظر الشكل (2). عدد التقسيمات التي تم اعتمادها في هذه الدراسة على المحاور  $x, y, z$  هو  $1420 \times 40 \times 40$ . في منطقة الطبقة الحدية (المتاخمة للجدار) لابد من تعميم الشبكة بشكل متدرج بسبب تركيز إجهادات القص بالقرب من الجدار، وهذا ما نلاحظه في بناء الشبكة (انظر الشكل (2) على اليسار)، حيث أنه وكما هو موضح في هذا الشكل فإن أول خلية ملتصقة بالجدار تملك أقل ارتفاع، بينما يزداد ارتفاع الخلية كلما ابتعدنا عن الجدار. إن القيمة الوسطية للمعامل اللابيدي  $y^+$  في مركز أول خلية متاخمة للجدار هي 3.18، و لأن هذه القيمة أكبر من الواحد فلقد تم استخدام توابع الجدار من أجل إعطاء أفضل حل لبروفایل السرعة في منطقة الطبقة الحدية. الحسابات تم إجراؤها باستخدام simpleFoam solver والذي يقدم الحل المستقر للجريانات غير القابلة للانضغاط، ويعتمد في خوارزمية حله على نظام الـ SIMPLE-Algorithm، انظر [6,5]. والموديل الرياضي الذي تم استخدامه هو الـ  $k - \omega$  SST.



الشكل (2): تقسيم المجال الحسابي المدرس إلى خلايا على شكل متوازي مستطيلات.

القيمة العظمى لرقم رينولدز في نهاية الصفيحة المدروسة هي  $R_x = 15 \times 10^5$  وهذا يتوافق مع سرعة على مدخل الصفيحة مساوية لـ  $3.75 \text{ m/s}$ ، وعلى اعتبار الدراسة تمت باستخدام مائع حقيقي وبالتالي فإن سرعة المائع على الجدار تساوي سرعة الجدار نفسه وتساوي الصفر (شرط الالتصاق).

#### الموديل الرياضي SST $k - \omega$

تم اقتراح هذا الموديل الرياضي من قبل الباحث Menter [7] وهو عبارة عن دمج الموديلين الرياضيين  $k - \omega$  و  $k - \epsilon$ . تم دمج ميزات الموديلين الرياضيين المذكورين في هذا الموديل، حيث أنه ومن خلال استخدام تابع دمج خاص يتم تطبيق الموديل  $k - \omega$  في منطقة الطبقة الحدية القريبة من الجدار، ويتم تطبيق الموديل  $k - \epsilon$  خارج الطبقة الحدية (في منطقة التدفق الحر)، والسبب في هذا أن الموديل الرياضي  $k - \omega$  يعطي نتائج ممتازة (داخل الطبقة الحدية) في المنطقة القريبة من الجدار، وعلى العكس من هذا فإن الموديل الرياضي  $k - \epsilon$  يعطي نتائج ممتازة خارج الطبقة الحدية. المعادلات الأساسية في هذا الموديل يمكن كتابتها بالشكل التالي، انظر [7, 8]:

معادلة الـ  $k$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_k v_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

معادلة نسبة تبدد الاضطراب النوعية (وتسمى أيضا بتردد الاضطراب  $\left[\frac{1}{S}\right]$ ):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_\omega v_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (13)$$

معادلة لزوجة الدوامة  $\mu_t$ :

$$\mu_t = \frac{\rho \alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, SF_2)}, \quad S = \partial u / \partial y \quad (14)$$

حيث أن:

$$F_1 = \tanh \left\{ \left[ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^4 \right\}$$

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right]$$

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 10\beta^* k \omega \right)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right)$$

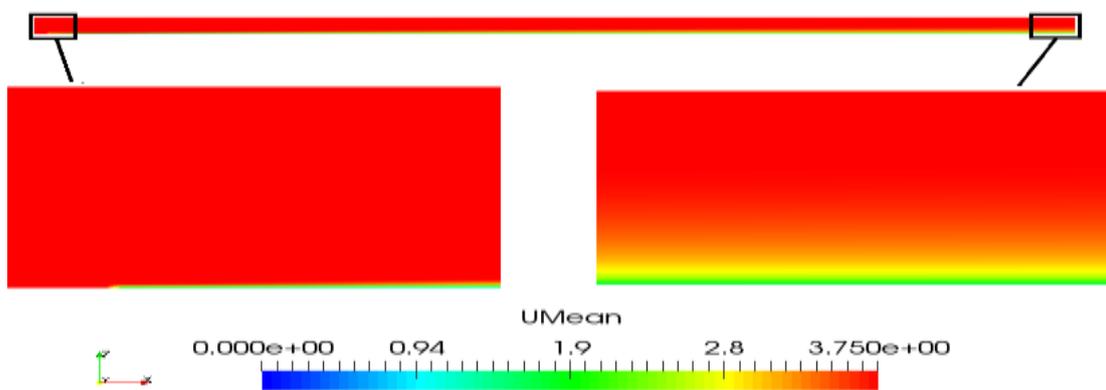
الثوابت الخاصة بهذا الموديل موضحة في الجدول (2).

الجدول(2): قيمة الثوابت المستخدمة في الموديل الرياضي SST k - ω

$\beta^*$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\sigma_{k1}$	$\sigma_{k2}$	$\sigma_{\omega 1}$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\sigma_{\omega 2}$
$\frac{9}{100}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{40}$	0.85	1	0.5	0.44	0.0828	0.856

### النتائج والمناقشة:

يبين الشكل (3) مقطع طولي في منتصف الصفيحة والذي يظهر عليه تطور الطبقة الحدية على كامل طول الصفيحة، بينما يبين الشكل (4) الطبقة الحدية في مقاطع مختلفة على طول المحور X (X = 0, 1, 2, 3, 4m). نلاحظ من هذين الشكلين كيفية تطور الطبقة الحدية على كامل طول الصفيحة.

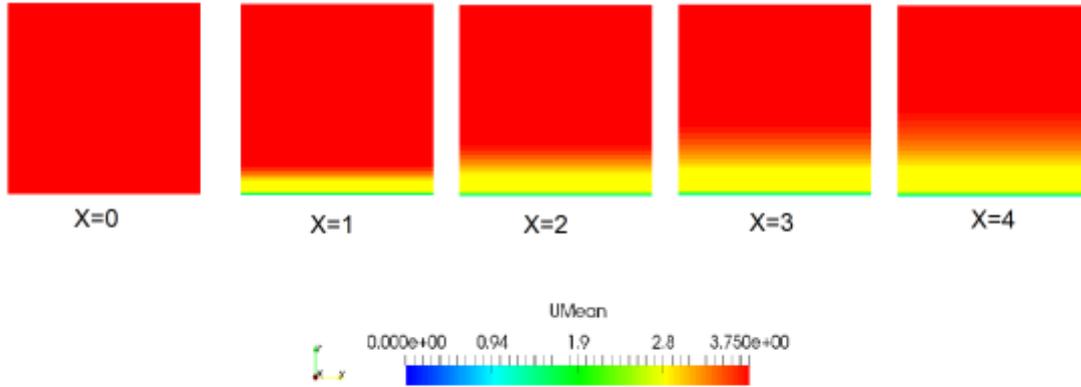


الشكل (3): تطور الطبقة الحدية على كامل طول الصفيحة باستخدام الـ CFD.

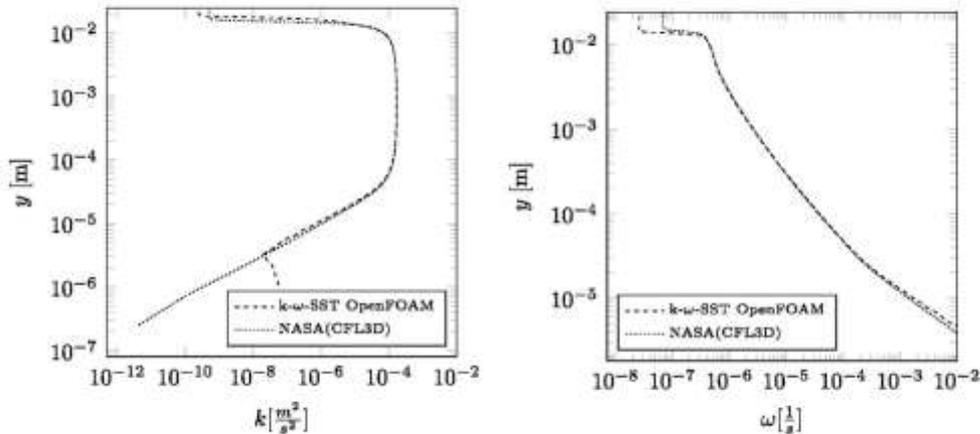
إن علاقة براندتل كولموغوروف لحساب الطول المميز للاضطراب (1) يمكن إعادة كتابتها بالاعتماد على الموديل الرياضي SST k - ω بالشكل التالي:

$$L = C \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \beta^* \omega k \Rightarrow L = C \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\beta^* \omega} \quad (15)$$

ومن أجل التأكد من دقة حساب كل من البارامترين  $(k, \omega)$  باستخدام برنامج الـ OpenFOAM والموديل الرياضي المذكور سابقاً، تم في البداية إجراء الحسابات على بروافيل NASA الذي يستخدم كحالة مرجعية في كثير من الدراسات [9]. النتائج التي تم الحصول عليها موضحة في الشكل (5).



الشكل (4): الطبقة الحدية في مقاطع مختلفة على طول المحور X باستخدام الـ CFD.

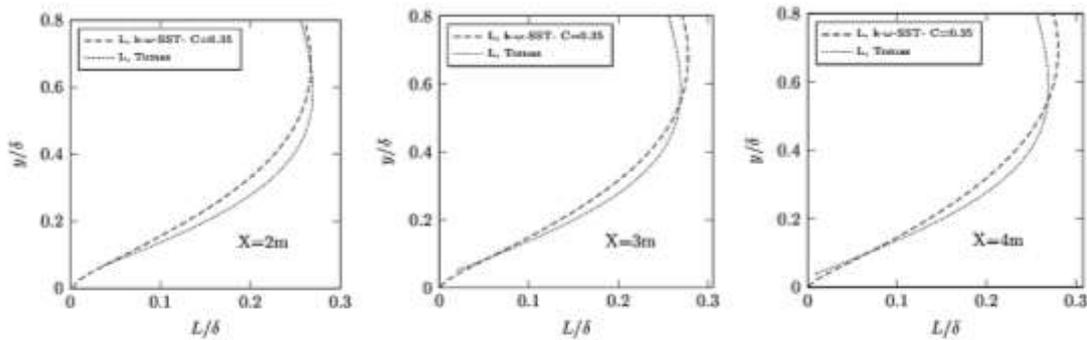


الشكل (5): مقارنة قيمة البارامترين  $(k, \omega)$  التي تم الحصول عليها باستخدام برنامج الـ OpenFOAM مع القيم التي تم الحصول عليها للحالة المرجعية من قبل NASA.

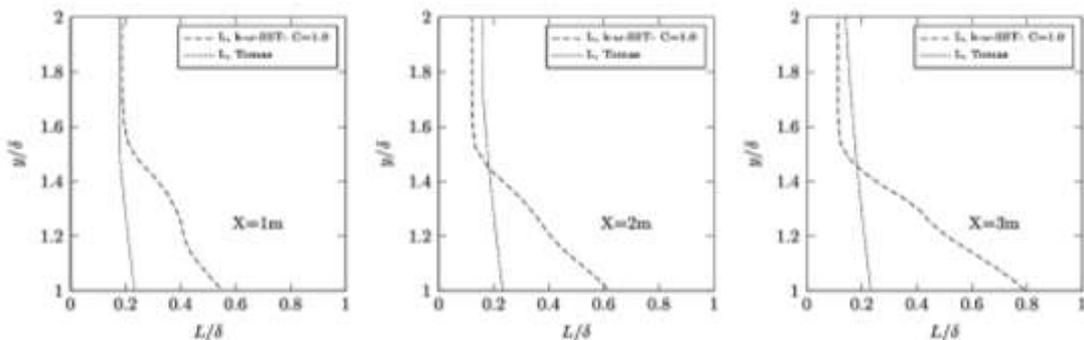
مقارنة النتائج الموضحة في الشكل السابق تؤكد لنا بأن الحسابات التي تم إجراؤها باستخدام الـ OpenFOAM تتطابق بشكل كبير جداً مع النتائج المنشورة من قبل NASA. وهذا يؤكد دقة النتائج التي يتم الحصول عليها باستخدام الموديل الرياضي  $k - \omega$  SST. انطلاقاً من هذه النتائج يمكننا الآن حساب الطول المميز للاضطراب L باستخدام برنامج OpenFOAM والعلاقة (15). النتائج الرقمية للطول المميز للاضطراب L تم مقارنتها مع النتائج التجريبية والتي تم الحصول عليها باستخدام العلاقة التجريبية التالية [1]:

$$\frac{L}{\delta} = \frac{0.3 \left(\frac{y}{\delta} - 0.03\right)}{0.31 + \left(\frac{y}{\delta} - 0.03\right)^2} \quad (16)$$

حيث أن  $\delta$  هي سماكة الطبقة الحدية و  $y$  هي المسافة من الجدار. بالاعتماد على Schlichting and Gersten [2, 3] فإن قيمة البارامتر المدروس  $C$  هي 0.168. إن هذه القيمة غير صالحة على كامل سماكة الطبقة الحدية، ولكن فقط ضمن مسافة ضيقة قريبة من الجدار وهي ضمن المجال التالي  $0 < y/\delta < 0.2$ . إن تحليل النتائج التجريبية المنشورة في الدراسة [1] تظهر بأن هذا الثابت  $C$  يأخذ القيمة 0.35 في القسم الأكبر من الطبقة الحدية والذي يتراوح ضمن المجال  $0.2 < y/\delta < 0.8$ . الشكل (6) يظهر مقارنة بين النتائج الرقمية للطول المميز للاضطراب التي تم الحصول عليها باستخدام برنامج OpenFOAM مع قيمة الثابت  $C = 0.35$  والنتائج التجريبية التي تم الحصول عليها باستخدام العلاقة (16) وذلك عند مقاطع مختلفة على طول الصفيحة المدروسة ( $x = 2, 3, 4m$ ). المقارنة ما بين النتائج الموضحة في الشكل (6) يؤكد بأنه في المجال  $0.2 < y/\delta < 0.8$  ضمن الطبقة الحدية يمكن استخدام علاقة برانتدل كولموغوروف مع قيمة للثابت  $C = 0.35$ . ضمن المجال  $0.8 < y/\delta < 1.0$ ، فإن قيمة الثابت ليست ثابتة وتتراوح بين الـ 0.35 و الـ 1.0. أفضل توافق ما بين النتائج التجريبية والنتائج الرقمية يحصل عند قيمة للثابت  $C = 0.5$ . في المجال الخارجي من الطبقة الحدية  $y/\delta > 1.3$ ، فإن القيمة الأنسب للثابت  $C$  هي 1.0، انظر الشكل (7).



الشكل (6): مقارنة نتائج الـ CFD والنتائج التجريبية للطول المميز للاضطراب في الجزء الداخلي من الطبقة الحدية.



الشكل (7): مقارنة نتائج الـ CFD والنتائج التجريبية للطول المميز للاضطراب في الجزء الخارجي من الطبقة الحدية.

بناء على ما سبق فإن علاقة برانتدل كولموغوروف يمكن استخدامها على كامل ارتفاع الطبقة الحدية إذا كان الثابت  $C$  عبارة عن تابع يعتمد في قيمته على  $y/\delta$  ويتحقق فيه التالي:

$$\begin{cases} C = 0.168 & \text{if} & 0.0 < y/\delta < 0.2 \\ C = 0.35 & \text{if} & 0.2 < y/\delta < 0.8 \\ C = 0.5 & \text{if} & 0.8 < y/\delta < 1.0 \\ C = 1.0 & \text{if} & y/\delta > 1.3 \end{cases}$$

### الاستنتاجات والتوصيات:

#### الاستنتاجات:

تم في هذا البحث استخدام تقنية الـ CFD من أجل اختيار القيم الأفضل للثابت التجريبي C في علاقة براندتل كولموغوروف، والذي يتم اعتباره مساوياً للقيمة 0.168 وذلك بالاعتماد على Schlichting and Gersten [2, 3]، ولكن تم اثبات بأن هذا الرقم غير صالح على كامل ارتفاع الطبقة الحدية، وأن قيمة هذا الثابت تتغير مع زيادة البعد عن الجدار. المقارنة بين نتائج الـ CFD والنتائج التجريبية تبين مقدار الدقة في النتائج التي يمكن الحصول عليها باستخدام تقنية الـ CFD.

**التوصيات:** إيجاد التابع الرياضي الأمثل والذي يعطي قيمة الثابت بشكل مباشر تبعا للمسافة عن الجدار، وهذا الأمر يتطلب إجراء المزيد من الحسابات باستخدام تقنية الـ CFD، ومن ثم اختيار التابع الأمثل.

### References:

- 1- S. Tomas, O. Eiff, V. Masson. Experimental study of the turbulent structure of a boundary layer developing over a rough surface. 19ième Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. 6 p. hal-00657251.
- 2- Schlichting H. and Gersten K. Boundary-layer theory. Springer Verlag, 2000.
- 3- Schlichting H. and Gersten K. Grenzschicht-theorie. Springer, 2006.
- 4- W. Rodi, "A Note on the Empirical Constant in the Kolmogorov-Prandtl Eddy-Viscosity Expression," Journal of Fluids Engineering, vol. 97, no. 3, p. 386, 1975.
- 5- Ferziger, J. H. and Peric, M. Computational methods for fluid dynamics. Springer Science & Business Media, 2012.
- 6- Jasak, H. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1996.
- 7- Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA journal, 32(8):1598–1605, 1994.
- 8- CFD Online.  $\kappa - \omega$  SST model. [http://www.cfd-online.com/Wiki/SST\\_k-omega\\_model](http://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model), August 2019.
- 9- NASA. <http://turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate.html>, accessed 1 Sep 2019.
- 10- Kornev, N., Taranov, A., Shchukin, E. and Kleinsorge, L. Development of hybrid URANS–LES methods for flow simulation in the ship stern area. Ocean engineering, 38(16), 1831-1838, 2011.