

خوارزمية عددية لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية- التفاضلية

د. سليمان محمد محمود*

د. سامي أنجرو**

حسن نواف ضاهر***

(تاريخ الإيداع 11 / 8 / 2020. قُبِلَ للنشر في 20 / 9 / 2020)

□ ملخص □

نقدم في هذه البحث خوارزمية عددية لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية باستخدام كثيرات حدود شرانجية من الدرجة التاسعة مع ست نقاط تجميع. يتم تحويل معادلة فولتيرا-فريدهولم إلى جملة معادلات تفاضلية خطية من المرتبة الأولى والتي نحلها بتطبيق كثيرات الحدود الشرانجية ومشتقاتها عليها. تم إثبات تقارب التقنية المقترحة عندما تم تطبيقها على المسألة المذكورة. ولاختبار فعالية الطريقة ودقتها تم حل مسألتين اختبار حيث أظهرت مقارنات نتائجنا مع نتائج أخرى مأخوذة من مراجع حديثة إلى الدقة العالية التي قدمتها التقريبات الشرانجية.

الكلمات المفتاحية: معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية-التفاضلية، كثيرات حدود شرانجية، نقاط تجميع ، التقارب.

*أستاذ - قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

**أستاذ مساعد - قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

***طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

Numerical Algorithm for Solving Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations

Dr. Suliman M. Mahmood^{*}
Dr. Sami Injrou^{**}
Hasan N. Daher^{***}

(Received 11 / 8 / 2020. Accepted 20 / 9 /2020)

□ ABSTRACT □

In this paper, we present a numerical algorithm for solving linear integro differential Volterra-Friedholm equations by using spline polynomials of degree ninth with six collocation points. The Fredholm-Volterra equation is converted into a system of first-order linear differential equations, which is solved by applying polynomials and their derivatives with collocation points. The convergence of the proposed method is demonstrated when it is applied to above problem. To test the effectiveness and accuracy of this method, two test problems were resolved where comparisons could be used with other results taken from recent references to the high resolution provided by spline approximations.

Keywords: Fredholm-Volterra Integro-Differential Equation, Spline Polynomials, Collocation Points, Convergence

* Professor - Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Associated Professor - Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate Student (PhD), Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تلعب المعادلات التكاملية-التفاضلية دوراً كبيراً في شتى العلوم الفيزيائية والكيميائية والهندسية والرياضيات التطبيقية وعلوم الأحياء والجيولوجيا وعمليات التمويل، إذ تمثل المعادلات التكاملية التفاضلية نماذج رياضية لكثير من الظواهر الطبيعية وعمليات انتشار الاوبئة والنمو السكاني. كما وأن لمعادلات فولتيرا ومعادلات فريدهولم في هذا المجال أهمية بالغة في كثير من التطبيقات الهامة، وتظهر حديثاً نماذج كثيرة كخليط من معادلات فولتيرا وفريدهولم في نموذج واحد يدعى معادلة فولتيرا-فريدهولم وهي نماذج رياضية معقدة يصعب حلها بالطرق التقليدية لذلك يلجأ الباحثون لتطوير طرائق وخوارزميات عددية لإيجاد الحل التقريبي لها.

قدمت دراسات عديدة لإيجاد حلول عددية لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية، نذكر منها: قدم Muna و Adhra'a عام 2014 [1] طريقة عددية تعتمد على كثيرات حدود لاغرانج لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من النوع الثاني. كما استخدم Maleknejad وآخرون عام 2012 [2] طريقة عددية تعتمد على مصفوفة تحويلات وكثيرات حدود برنشتاين لإيجاد حل تقريبي لمعادلات فولتيرا فريدهولم الخطية من مراتب عليا. ولذلك قدم Yalc Binbas عام 200 [3] طريقة تعتمد على كثيرات حدود تايلور لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من مراتب عليا. استخدم كل من Maleknejad و Rohaninasab عام 2018 [4] طريقة عددية تجميعية تعتمد على كثيرات حدود لاغرانج ونقاط تجميع ليجندر لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من مراتب عليا بشروط حدية مختلطة. قدم Roohollahi وآخرون عام 2020 [5] طريقة block pulse لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية المختلطة ذات المشتق الكسري حيث تم نشر دالة الحل باستخدام دوال ال block pulse فتتحول المسألة الى جملة معادلات جبرية بحلها نحصل على الحل التقريبي. درس Hamoud وآخرون عام 2018 [6] طريقة التكرار المتغيرة المعدلة لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية ذات المشتق الكسري. وقد قام Deepmala وآخرون عام 2017 [7] باستخدام كثيرات حدود تشيبيتشيف لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى. قدم Shahooth وآخرون عام 2016 [8] بإيجاد حل تقريبي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من النوع الثاني باستخدام كثيرات حدود برنشتاين. استخدم Hamoud وآخرون عام 2020 [9] طريقة تحليل الهموتوبي لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية المختلطة. حلّ Omran عام 2009 [10] معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى والنوع الثاني باستخدام طريقة أشباه المنحرفات التكرارية وطريقة سيمسون التكرارية. طرح Simbawa و Maturi عام 2020 [11] طريقة التحليل المعدلة لحل معادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية المختلطة باستخدام برنامج الحساب الرياضي (MAPLE).

سنقدم في هذا البحث خوارزمية عددية لحل النموذج الآتي:

$$u'(x) = p(x)u(x) + f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha, u(b) = \alpha$$

حيث $a \leq x \leq b$ و $a \leq t \leq b$ و $f \in C[a,b]$ دالة معلومة و λ_1, λ_2 ثابتان لها دلالات فيزيائية، وتدعى الدالتان $K_2(x,t), K_1(x,t)$ نواتي المعادلة التكاملية لفولتيرا وفريدهولم على الترتيب، وهما معلومتان وقد تكونا مستمرتين أو غير مستمرتين، و $u \in C[a,b]$ دالة مجهولة يطلب تعيينها.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث الى تقديم خوارزمية عددية فعالة لإيجاد الحل العددي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى. ثم دراسة تقارب الطريقة المقترحة وذلك بتطبيق كثيرات الحدود الشرائحية مع نقاط التجميع على المسألة المذكورة. وإجراء اختبار لفعالية ودقة الطريقة بحل بعض المسائل مأخوذة من مراجع حديثة [1,10].

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص التحليل العددي، وفي نظرية المعادلات، والجبر الخطي والخوارزميات العددية وعلوم الحاسب ولذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على التقنيات العددية لحل المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية-التفاضلية وإجراء الحسابات بلغة البرمجة عالية المستوى Mathematica الاصدار 11.

النتائج والمناقشة:

بفرض أن نواتي المسألة (1) قابلتين للفصل، يمكن عندئذ إعادة كتابتهما بالشكل:

$$u'(x) = f(x) + u(x) + \psi(x) + \tau(x), \quad x \in [a, b] \quad (3)$$

علما ان $\psi(x)$ نواة فولتيرا وا $\tau(x)$ نواة فريدهولم

نفرق نواة فولتيرا كالاتي [13]:

$$\psi(x) = \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t) u(t) dt = \sum_{i=1}^v \varepsilon_i(x) \left[\int_a^x \gamma_i(t) u(t) dt \right]$$

من أجل $x \in [a, b]$.

ونفرق نواة فريدهولم كالاتي [13]:

$$\tau(x) = \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) u(t) dt = \sum_{i=1}^m \rho_i(x) \int_a^b \beta_i(t) u(t) dt$$

من أجل $x \in [a, b]$.

وعندئذ يمكن كتابة نواة فريدهولم كالاتي:

$$\tau(x) = \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) u(t) dt = \sum_{i=1}^m \rho_i(x) \left[\int_a^x \beta_i(t) u(t) dt + \int_x^b \beta_i(t) u(t) dt \right]$$

تؤول العلاقة (3) بعد التفريق إلى منظومة المعادلات التفاضلية الآتية [13]:

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= f(x) + u(x) + \sum_{i=1}^v \varepsilon_i(x)(\eta_i(x)) + \sum_{i=1}^m \rho_i(x)(\phi_i(x) + \theta_i(x)) \\
 \phi'_1 &= \beta_1(x)u(x) \\
 \phi'_2 &= \beta_2(x)u(x) \\
 &\vdots \\
 \phi'_m &= \beta_m(x)u(x) \\
 \theta'_1 &= \beta_1(x)u(x) \\
 \theta'_2 &= \beta_2(x)u(x) \\
 &\vdots \\
 \theta'_m &= \beta_m(x)u(x) \\
 \eta'_1 &= \gamma_1(x)u(x) \\
 \eta'_2 &= \gamma_2(x)u(x) \\
 &\vdots \\
 \eta'_v &= \gamma_v(x)u(x); \\
 \phi_i(x) &= \int_a^x \beta_i(t)u(t)dt \\
 \theta_i(x) &= \int_x^b \beta_i(t)u(t)dt \\
 \eta_i(x) &= \int_a^x \gamma_i(t)u(t)dt
 \end{aligned} \tag{6}$$

حيث وباستخدام قاعدة Leibnitz للاشتقاق تم الحصول على:

$$\cdot \phi'_i(x) = \beta_i(x)u(x), \theta'_i(x) = \beta_i(x)u(x), \eta'_i(x) = \gamma_i(x)u(x)$$

صياغة التقريبات الشرائحية:

نقدم في هذه الفقرة تطويرا للتقريبات الشرائحية التي طورها الباحث Daher وآخرون في [13] حيث استخدموا كثيرات حدود من الدرجة السابعة مع أربع نقاط تجميع. في سبيل ذلك نستخدم تجزئة منتظمة للمجال $[a, b]$ بالشكل $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ، حيث $x_i = a + ih$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ ، و $h = (b - a)/n$ طول الخطوة. كما نستخدم ست نقاط تجميع نعرّفهم كالاتي:

$$x_{k+z_j} = x_k + z_j h, \quad j = 1, \dots, 6 \tag{7}$$

في كل مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

وترتبط نقاط التجميع أعلاه مع وسطاء التجميع التي يتم تحديدها كالاتي [13]:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 < z_6 = 1 \tag{8}$$

ننشئ كثيرات حدود شرائحية من الدرجة التاسعة في كل مجال جزئي I_k ، كالاتي:

$$S_{l,k}(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{(x-x_k)^i}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^9 \frac{(x-x_k)^j}{j!} C_{k,[6(l-1)+j]}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 4, 5, \dots, 9; \quad l = 1, 2, \dots, 2m + \nu + 1 \quad (9)$$

حيث $S_k^{(i)}(a) = S_0^{(i)} = u_0^{(i)}$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ قيم ابتدائية معلومة تحسب من شروط البدء و $S_k^{(i)}$ هي قيمة تقريبية للمشتق من الدرجة i لكثيرة الحدود الشرائحية عند x_k ، و $C_{k,j-3}$ مجاهيل يجب تعيينها.

وبشكل عام، فإن التجزئة تحدد n شريحة $S_k(x)$ ، $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، تسمى كثيرة حدود شرائحية. وباشتقاق العلاقة (9) بالنسبة ل x نحصل على الحدودية الآتية:

$$S'_{l,k}(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_k)^{i-1}}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^9 \frac{(x-x_k)^{j-1}}{j!} C_{k,[6(l-1)+j]}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (10)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad l = 1, 2, \dots, 2m + \nu + 1$$

بتطبيق الشريحتين (9)-(10) مع نقاط التجميع (7) على المسألة (6) نحصل على منظومة المعادلات:

$$\left\{ \begin{aligned} & S'_1(x_{k+z_j}) + S_1(x_{k+z_j}) + \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon_i(x) (S_{i+2m+1}(x)) + \\ & \sum_{i=1}^m \rho_i(x) (S_{i+1}(x) + S_{i+m+1}(x)) = f(x_{k+z_j}), \\ & S'_2(x_{k+z_j}) = \beta_1(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_3(x_{k+z_j}) = \beta_2(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & \vdots \\ & S'_{m+1}(x_{k+z_j}) = \beta_m(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_{m+2}(x_{k+z_j}) = \beta_1(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_{m+3}(x_{k+z_j}) = \beta_2(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & \vdots \\ & S'_{2m+1}(x_{k+z_j}) = \beta_m(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_{2m+2}(x_{k+z_j}) = \gamma_1(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_{2m+3}(x_{k+z_j}) = \gamma_2(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & S'_{2m+4}(x_{k+z_j}) = \gamma_3(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \\ & \vdots \\ & S'_{2m+1+\nu}(x_{k+z_j}) = \gamma_\nu(x_{k+z_j}) S_1(x_{k+z_j}), \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

حيث: $S_1(x)$ تقريب شرائحي لدالة الحل $u(x)$ و $S_i(x)$ تقريبات شرائحية للدوال $\phi(x), \theta(x), \eta(x), i = 2, 3, \dots, 2m + \nu + 1$ التي تعطى بالحدوديات (9). وباستخدام التقريبات الشرائحية ومشتقاتها (9)-(10) مع نقاط التجميع (7) تأخذ المنظومة (11) الشكل الآتي:

$$T\bar{C}_k = \bar{F}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

حيث أن المصفوفة T من القياس $6(2m + \nu + 1) \times 6(2m + \nu + 1)$ يمكن كتابتها بالشكل المبسط الآتي:

$$T = \begin{bmatrix} A+B & B & B & \dots & B & B & B & B & B & B & B \\ \beta_1(x)B & -A & o & \dots & o & o & o & o & o & o & o \\ \beta_2(x)B & B & -A & \dots & o & o & o & o & o & o & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & -A & \dots & o & o & o & o & o & o \\ \beta_m(x)B & o & o & o & -A & o & \dots & o & o & o & o \\ \beta_1(x)B & o & o & o & o & -A & o & o & \dots & o & o \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & o & \ddots & o & \dots & o & o \\ \beta_m(x)B & o & o & o & \ddots & o & o & -A & \dots & o & o \\ \gamma_1(x)B & o & o & o & o & o & o & o & -A & o & o \\ \vdots & o & o & o & o & \dots & o & o & o & -A & o \\ \gamma_v(x)B & o & o & o & o & \dots & o & o & o & o & -A \end{bmatrix} \quad \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ \vdots \\ C_{k,6(2m+v+1)} \end{bmatrix}$$

(13)

و O مصفوفات صفرية من القياس 6×6 و A, B هما المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h^3 z_1^3}{6} & \frac{h^4 z_1^4}{24} & \frac{h^5 z_1^5}{120} & \frac{h^6 z_1^6}{720} & \frac{h^7 z_1^7}{5040} & \frac{h^8 z_1^8}{40320} \\ \frac{h^3 z_2^3}{6} & \frac{h^4 z_2^4}{24} & \frac{h^5 z_2^5}{120} & \frac{h^6 z_2^6}{720} & \frac{h^7 z_2^7}{5040} & \frac{h^8 z_2^8}{40320} \\ \frac{h^3 z_3^3}{6} & \frac{h^4 z_3^4}{24} & \frac{h^5 z_3^5}{120} & \frac{h^6 z_3^6}{720} & \frac{h^7 z_3^7}{5040} & \frac{h^8 z_3^8}{40320} \\ \frac{h^3 z_4^3}{6} & \frac{h^4 z_4^4}{24} & \frac{h^5 z_4^5}{120} & \frac{h^6 z_4^6}{720} & \frac{h^7 z_4^7}{5040} & \frac{h^8 z_4^8}{40320} \\ \frac{h^3 z_5^3}{6} & \frac{h^4 z_5^4}{24} & \frac{h^5 z_5^5}{120} & \frac{h^6 z_5^6}{720} & \frac{h^7 z_5^7}{5040} & \frac{h^8 z_5^8}{40320} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{40320} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{h^4_{z_1}}{24} & \frac{h^5_{z_1}}{120} & \frac{h^6_{z_1}}{720} & \frac{h^7_{z_1}}{5040} & \frac{h^8_{z_1}}{40320} & \frac{h^9_{z_1}}{362880} \\ \frac{h^4_{z_2}}{24} & \frac{h^5_{z_2}}{120} & \frac{h^6_{z_2}}{720} & \frac{h^7_{z_2}}{5040} & \frac{h^8_{z_2}}{40320} & \frac{h^9_{z_2}}{362880} \\ \frac{h^4_{z_3}}{24} & \frac{h^5_{z_3}}{120} & \frac{h^6_{z_3}}{720} & \frac{h^7_{z_3}}{5040} & \frac{h^8_{z_3}}{40320} & \frac{h^9_{z_3}}{362880} \\ \frac{h^4_{z_4}}{24} & \frac{h^5_{z_4}}{120} & \frac{h^6_{z_4}}{720} & \frac{h^7_{z_4}}{5040} & \frac{h^8_{z_4}}{40320} & \frac{h^9_{z_4}}{362880} \\ \frac{h^4_{z_5}}{24} & \frac{h^5_{z_5}}{120} & \frac{h^6_{z_5}}{720} & \frac{h^7_{z_5}}{5040} & \frac{h^8_{z_5}}{40320} & \frac{h^9_{z_5}}{362880} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} & \frac{1}{5040} & \frac{1}{40320} & \frac{1}{362880} \end{bmatrix}$$

واضافة الى ذلك:

$$F_k = \begin{bmatrix} f(x_{k+z_1}) - SS \\ f(x_{k+z_2}) - SS \\ \vdots \\ f(x_{k+1}) - SS \\ \beta_1(x_{k+z_1})\overline{S_1}(x_{k+z_1}) - \overline{S_2} \\ \beta_1(x_{k+z_2})\overline{S_1}(x_{k+z_2}) - \overline{S_2} \\ \vdots \\ \beta_1(x_{k+1})\overline{S_1}(x_{k+1}) - \overline{S_2} \\ \vdots \\ \beta_m(x_{k+1})\overline{S_1}(x_{k+1}) - \overline{S_{m+1}} \\ \vdots \\ \beta_m(x_{k+1})\overline{S_1}(x_{k+1}) - \overline{S_{2m+1}} \\ \gamma_1(x_{k+1})\overline{S_1}(x_{k+1}) - \overline{S_{2m+2}} \\ \vdots \\ \gamma_v(x_{k+1})\overline{S_1}(x_{k+1}) - \overline{S_{2m+v+1}} \end{bmatrix}$$

وأن:

$$\overline{S_l} = \sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_k)^i}{(i-1)!} S_{l,k}^{(i)} \quad ; l = 1, 2, \dots, 2m+v+1$$

$$SS = \overline{S_2} - \overline{S_2} - \rho_1(x)(\overline{S_2} + \overline{S_{m+2}}) \cdots \rho_m(x)(x)(\overline{S_{m+1}} + \overline{S_{2m+1}}) - \varepsilon_1(x)(\overline{S_{2m+2}}) \cdots - \varepsilon_v(x)(\overline{S_{2m+v+1}})$$

بحساب المجاهيل C_k وتعويضها في الشرائح (10) نحصل على الحل التقريبي

$$S_1(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^3 \frac{(h)^i}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^9 \frac{(h)^j}{j!} C_{k,j-3}, x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (15)$$

تحليل التقارب:

لإجراء تحليل التقارب للطريقة الشرائحية، نحتاج لبرهان المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة 1: [12]

بفرض أن $f(x)$ دالة معرفة على المجال $[a, b]$ وأن $K(x, t)$ دالة ملساء بشكل كافٍ معرفة ومستمرة على المجال $[a, b] \times [a, b]$ وأن $u(x) \in C^{10}[a, b]$ الحل الدقيق للمسألة (1) و $S_1(x)$ تقريب شرائحي للحل الدقيق، ولنرمز بـ $T_9(x)$ منشور تايلور من الدرجة 10 للدالة $u(x)$ حول x_k و e_{k+1} الخطأ المقطوع المحلي عندئذ:

$$e_{k+1} \leq \|u(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})\| \leq \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} p + M \times \|W\|_{\infty} + L, \quad (16)$$

حيث:

$$M = \text{Max} \left(\frac{h^{i+3}}{(i+3)!} \right), P = h^{10}, h = x_{k+1} - x_k, L = \sum_{j=0}^k e_j,$$

$$\|W\|_{\infty} = \text{Max} \{ |u^{(4)}(x_0) - C_1|, |u^{(4)}(x_0) - C_2|, \dots, |u^{(9)}(x_0) - C_6| \}, x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ and } i = 1, 2, \dots, 6$$

البرهان: لدينا

$$e_{k+1} = \|u(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})\|_{\infty} \leq \|T_9(x_k) - S_k(x_{k+1})\|_{\infty} + \|u(x_{k+1}) - T_9(x_{k+1})\|_{\infty} \quad (17)$$

حيث:

$$T_9(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^9 u^{(i)}(x_k) \frac{h^i}{i!}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$u(x_{k+1}) - T_9(x_{k+1}) = \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} h^{10}; \xi \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$\|T_9(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})\|_{\infty} = \|u(x_k) - s_k + u'(x_k)h - s_k'x + \frac{u''(x_k)(h)^2 - s_k''h^2}{2!}$$

$$+ \frac{u'''(x_k)h^3 - s_k'''h^3}{3!} + \frac{u^{(4)}(x_k)h^4 - C_1h^4}{4!} + \frac{u^{(5)}(x_k)h^5 - C_2h^5}{5!} +$$

$$\frac{u^{(6)}(x_k)h^6 - C_3h^6}{6!} + \frac{u^{(7)}(x_k)h^7 - C_4h^7}{7!} + \frac{u^{(8)}(x_k)h^8 - C_5h^8}{8!} +$$

$$\frac{u^{(9)}(x_k)h^9 - C_6h^9}{9!} \|_{\infty}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$u(x_k) \equiv s_k, u'(x_k)h \equiv s_k', u''(x_k)h^2 \equiv s_k''h^2, u'''(x_k)h^3 \equiv s_k'''h^3$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \|T_9(x_k) - S_k(x_k)\|_\infty &= \left\| \frac{(u^{(4)}(x_k) - C_1)h^4}{4!} + \frac{(u^{(5)}(x_k) - C_2)h^5}{5!} \right. \\ &+ \frac{(u^{(6)}(x_k) - C_3)h^6}{6!} + \frac{(u^{(7)}(x_k) - C_4)h^7}{7!} + \\ &\left. \frac{(u^{(8)}(x_k) - C_5)h^8}{8!} + \frac{(u^{(9)}(x_k) - C_6)h^9}{9!} \right\|_\infty \\ &\leq \text{Max} \left(u^{(i+2)}(x_k) - C_i \right) \times \text{Max} \left(\frac{h^{i+2}}{(i+2)!} \right) = \\ &M \times \text{Max} \left(|u^{(i+3)}(x_k) - C_i| \right) = M \times \|W\|_\infty \end{aligned}$$

الخطأ عند القيمة الابتدائية:

$$e_0 = 0.$$

ويكون الخطأ عند الخطوة الاولى:

$$e_1 \leq \frac{u^{(10)}(\xi)h^{10}}{10!} + M \times \|W\|_\infty \leq \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} P_2 + M \times \|W\|_\infty.$$

والخطأ عند الخطوة الثانية:

$$e_2 \leq \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} P + M \times \|W\|_\infty + e_1.$$

فيكون الخطأ عند الخطوة $k+1$:

$$e_{k+1} \leq \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} P + M \times \|W\|_\infty + \sum_{j=0}^k e_j \leq \frac{u^{(10)}(\xi)}{10!} P + M \times \|W\|_\infty + L$$

وبذلك يكتمل البرهان.

ميرهنة 2: [12]

ليكن $S(x_k)$ الحل التقريبي المعطى بالعلاقة (15) و $u(x)$ الحل الدقيق للمسألة (1) :

إذا كان:

$$\frac{\|u'(s) - S'_k\|_\infty}{\|u(s) - S_k\|_\infty} \leq \frac{1}{1 + \delta + \mu}$$

عندئذ تكون الطريقة متقاربة، حيث

$$\delta = \lambda_1 \int_0^x |K_1(x, t)| dt, \quad \mu = \lambda_2 \int_0^x |K_2(x, t)| dt$$

البرهان:

باستخدام الحل التقريبي (15) والحل الدقيق في المسألة (1) نحصل على:

عندئذ:

$$\begin{aligned} \|u'(x) - S'_k\|_\infty &= \|u(x) - S_k\|_\infty + \lambda_1 \int_0^x \|K_1(x, t)\|_\infty \|u(t) - S_k\|_\infty dt \\ &+ \lambda_2 \int_0^b \|K_2(x, t)\|_\infty \|u(t) - S_k\|_\infty dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u'(s) - S'_k\|_{\infty} &\leq \|u(s) - S_k\|_{\infty} + \lambda_1 \int_a^x \|K_1(x, t)\|_{\infty} dt \|u(t) - S_k\|_{\infty} \\ &+ \lambda_2 \int_a^b \|K_2(x, t)\|_{\infty} dt \|u(t) - S_k\|_{\infty} \\ \frac{\|u'(x) - S'_k\|_{\infty}}{\|u(x) - S_k\|_{\infty}} &\leq \frac{1}{1 + \lambda_1 \int_a^x \|K_1(x, t)\|_{\infty} dt + \lambda_2 \int_a^b \|K_2(x, t)\|_{\infty} dt} \leq \frac{1}{1 + \delta + \mu} \end{aligned}$$

وبذلك يكتمل البرهان.

نتيجة 1:

نجد من المبرهنة 1 أن الخطأ في الطريقة المقترحة من المرتبة الرابعة على الأقل.

• **خوارزمية الطريقة الشرائحية: Algorithm of Spline Method**

المدخلات: مجال الحل $[a, b]$ جملة المعادلات التفاضلية الخطية، والقيم الابتدائية

$$k=0 \quad N, S^{(i)}(a) = S_0^{(i)} = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

نحدد l عدد المعادلات الناتجة عن عملية التفريق.

نحدد وسطاء التجميع:

$$Z_1 = 0.55; Z_2 = 0.75; Z_3 = 0.81; Z_4 = 0.91; Z_5 = 0.98; Z_6 = 1$$

$$h = (b - a) / (N) \quad \text{الخطوة (1): نحسب}$$

الخطوة (2): نفرق نواتي فولتيرا وفريدهولم القابلتين للفصل:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t) (u(t)) dt = \sum_{i=1}^v \varepsilon_i(x) \left[\int_a^x \gamma_i(t) u(t) dt \right] \\ \tau(x) &= \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t) (u(t)) dt = \sum_{i=1}^m \rho_i(x) \left[\int_a^x \beta_i(t) u(t) dt + \int_x^b \beta_i(t) u(t) dt \right] \end{aligned}$$

الخطوة (3): بحل جملة المعادلات التفاضلية (6) بعد تطبيق الشرائح (9)-(10) عليها يؤول الحل إلى حساب جملة

$$TC_k = \bar{F}_k \quad \text{المعادلات الخطية الآتية:}$$

الخطوة (4): نحسب قيمة الحل الشرائحي عند x_{k+1} :

$$S_1(x_{k+1}) = \sum_{i=0}^3 \frac{(h)^i}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^9 \frac{(h)^j}{j!} C_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

الخطوة (5): نختبر الشرط $k < N$. اذا لم تكن محققة نضع $k = k + 1$ ونعود للتكرار بدءاً من الخطوة (3).

الخطوة (6): نطبع متتالية الحل الشرائحي S_1, S_2, \dots, S_N .

الخطوة (7): النهاية.

• **نقدم برنامج بلغة البرمجة Mathematica مطبق لحل المثال (1).**

```
Clear[y,y1,y2,y3,f,t,x,a,ja,b,r,e,i,c,l,z,sx1,sx2,sx3,sp1];
y1[t_]=Cos[t]; y2[t_]=-1+Cos[t]+t Sin[t];
y3[t_]=Sin[t]; y4[t_]=Sin[1]-Sin[t]; y5[t_]=Cos[1]-Cos[t]+Sin[1]-t
Sin[t];l=100;n=1;h=(1.)/(l);a=0.55;b=0.75;e=0.81;d=0.91;dd=0.98;z[1]=a;z[2]=b;z[3]=e;z[
4]=d;z[5]=dd;z[6]=1;s10=y1[0];s11=y1'[0];s12=y1''[0];s13=y1'''[0];s20=y2[0];s21=y2'[0];
```

$s_{22}=y_2''[0]; s_{23}=y_2'''[0]; s_{30}=y_3[0]; s_{31}=y_3'[0]; s_{32}=y_3''[0]; s_{33}=y_3'''[0]; s_{40}=y_4[0]; s_{41}=y_4'[0]; s_{42}=y_4''[0]; s_{43}=y_4'''[0]; s_{50}=y_5[0]; s_{51}=y_5'[0]; s_{52}=y_5''[0]; s_{53}=y_5'''[0];$
 For $[r=1, r<=1, \text{For } [i=1, i<=6, i++, x=z[i]*h; t=x+h*(r-1); f[i]=-(s_{11}+x*s_{12}+x^2*s_{13}/2)-(t^2-t)(s_{20}+(x*s_{21})/1+(x^2*s_{22})/2+(x^3*s_{23})/6)-t^2(s_{30}+(x*s_{31})/1+(x^2*s_{32})/2+(x^3*s_{33})/6)-t^2(s_{40}+(x*s_{41})/1+(x^2*s_{42})/2+(x^3*s_{43})/6)+t(s_{50}+(x*s_{51})/1+(x^2*s_{52})/2+(x^3*s_{53})/6)+t^2 \text{Cos}[t]+t(1-\text{Cos}[1]+t(-1+\text{Sin}[1])-\text{Sin}[1])+(-1+t^3)\text{Sin}[t];$
 $f[i+6]=-(s_{21}+x*s_{22}+x*x*s_{23}/2)+t(s_{10}+(x*s_{11})/1+(x^2*s_{12})/2+(x^3*s_{13})/6);$
 $f[i+12]=-(s_{31}+x*s_{32}+x*x*s_{33}/2)+(s_{10}+(x*s_{11})/1+(x^2*s_{12})/2+(x^3*s_{13})/6);$
 $f[i+18]=-(s_{41}+x*s_{42}+x*x*s_{43}/2)-(s_{10}+(x*s_{11})/1+(x^2*s_{12})/2+(x^3*s_{13})/6);$
 $f[i+24]=-(s_{51}+x*s_{52}+x*x*s_{53}/2)-t(s_{10}+(x*s_{11})/1+(x^2*s_{12})/2+(x^3*s_{13})/6);$
 $ja[i,1]=x^3/6; ja[i,2]=x^4/4!; ja[i,3]=x^5/5!; ja[i,4]=x^6/6!; ja[i,5]=x^7/7!;$
 $ja[i,6]=x^8/8!; ja[i,7]=(t^2-t)x^4/4!; ja[i,8]=(t^2-t)x^5/5!; ja[i,9]=(t^2-t)x^6/6!;$
 $ja[i,10]=(t^2-t)x^7/7!; ja[i,11]=(t^2-t)x^8/8!; ja[i,12]=(t^2-t)x^9/9!; ja[i,13]=t^2x^4/4!;$
 $ja[i,14]=t^2x^5/5!; ja[i,15]=t^2x^6/6!; ja[i,16]=t^2x^7/7!; ja[i,17]=t^2x^8/8!;$
 $ja[i,18]=t^2x^9/9!; ja[i,19]=t^2x^4/4!; ja[i,20]=t^2x^5/5!; ja[i,21]=t^2x^6/6!; ja[i,22]=t^2x^7/7!;$
 $ja[i,23]=t^2x^8/8!; ja[i,24]=t^2x^9/9!; ja[i,25]=-tx^4/4!; ja[i,26]=-tx^5/5!;$
 $ja[i,27]=-tx^6/6!; ja[i,28]=-tx^7/7!; ja[i,29]=-tx^8/8!; ja[i,30]=-tx^9/9!; ja[i+6,1]=-tx^4/4!;$
 $ja[i+6,2]=-tx^5/5!; ja[i+6,3]=-tx^6/6!; ja[i+6,4]=-tx^7/7!; ja[i+6,5]=-tx^8/8!;$
 $ja[i+6,6]=-tx^9/9!; ja[i+6,7]=+x^3/6; ja[i+6,8]=+x^4/4!; ja[i+6,9]=+x^5/5!;$
 $ja[i+6,10]=+x^6/6!; ja[i+6,11]=+x^7/7!; ja[i+6,12]=+x^8/8!; ja[i+6,13]=0; ja[i+6,14]=0;$
 $ja[i+6,15]=0; ja[i+6,16]=0; ja[i+6,17]=0; ja[i+6,18]=0; ja[i+6,19]=0; ja[i+6,20]=0; ja[i+6,21]=0; ja[i+6,22]=0;$
 $ja[i+6,23]=0; ja[i+6,24]=0; ja[i+6,25]=0; ja[i+6,26]=0; ja[i+6,27]=0; ja[i+6,28]=0; ja[i+6,29]=0;$
 $ja[i+6,30]=0; ja[i+12,1]=-x^4/4!; ja[i+12,2]=-x^5/5!; ja[i+12,3]=-x^6/6!; ja[i+12,4]=-x^7/7!;$
 $ja[i+12,5]=-x^8/8!; ja[i+12,6]=-x^9/9!; ja[i+12,7]=0; ja[i+12,8]=0; ja[i+12,9]=0; ja[i+12,10]=0; ja[i+12,11]=0; ja[i+12,12]=0;$
 $ja[i+12,13]=x^3/6; ja[i+12,14]=x^4/4!; ja[i+12,15]=x^5/5!; ja[i+12,16]=x^6/6!; ja[i+12,17]=x^7/7!;$
 $ja[i+12,18]=x^8/8!; ja[i+12,19]=0; ja[i+12,20]=0; ja[i+12,21]=0; ja[i+12,22]=0; ja[i+12,23]=0;$
 $ja[i+12,24]=0; ja[i+12,25]=0; ja[i+12,26]=0; ja[i+12,27]=0; ja[i+12,28]=0; ja[i+12,29]=0; ja[i+12,30]=0;$
 $ja[i+18,1]=x^4/4!; ja[i+18,2]=x^5/5!; ja[i+18,3]=x^6/6!; ja[i+18,4]=x^7/7!; ja[i+18,5]=x^8/8!;$
 $ja[i+18,6]=x^9/9!; ja[i+18,7]=0; ja[i+18,8]=0; ja[i+18,9]=0; ja[i+18,10]=0; ja[i+18,11]=0;$
 $ja[i+18,12]=0; ja[i+18,13]=0; ja[i+18,14]=0; ja[i+18,15]=0; ja[i+18,16]=0; ja[i+18,17]=0;$
 $ja[i+18,18]=0; ja[i+18,19]=x^3/6; ja[i+18,20]=x^4/4!; ja[i+18,21]=x^5/5!; ja[i+18,22]=x^6/6!;$
 $ja[i+18,23]=x^7/7!; ja[i+18,24]=x^8/8!; ja[i+18,25]=0; ja[i+18,26]=0; ja[i+18,27]=0; ja[i+18,28]=0;$
 $ja[i+18,29]=0; ja[i+18,30]=0; ja[i+24,1]=tx^4/4!; ja[i+24,2]=tx^5/5!;$
 $ja[i+24,3]=tx^6/6!; ja[i+24,4]=tx^7/7!; ja[i+24,5]=tx^8/8!; ja[i+24,6]=tx^9/9!;$
 $ja[i+24,7]=0; ja[i+24,8]=0; ja[i+24,9]=0; ja[i+24,10]=0; ja[i+24,11]=0; ja[i+24,12]=0;$
 $ja[i+24,13]=0; ja[i+24,14]=0; ja[i+24,15]=0; ja[i+24,16]=0; ja[i+24,17]=0; ja[i+24,18]=0;$
 $ja[i+24,19]=0; ja[i+24,20]=0; ja[i+24,21]=0; ja[i+24,22]=0; ja[i+24,23]=0; ja[i+24,24]=0;$
 $ja[i+24,25]=x^3/6; ja[i+24,26]=x^4/4!; ja[i+24,27]=x^5/5!; ja[i+24,28]=x^6/6!; ja[i+24,29]=x^7/7!;$
 $ja[i+24,30]=x^8/8!];$
 Off[LinearSolve::luc]; c=LinearSolve[Table[ja[i,j],{i,30},{j,30}],
 $\{f[1],f[2],f[3],f[4],f[5],f[6],f[7],f[8],f[9],f[10],f[11],f[12],f[13],f[14],f[15],f[16],f[17],f[18],$
 $f[19],f[20],f[21],f[22],f[23],f[24],f[25],f[26],f[27],f[28],f[29],f[30]\}; x=z[6]*h; sx1[r]=s_{10}$
 $+x*s_{11}+x*x*s_{12}/2+x^3*s_{13}/6+x^4*c[[1]]/24+x^5*c[[2]]/120+x^6*c[[3]]/720+x^7*c[[4]]/5040$
 $+x^8*c[[5]]/40320+x^9*c[[6]]/9!;$

```

sx2[r]=s20+x*s21+x*x*s22/2+x^3*s23/6+x^4*c[[7]]/24+x^5*c[[8]]/120+x^6*c[[9]]/720+
x^7*c[[10]]/5040+x^8*c[[11]]/40320+x^9*c[[12]]/9!;sx3[r]=s30+x*s31+x*x*s32/2+x^3*
s33/6+x^4*c[[13]]/24+x^5*c[[14]]/120+
x^6*c[[15]]/720+x^7*c[[16]]/5040+x^8*c[[17]]/40320+x^9*c[[18]]/9!;sx4[r]=s40+x*s41
+x*x*s42/2+x^3*s43/6+x^4*c[[19]]/24+x^5*c[[20]]/120+
x^6*c[[21]]/720+x^7*c[[22]]/5040+x^8*c[[23]]/40320+x^9*c[[24]]/9!;sx5[r]=s50+x*s51
+x*x*s52/2+x^3*s53/6+x^4*c[[25]]/24+x^5*c[[26]]/120+
x^6*c[[27]]/720+x^7*c[[28]]/5040+x^8*c[[29]]/40320+x^9*c[[30]]/9!;
jj[r]=sx1[r];t=h+h*(r-1);s10=sx1[r];
s11=s11+x*s12+x^2*s13/2+x^3*c[[1]]/6+x^4*c[[2]]/24+x^5*c[[3]]/120+x^6*c[[4]]/720+
x^7*c[[5]]/5040+x^8*c[[6]]/8!;
s12=s12+x*s13+x^2*c[[1]]/2+x^3*c[[2]]/6+x^4*c[[3]]/24+x^5*c[[4]]/120+x^6*c[[5]]/72
0+x^7*c[[6]]/5040;s13=s13+x*c[[1]]+x^2*c[[2]]/2+x^3*c[[3]]/6+x^4*c[[4]]/24+x^5*c[[5
]]/120+x^6*c[[6]]/720;spy[r]=sx1[r];s20=sx2[r];s21=s21+x*s22+x^2*s23/2+x^3*c[[7]]/6
+x^4*c[[8]]/24+x^5*c[[9]]/120+x^6*c[[10]]/720+x^7*c[[11]]/5040+x^8*c[[12]]/8!;s22=s
22+x*s23+x^2*c[[7]]/2+x^3*c[[8]]/6+x^4*c[[9]]/24+x^5*c[[10]]/120+x^6*c[[11]]/720+x
^7*c[[12]]/5040;s23=s23+x*c[[7]]+x^2*c[[8]]/2+x^3*c[[9]]/6+x^4*c[[10]]/24+x^5*c[[11
]]/120+x^6*c[[12]]/720;s30=sx3[r];s31=s31+x*s32+x^2*s33/2+x^3*c[[13]]/6+x^4*c[[14
]]/24+x^5*c[[15]]/120+x^6*c[[16]]/720+x^7*c[[17]]/5040+x^8*c[[18]]/8!;s32=s32+x*s33
+x^2*c[[13]]/2+x^3*c[[14]]/6+x^4*c[[15]]/24+x^5*c[[16]]/120+x^6*c[[17]]/720+x^7*c[[
18]]/5040;s33=s33+x*c[[13]]+x^2*c[[14]]/2+x^3*c[[15]]/6+x^4*c[[16]]/24+x^5*c[[17]]/
120+x^6*c[[18]]/720;s40=sx4[r];s41=s41+x*s42+x^2*s43/2+x^3*c[[19]]/6+x^4*c[[20]]/
24+x^5*c[[21]]/120+x^6*c[[22]]/720+x^7*c[[23]]/5040+x^8*c[[24]]/8!;s42=s42+x*s43+
x^2*c[[19]]/2+x^3*c[[20]]/6+x^4*c[[21]]/24+x^5*c[[22]]/120+x^6*c[[23]]/720+x^7*c[[2
4]]/5040;
s43=s43+x*c[[19]]+x^2*c[[20]]/2+x^3*c[[21]]/6+x^4*c[[22]]/24+x^5*c[[23]]/120+x^6*c
[[24]]/720;50=sx5[r];
s51=s51+x*s52+x^2*s53/2+x^3*c[[25]]/6+x^4*c[[26]]/24+x^5*c[[27]]/120+x^6*c[[28]]/
720+x^7*c[[29]]/5040+x^8*c[[30]]/8!;
s52=s52+x*s53+x^2*c[[25]]/2+x^3*c[[26]]/6+x^4*c[[27]]/24+x^5*c[[28]]/120+x^6*c[[2
9]]/720+x^7*c[[30]]/5040;
s53=s53+x*c[[25]]+x^2*c[[26]]/2+x^3*c[[27]]/6+x^4*c[[28]]/24+x^5*c[[29]]/120+x^6*c
[[30]]/720; If[ Mod[r,10]==0,Print[ee[r]=Abs[sx1[r]-y1[t]]]
r++]

```

اختبارات عددية: Numerical Tests

نختبر الخوارزمية الشرائحية المقترحة بحل مسألتنا اختبار مختلفين لهما شكل النموذج المقترح نفسه ونقارن النتائج التي توصلنا إليها مع نتائج لطرانق وخوارزميات في مراجع أخرى، نستخدم لغة البرمجة عالية المستوى Mathematica 11 لتنفيذ الخوارزمية المقترحة والحصول على الرسوم البيانية.

المثال(1): لتأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الآتية [10]:

$$u'(x) = f(x) - \left(\int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \right),$$

$$u(0) = 1,$$

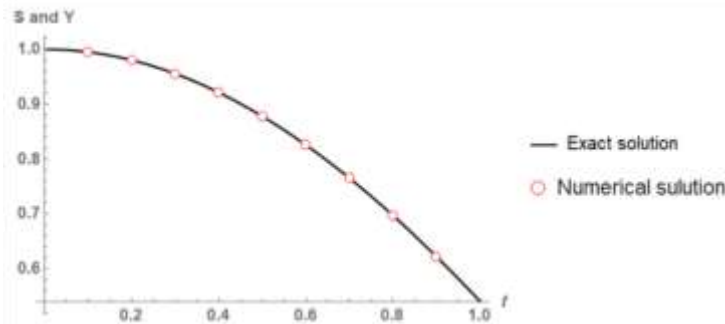
$$0 \leq x \leq 1$$

مع الحل الدقيق $u(x) = \cos(x)$

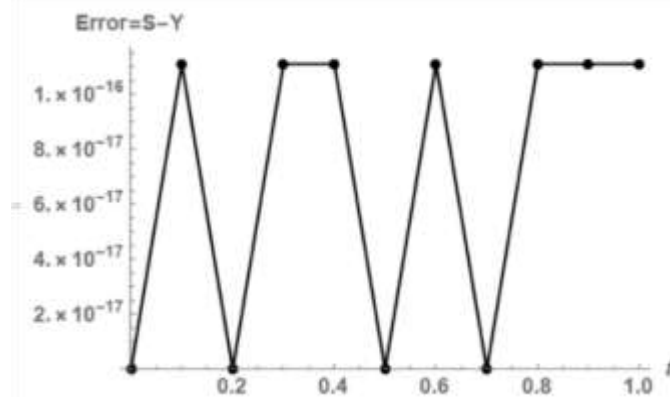
نطبق خوارزمتنا المقترحة لحل المثال أعلاه من أجل أطوال خطوات مختلفة $h = 0.1, 0.025, 0.01$ ونضع في الجدول (1) مقارنات الخطأ المطلق لطريقتنا مع طريقة سيمبسون التكرارية [10]. ونرسم في الشكلين (1)-(2) الحل الشرائحي مع الحل الدقيق والخطأ في الحل الشرائحي.

الجدول(1): مقارنات الأخطاء المطلقة في الحل العددي لخوارزمتنا مع طريقة سيمبسون

X	الخطأ المطلق لطريقة سيمبسون التكرارية			الخطأ المطلق للطريقة الشرائحية		
	$h = 0.1$	$h = 0.025$	$h = 0.01$	$h = 0.1$	$h = 0.025$	$h = 0.01$
0.1	4.99583E-3	1.23347E-3	4.92742E-4	1.110E-16	1.110E-16	3.330E-16
0.2	9.74286E-3	2.42274E-3	9.69158E-4	0	1.110E-16	2.220E-16
0.3	1.42462E-2	3.56771E-3	1.42909E-3	1.110E-16	2.220E-16	4.440E-16
0.4	1.85161E-2	4.66954E-3	1.87288E-3	1.110E-16	0	6.661E-16
0.5	2.25712E-2	5.73176E-3	2.30186E-3	0	2.220E-16	7.771E-16
0.6	2.64430E-2	6.76177E-3	2.71897E-3	2.220E-16	0	6.661E-16
0.7	3.01819E-2	7.77279E-3	3.12960E-3	0	1.110E-16	1.110E-15
0.8	3.38651E-2	8.78614E-3	3.54248E-3	1.110E-16	0	1.221E-15
0.9	3.76048E-2	9.83394E-3	3.97088E-3	1.110E-16	1.1102E-16	9.992E-16
1	4.18856E-2	1.09670E-2	4.43427E-3	1.110E-16	0	9.992E-16



الشكل(1): حل الطريقة الشرائحية مع الحل الدقيق للمثال (1) بخطوة $h = 0.1$.



الشكل(2): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمثال (1) بخطوة $h = 0.1$.

المثال 2:

لنأخذ معادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية [1]:

$$u'(x) + (x^2 + 1)u(x) = f(x) - \left(\int_0^x (x^2 t - t)u(t) dt + \int_0^x (xtu(t) dt) \right)$$

$$u(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

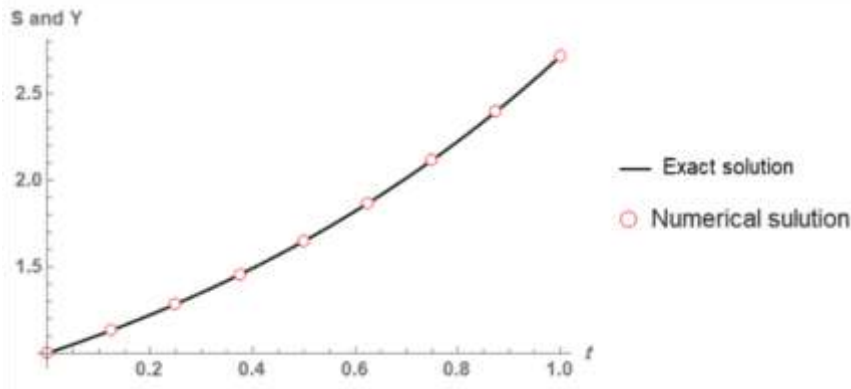
الحل الدقيق:

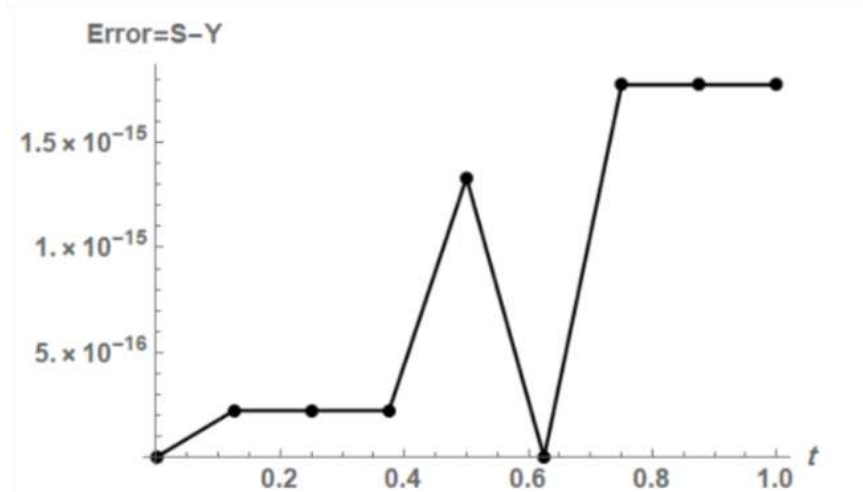
$$u(x) = e^x$$

نطبق خوارزمتنا المقترحة لحل المثال أعلاه من أجل طول خطوة $h=0.125$ ونضع في الجدول (2) مقارنات الخطأ المطلق لطريقتنا مع طريقة لاغرانج المعدلة [1]. ونرسم في الشكلين (4)-(3) الحل الشرائحي مع الحل الدقيق والخطأ في الحل الشرائحي.

الجدول (2): مقارنات الأخطاء المطلقة في حل المثال 2.

X	الخطأ المطلق لطريقة لاغرانج المعدلة [1]	الخطأ المطلق للطريقة الشرائحية
0.125	1.265974325370678E-9	2.220446049250313E-16
0.250	1.452257314404903E-9	-2.220446049250313E-16
0.375	1.671212834786218E-9	2.220446049250313E-16
0.5	1.867390464482810E-9	1.3322676295501878E-15
0.625	2.055702386094538E-9	0
0.750	2.222863337841829E-9	1.7763568394002505E-15
0.850	2.387074760079599E-9	1.7763568394002505E-15
1	2.489904948888011E-9	1.7763568394002505E-15

الشكل (3): الحل الشرائحي مع الحل الدقيق للمثال (2) بخطوة $h=1/8$.



الشكل(4): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمثال (2) بخطوة $h=1/8$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا العمل خوارزمية عددية لإيجاد الحل العددي لنموذج مختلط من معادلات فولتيرا وفريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية ذات النوى المنفصلة. تعتمد الطريقة المقترحة على كثيرات حدود شرائحية من الدرجة التاسعة مع ست نقاط تجميع. تم إجراء اختبار لفعالية ودقة الخوارزمية المذكورة بحل مثالين مختلفين. تم إجراء مقارنات لطريقتنا مع طريقة سمبسون التكرارية في [10] وطريقة لاغرانج المعدلة في [1]، تشير نتائج المقارنات لنتائجنا مع نتائج الطرائق الأخرى في الجداول (1)-(2) إلى تفوق خوارزمتنا حيث الدقة العددية، كما وتبين الأشكال (1)-(4) تقارب الحل العددي من الحل الدقيق على كامل مجال الحل. نظرا لنجاح الطريقة الشرائحية في إيجاد الحل التقريبي لمعادلات فولتيرا-فريدهولم التكاملية-التفاضلية الخطية. نوصي بحل معادلات فولتيرا - فريدهولم التكاملية-التفاضلية المتأخرة.

References:

1. MUSTAFA M. M. and MUHAMMAD M.A, *Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm IntegroDifferential Equations Using Lagrange Polynomials*, Mathematical Theory and Modeling, Vol.4, No.9, 2014.
2. K. Maleknejad, B. Basirat, E. Hashemi zadeh. *A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order rlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 55, pp. 1363-1372, 2012.
3. YALÇINBAS. S and SEZER.M, *The approximate solution of high-order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials*, Applied Mathematics and Computation Vol. 112, pp 291-308, 2000.
4. MALEKNEJAD K, Rohaninasab.N, Ezzati, .R, *Numerical solution of high-order Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Legendre collocation method*. Applied Mathematics and Computation, Vol.328, Pp 171-188, 2018.

5. Roohollahi. A, Ghazanfari. B, Akhavanb.S, *Numerical solution of the mixed Volterra–Fredholm integro-differential multi-term equations of fractional order*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 376, pp 112828, 2020.
6. Hamoud A. A. and Ghadle K. P, *Existence and Uniqueness Results for Fractional Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations*, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 11, No. 3, 2018.
7. Deepmala1, Mishra. V.N, Marasi.HR, Shabanian H and Sahlan. M.N, ONUWE, I.A, *Solution of Voltra-Fredholm Integro-Differential Equations using Chebyshev Collocation Method*, Global Journal of Technology & Optimizatio Volume 8, Issue 1, 1000210, 2017.
8. Shahooth. M.K, Ahmad R.R, Din U-KS, Swidan W, Al-Husseini OK and Shahooth. W.K *Approximation Solution to Solving Linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations of the Second Kind by Using Bernstein Polynomials Method*, Journal of Applied & Computational Mathematics, Vol.5, Issue 2, pp. 100029, 2016.
9. Hamoud A. A., Mohammed N. M, Ghadle. K. P, *Solving Mixed Volterra-Fredholm Integro Differential Equations by Using HAM*, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, Vol. 12 - Issue 1, 2020.
10. H. H. Omran, *Numerical Methods For Solving The First Order Linear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations*, Journal of Al-Nahrain University, Vol. 12, No. 3, pp.139-143, 2009.
11. Maturi D. A and M.Simbawa E. A, *The Modified Decomposition Method For Solving Volterra Fredholm Integro-Differential Equations Using Maple*, International Journal of GEOMATE, Vol.18, Issue 67, pp. 84-89, 2020.
12. Wang K, Wang. Q Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra–Fredholm integral equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 260, pp. 294–300, 2014.
13. Daher H. N., MAHMOUD S. M, Injrou S., *Numerical Solutions of liner Volterra Integro-Differential Equations of second kind by Spline collocation Function*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (41) No. (3) 2019.
14. MAHMOUD S. M., *Spline Function Method for Solving General Nonlinear Third-Order Boundary Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. 43, No 1,2012.