مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

تعميم دالة تنظيم Lasry – Lions
باستخدام مسافة بريغمان

يمار حموي*

(تاريخ الإيداع 19 / 6 / 2014. قُبِل للنشر في 27 / 8 /2014)

ملخّص

يهدف هذا البحث إلى الاستفادة من مسافة بريغمان لتعميم دالة تنظيم Lasry – Lions التي تلعب دوراً هاماً في علم الأمثليات، وذلك باستبدال الشكل التربيعي $\frac{1}{2}\|.\|^2$ بمسافة بريغمان $D_h(.,.)$ (مسافة غير مترية)، وتمّت دراسة بعض خواص هذه الدّالة حيثُ تمَ البرهان على إنّها مستمرة، وأنّ مجموعة حلول مسألة الأمثليات تتطابق مع مجموعة الحلول الصغرى لدالة التنظيم المعمّمة.

الكلمات المفتاحية: مسافة بريغمان، دالة بريغمان، تقريب مورو يوشيدا، دوال المحدبة ، دوال نصف مستمرة من الأدنى، دالة تنظيم Lasry– Lions.

التصنيف الرياضي : 65K10, 90C25, 90C33.

* ماجستير – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

Generalized Lasry – Lions regularization function using Bregman distant

Yamar Hamwi*

(Received 19 / 6 / 2014. Accepted 27 / 8 /2014)

□ ABSTRACT □

The purpose of the research is to study Bergman distance to generalize Lasry – Lions regularization which play important role of theory optimization.

To do that we replace the quardatic additive terms $\frac{1}{2}\|.\|^2$ in Lasry – Lions regularization by more general Bergman distance $D_h(.,.)$(non metric distance), and study properties generalized approximation and proof its continuous as we give a relationship between the solution minimization sets of function and Lions – Lasry Regularization and others properties.

Key words ::Bergman distances, Bergman function, **Moreau-Yosida** approximation, convex functions, lower semi continue functions, Lasry – Lions- Lions regularization.

Mathematics Subject Classification: 90C25, 90C30, 65K10,

*Master, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.

مقدمة:

يلعب علم الأمثليات دوراً هاماً في كثير من جوانب الحياة، فالعديد من مسائل الرياضيات وعلوم الفيزياء يمكن إعادة صياغتها كمسائل أمثليات، فهو نظام رياضي غني ومزدهر يبحث ويهتم بإيجاد النقاط الصغرى(أو النقاط العظمى) لدالة على مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهي أو على الفضاء بأكمله، حيث تأخذ المسألة الشكل:

$$P:\inf\{f(x)\ ;\ x\in X\} \qquad (1.1)$$

من المعروف أنّه ليس بالضرورة أن يكون للمسألة حل إلا ضمن شروط معينة فقد تقبل حلاً وحيداً أو مجموعة من الحلول. لذلك لجأ الرياضيون إلى تنظيم هذه الدوال بطرق عديدة ممّا أسهم في إيجاد النقاط الصغرى ودراسة خواصها.

وأول من درس هذه المسائل العالم الرياضي هاوسدورف وبيير وعممّت من قبل العالمين مورو و يوشيدا، وسميّت بدوال مورو− يوشيدا ذي الدليل λ وأخذت الشكل الآتي:

$$f_\lambda(x):=\inf\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\ \ ;\ \ u\in X\right\} \ (1.2)$$

حيث أسهمت المسألة (1.2) في حل الكثير من المسائل الريّاضية الضّرورية المطروحة للبحث، وتناولها العديد من الرياضين. وفي عام 1986 تمّ تعميم المسألة (1.2) من قبل Lions– Lasry. وأخذت المسألة الشكل :

$$\begin{aligned}(f_\lambda)^\mu(x)&=\sup_{y\in R^n}\inf_{u\in R^n}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|y-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\right\}\\&=\sup_{y\in R^n}\left\{f_\lambda(y)-\frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\right\}\end{aligned}$$

وفي السنوات الأخيرة نظمت المسألة (1.2) باستخدام مسافة بريغمان (وهي دالة حقيقية غير سالبة لا تحقق متراجحة المثلث) من قبل العديد من الرياضيين نذكر منهم [6,8,14] ، وأخذت المسألة الشكل :

$$f_{\lambda h}(u)=\inf_{x\in S}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda}D_h(x,u)\right\} \ (1.3)$$

واستخدمت حديثاً لحل مسائل الأمثليات خصوصاً في تعميم خوارزمية النقطة الأقرب التي شهدت اهتماماً وتطوراً في السنوات القليلة الماضية نذكر على سبيل المثال[9,10].

انطلاقاً من ذلك سوف نقوم بتعميم تنظيم.Lasry – Lions باستخدام مسافة بريغمان واستنتاج بعض الخواص الهامة لها

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى تعميم دالة تنظيم Lasry – Lions باستخدام مسافة بريغمان ودراسة خواصها، وتكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته في نظرية الأمثليات ونظرية التحكم وكذلك يسهم في إيجاد طرق عددية لحل مسائل الأمثليات المحدبة، وستكون هذه الطرق موضوعاً لبحوث قادمة.

طرائق البحث وموارده:

نقدم بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالتحليل المحدب كما نعرض تقريب مورو – يوشيدا وتعريف دالة بريغمان وأهم خواصها التي تساعدنا في معالجة الموضوع.

1– تعاريف ومفاهيم أساسية: نذكّر ببعض عناصر التحليل المحدب (convex analysis) ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى المراجع ة [1,12,13]: بفرض (X,τ) فضاءً تبولوجياً خطياً ، A مجموعة جزئية غير خالية في X و $f:X\longrightarrow R\cup\{+\infty\}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $R\cup\{+\infty\}$.

–تعرّف مجموعة النقاط:

$$[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y \quad : \quad 0\le\lambda\le1\}$$

بالقطعة المستقيمة(segment) الواصلة بين x,y في X.

–يقال عن المجموعة A إنها محدبة إذا أمكن وصل أي نقطتين من نقاطها بقطعة مستقيمة محتواة تماماً في A.

–يقال عن f إنَّها دالة محدبة إذا تحقق الشرط الآتي:

من أجل كل $x,y\in X$ فإنّ:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad \forall\lambda\in[0,1]$$

و يقال عن f إنّها دالة محدبة تماماً إذا كان استبدال إشارة ($\le$) في العلاقة السابقة بإشارة($<$) يبقيها صحيحة.

–يقال عن f إنّها دالة مقعرة (concave function) إذا كانت $(-f)$ دالة محدبة.

إذا كانت f دالة محدبة ومقعرة ،تدعى دالة تآلفية (affine function).

–يقال عن f إنّها دالة نصف مستمرة من الأدنى (Lower Semi Contentions) ويرمز لها بـ (l.s.c) إذا كان

$$\liminf_{y\to x} f(y)\ge f(x).$$

–يقال عن f إنّها دالة نصف مستمرة من الأعلى(upper Semi Contentions) ويرمز لها بـ(s.c.s) إذا كان

$$\limsup_{y\to x} f(y)\le f(x).$$

–يعّرف المجال الفعلي للدالة f ويرمز له $(dom\ f)$ بالعلاقة:

$$dom\, f=\{x\in X \ : \ f(x)<+\infty\}$$

–يقال عن f إنها دالة نوعيّة (proper) إذا كان $dom\ f\ne\phi$.

نرمز لمجموعة الدوال المحدبة والنصف مستمرة من الأدنى والنوعيّة على X بالرمز $\Gamma(X)$.

–نرمز لمجموعة النقاط الأصغريّة للدالة f بالرمز $\arg\min f$ وتعرف بالشكل :

$$\arg\min_X f=\left\{\bar{x}\in X \ : \ f(\bar{x})=\inf_{x\in X} f(x)\right\}$$

يمكن أن تكون هذه المجموعة خالية.

• **مسافة بريغمان ودالة بريغمان:**

تعريف1.1

مسافة بريغمان (Bergman distance): [3,8]

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من R^n مفتوحة ومحدبة، ولتكن $h:\overline{S}\subset R^n \longrightarrow R$

– تعرّف مسافة بريغمان $D_h:\overline{S}\times S\subseteq R^{2n}\longrightarrow[0,+\infty)$ بالعلاقة:

$$D_h(x,y):=h(x)-h(y)-\langle \nabla h(y),x-y\rangle$$

حيث <.,.> الجداء الداخلي المعرف على R^n ، $\nabla h=grad\ h$ متجه التدرج .

–تمّ تعريف دالة بريغمان [8] من قبل Censor و Lent عام1981 التي توفر بيئة مناسبة لدراسة مسافة بريغمان، لكن تبيّن أن بعض الشروط تنتج من بعضها الآخر، لذلك قدّم الباحثون تعريفاً مكافئا أبسط.

تعريف1.2:

دالة بريغمان (Bergman function):

يقال إن hدالة بريغمان على Sإذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

1. h مستمرة ومحدبة تماماً على $\overline{S}$.
2. h قابلة للمفاضلة على S.
3. لكل $x\in\overline{S}$, $\alpha\in R^+$ فإن $R(x,\alpha)=\{y\in S\ :\ D_h(x,y)\le\alpha\}$ محدودة .
4. إذا كانت $(y_k)_{k\in N}\in S$ متقاربة حيث $\lim\limits_{k\to+\infty}y_k=y\in\overline{S}$ فإن $\lim\limits_{k\to+\infty}D_h(y,y_k)=0$.

أمثلة :

1.إذا كانت $S=R^n$, $h=\frac{1}{2}\|.\|^2$ فإنّ $D_h(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2$.

2.إذا كانت $S=R^n_{++}$, $h=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\sqrt{x_i}\right)^2$ فإنّ $D_h(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{y_i}}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{y_i}\right)^2$.

3.إذا كانت $S=]-1,1[^n$, $h=-\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^{\,2}}$ فإن $D_h(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1-x_iy_i}{\sqrt{1-y_i^{\,2}}}-\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^{\,2}}$.

4.إذا كانت $S=R^n_{++}$, $h=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i\log x_i-x_i\right)$ و(باعتبار $0\log 0=0$)، فإن:

$$D_h(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\log\left(x_i/y_i\right)+y_i-x_i\right)$$

• **بعض خواص مسافة ودالة بريغمان:**

• تملك دالة بريغمان الخواص الآتية:

1. $D_h(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in dom\ h$.
2. $x=y$ إذا وفقط إذا $D_h(x,y)=0$.
3. $D_h(x,y)\ne D_h(y,x)$ لكل $x,y\in dom\ h$ و $x\ne y$ أي مسافة بريغمان ليست تناظرية .

4.لا تتحقّق متراجحة المثلث بشكل عام .

5. $\forall x \in \overline{S}, \forall y \in S$ $D_h(x,y)+D_h(y,x)=\langle x-y, \nabla h(x)-\nabla h(y)\rangle$

6.**خاصة النقاط الثلاث:** لكل $x \in \overline{S}$ و $y,z \in S$ يكون

$$D_h(x,y)=D_h(x,z)+D_h(z,y)+\langle x-z, \nabla h(z)-\nabla h(y)\rangle$$

7.**خاصة النقاط الأربع:** لكل $y,v \in S$ و $x,z \in \overline{S}$ يكون

$$D_h(x,y)+D_h(z,v)=D_h(x,v)+D_h(z,y)+\langle x-z, \nabla h(v)-\nabla h(y)\rangle$$

8. $D_h(.,y) \longrightarrow x$دالة مستمرة ونوعيّة.

9. $D_h(.,y) \longrightarrow x$ دالة محدبة تماماً.

10. hقابلة للمفاضلة باستمرار على S.

11. $D_h(.,y) \longrightarrow x$قابلة للمفاضلة على S، حيث$\nabla_x D_h(x,y)=\nabla h(x)-\nabla h(y)$ متجه التدرج $\nabla_x D_h(.,y)=grad\ D_h(.,y)$.

12.لكل $\alpha \in R^+,\ y \in S$ فإن $L(\alpha,y)=\{x \in \overline{S}\ :\ D_h(x,y)\le \alpha\}$ محدودة .

13.ليكن $(x_k)_{k\in N} \in \operatorname{int}(dom\ h)$ محدودة و $(y_k)_{k\in N} \in \operatorname{int}(dom\ h)$، عندئذ إذا كان $\lim_{k\to+\infty} D_h(x_k,y_k)=0$ فإنّ $\lim_{k\to+\infty}\|x_k-y_k\|=0$.

14.إذا كانت $(y_k)_{k\in N} \in S$ متتالية متقاربة ، حيث $\lim_{k\to+\infty} y_k = y_0$ و $(x_k)_{k\in N} \in \overline{S}$متتالية محدودة و $\lim_{k\to+\infty} D_h(x_k,y_k)=0$ فإن $\lim_{k\to+\infty} x_k = y_0$.

نستنتج من الخواص السابقة أنّ مسافة بريغمان ليست مسافة مترية ، ولما كانت $D_h(.,y)$ دالة نصف مستمرة من الأدنى، محدبة ونوعيّة فإن $D_h(.,y)\in\Gamma(S)$.

- **تقريب مورو – يوشيدا(Moreau–Yosida Approximation):**[1]

في (1965) قدّم مورو تعريف دالة تقريب مورو – يوشيدا لدوال محدبة ونصف مستمرة من الأدنى التي تتمتع بخواص أكثر عموميّة من الدّالة f. كما أنّ العديد من الباحثين أسهموا في تطوير هذا المفهوم .

لتكن $f:R^n \longrightarrow R\cup\{+\infty\}$ من $\Gamma(R^n)$، يعرّف تقريب مورو – يوشيدا:

$$f_\lambda : R^n \longrightarrow R\cup\{+\infty\}$$

حيث $\lambda>0$ بالعلاقة:

$$f_\lambda(x)=\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|x-u\|^2\right\} \quad (1.4)$$

ولقد بُرهن في [4] أنّ الدالة f_λ تبلغ حدها الأدنى في نقطة وحيدة و يرمز لها بـ $J_\lambda^f x$، أي أنّ:

$$f_\lambda(x)=f(J_\lambda^f x)+\frac{1}{2\lambda}\|x-J_\lambda^f x\|^2$$

ومن أجل كل $\lambda>0$ وكل $x\in R^n$ يعرّف $J_\lambda^f(x)$ بأنّه المؤثر الحال ذو الدليل λ للدالة f، ويُرهن أنّ:

$$J_\lambda^f(x)=(I+\lambda\partial f)^{-1}(x)$$

حيث I المؤثر المطابق في R^n.

إنّ دالة مورو− يوشيدا والمؤثر الحال يمتلكان عدّة خواص مهمة يجعلهما أكثر استخداماً في نظرية الأمثليات وخاصةً الأمثليات المحدبة، ولهما دور كبير في دراسة المسألة الأصغرية P، حيث f_λ تنظم وتقرّب الدالة f وذلك لأنّ مجموعة الحلول للمسألة P تتطابق مع مجموعة الحلول الصغرى لـ الدالة f_λ على المجموعة المفتوحة S.

- **تقريب مورو – يوشيدا المعمّم (Generalized Moreau−Yosida Approximation):**

في عام (1997) تمَ استبدال الشكل التربيعي في العلاقة (1.4) بمسافة بريغمان من قبل كلاً من Censor,Zenios انظر [8] حيث أخذت الشكل الآتي:

$$f_{\lambda h}(u)=\inf_{x\in\bar{S}}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda}D_h(x,u)\right\}$$

حيث $\lambda>0$ وتدعى دالة تقريب مورو− يوشيدا المعمّمة.

ويعرّف المؤثر الحال المعمّم للدالة f ويرمز له بـ $J_{\lambda h}^f$ بالعلاقة:

$$J_{\lambda h}{}^f(u)=\arg\min_{x\in\bar{S}}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda}D_h(x,u)\right\}$$

ويلعب هذا التقريب المعمّم دوراً هاماً في الخوارزميات التكرارية لحل بعض مسائل الأمثليات، وحساب التغيرات والنقطة الثابتة للمؤثرات ....الخ. وقد درست خواص هذا التقريب المعمَم فبرهنّ أنّ $f_{\lambda h}$ دالة مستمرة بالإضافة للعديد من الخواص المهمّة المبينة في المبرهنات ة:انظر[14]

مبرهنة 1.3 [14]

لتكن $f\in\Gamma\left(R^n\right)$ ولتكن $h:\bar{S}\subset R^n\longrightarrow R$ دالة بريغمان حيث S مجموعة جزئية غير خالية من R^n مفتوحة و محدبة، بفرض أنّ $\inf f>-\infty$ عندئذٍ:

من أجل كل $x\in S$ وكل $\lambda>0$، تبلغ الدالة $u\longrightarrow f(u)+\lambda^{-1}D_h(u,x)$ حدها الأدنى في نقطة وحيدة على $\bar{S}$، أي:

$$f_{\lambda h}(y)=\min_{x\in\bar{S}}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda}D_h(x,y)\right\}=f(J_{\lambda h}y)+\frac{1}{\lambda}D_h(J_{\lambda h}y,y)$$

حيث $J_{\lambda h}$ الحل الأصغري الوحيد.

مبرهنة 1.4 [14]

لتكن $f\in\Gamma\left(R^n\right)$ وبفرض أنّ الدالتّين f و h تحققان شروط المبرهنة 1.2.1، عندئذٍ لكل $\lambda\geq\mu>0$ و كل $y\in S$ يكون:

$$f_{\lambda h}(y)\leq f_{\mu h}(y)\leq f(y) \qquad (i$$

$$\inf_{y\in S}f_{\lambda h}(y)=\inf_{y\in S}f(y) \qquad (ii$$

$$\arg\min_S f_{\lambda h}=\arg\min_S f \qquad (iii$$

مبرهنة 1.5 [14]

بفرض أنّ الدالتّين f و h تحققان شروط المبرهنة 1.2.1، عندئذٍ لكل $y\in S$ يكون:

$$f=\sup_{\lambda>0}f_{\lambda h} \qquad (i$$

$$f(y)=\lim_{\lambda\to 0}f_{\lambda h}(y) \qquad (ii$$

واستخدمت هذه الدالة في مجالات عدة وكان لها الفضل في إيجاد طرق عددية لحل مسألة الأمثليات المحدبة $P:\inf\{f(x)\ ;\ x\in X\}$ واستخدمت في خوارزمية النقطة الأقرب المعمّمة (Generalized Proximal Point Algorithm) [10] المولّدة بمتتاليّة تكرارية تبدأ من نقطة ابتدائية x_0 حيثُ:

$$x_{n+1}\in \arg\min\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda_n}D_h(x,x_n)\right\}$$

و المتتالية $(x_n)_{n\in N}$ تتقارب من $\bar{x}$ حيث $f(\bar{x})=\inf f(x)$.

النتائج والمناقشة:

في عام (1986) قدّم Lasry – Lions تنظيماً للدالة $f:R^n\longrightarrow R\cup\{+\infty\}$ من أجل الدليلين $\mu,\lambda>0$ معرفاً بالعلاقة الآتية:

$$\begin{aligned}(f_\lambda)^\mu(x)&=\sup_{y\in R^n}\inf_{u\in R^n}\left\{f(u)+\frac{1}{2\lambda}\|y-u\|^2-\frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\right\}\\&=\sup_{y\in R^n}\left\{f_\lambda(y)-\frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\right\}\qquad(2.1)\end{aligned}$$

وقد تمّ البرهان في[2] أنَ sup في العلاقة (2.1) يبلغ حده الأعلى في نقطة وحيدة ويرمز لها بـ $J_{\lambda,\mu}(x)$ ويسمى $J_{\lambda,\mu}$ بالمؤثر الحال. وهذا التقريب أفضل من تقريب مورو–يوشيدا، حيث:

$$f_{\lambda h}\le(f_\lambda)^\mu\le f$$

للمزيد انظر Ovcharova(2010) و Attouch(1993).

وفي دراستنا هذه نقوم باستبدال الشكل التربيعي في دالة تنظيم Lasry – Lions بالعلاقة(2.1) بمسافة بريغمان والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}(f_{\lambda h})^\mu(x)&=\sup_{y\in S}\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}\\&=\sup_{y\in R^n}\left\{f_\lambda(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}\qquad(2.2)\end{aligned}$$

وسندرس بعض خواص التنظيم المعمّم من خلال المبرهنات الآتية.

تبين المبرهنة أنَّ sup في العلاقة (2.2) يبلغ حده الأعلى في نقطة وحيدة ويرمز لها بـ $J_{\lambda h,\mu h}(x)$.حيث يسمى $J_{\lambda h,\mu h}$ بالمؤثر الحال المعمّم ، ويعرّف بالشكل:

$$J_{\lambda h,\mu h}(x)=\arg\max_{y\in R^n}\left\{f_\lambda(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

<u>مبرهنة 2.1</u>

لتكن $f\in\Gamma(R^n)$ ، $h:\overline{S}\subset R^n\longrightarrow R$ دالة بريغمان حيثُ S مجموعة جزئية غير خالية من R^n محدبة ومفتوحة، وبفرض أنّ $\inf f>-\infty$ عندئذٍ لكل $\lambda\ge\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\max_{y\in R^{n}}\left\{f_{\lambda}(y)-\frac{1}{\mu}D_{h}(x,y)\right\}=$$
$$=f_{\lambda}\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)-\frac{1}{\mu}D_{h}(x,J_{\lambda h,\mu h}x)$$

حيث $J_{\lambda h,\mu h}x$ الحد االأعلى الوحيد.

البرهان

لدينا

$$f_{\lambda h}(x)=\inf_{y}\left\{f(y)+\frac{1}{\lambda}D_{h}(y,x)\right\}=$$
$$=\inf_{y}\left\{f(y)+\frac{1}{\lambda}\left[h(y)-h(x)-\left\langle\nabla h(x),y-x\right\rangle\right]\right\}=$$
$$=\inf_{y}\left\{f(y)+\frac{1}{\lambda}h(y)-\frac{1}{\lambda}\left\langle\nabla h(x),y\right\rangle\right\}+\frac{1}{\lambda}\left[\left\langle\nabla h(x),x\right\rangle-h(x)\right]=$$
$$=-\frac{1}{\lambda}\sup_{y}\left\{\left\langle\nabla h(x),y\right\rangle-\left(\lambda f+h\right)(y)\right\}+\frac{1}{\lambda}\left[\left\langle\nabla h(x),x\right\rangle-h(x)\right]=$$
$$=-\frac{1}{\lambda}\left(\lambda f+h\right)^{*}\left(\nabla h(x)\right)+\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)$$

ومنه:

$$\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)-f_{\lambda h}(x)=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda f+h\right)^{*}\left(\nabla h(x)\right)$$

وحسب خواص مرافق دالة إذا كانت $f\in\Gamma\left(R^{n}\right)$ فإنَ $f^{*}\in\Gamma\left(R^{n}\right)$ وبالتالي:

$$g(x):=\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)-f_{\lambda h}(x)\in\Gamma\left(R^{n}\right)$$

وحسب تعريف تنظيم Lasry – Lions المعمّم، لدينا

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(y)=\sup_{x}\left\{f_{\lambda h}(x)-\frac{1}{\mu}D_{h}(y,x)\right\}=$$
$$=-\inf_{x}\left\{-f_{\lambda h}(x)+\frac{1}{\mu}D_{h}(y,x)\right\}=$$
$$=-\inf_{x}\left\{-f_{\lambda h}(x)+\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)-\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)+\frac{1}{\mu}D_{h}(y,x)\right\}$$
$$=-\inf_{x}\left\{g(x)-\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)+\frac{1}{\mu}D_{h}(y,x)\right\}$$

لكن حسب خواص مسافة بريغمان لدينا:

$$D_{h}(y,x)=h(y)+h^{*}(\nabla h(x))-\left\langle\nabla h(x),y\right\rangle$$

ومنه:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(y)=-\inf_{x}\left\{g(x)-\frac{1}{\lambda}h^{*}\left(\nabla h(x)\right)+\frac{1}{\mu}\left[h(y)+h^{*}(\nabla h(x))-\left\langle\nabla h(x),y\right\rangle\right]\right\}$$

بوضع $\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}$ نحصل على:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(y)=-\inf_{x}\left\{g(x)+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)h^{*}(\nabla h(x))-\frac{1}{\eta}\left\langle \nabla h(x),\frac{\eta}{\mu}y\right\rangle+\frac{1}{\eta}h(\frac{\eta}{\mu}y)\right\}+\frac{1}{\mu}h(y)\frac{1}{\eta}-h(\frac{\eta}{\mu}y)$$
$$=-\inf_{x}\left\{g(x)+\frac{1}{\eta}D_h(\frac{\eta}{\mu}y,x)\right\}+\frac{1}{\mu}h(y)-\frac{1}{\eta}h(\frac{\eta}{\mu}y)$$

وحسب[5] إذا كانت $g\in\Gamma\left(R^{n}\right)$ فإنّ الدالة $g(.)+\frac{1}{\eta}D_h(y,.)$ تبلغ حدَها الأدنى في نقطة وحيدة. ممّا سبق نجد أن دالة التنظيم تبلغ حدها الأعلى في نقطة وحيدة. ■

<u>مبرهنة 2.2</u>

لتكن $f\in\Gamma\left(R^{n}\right)$ ، $h:\overline{S}\subset R^{n}\longrightarrow R$ دالة بريغمان حيثُ S مجموعة جزئية غير خالية من R^{n} محدبة ومفتوحة، وبفرض أنّ $\inf f>-\infty$ عندئذٍ لكل $\lambda\geq\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون:

$$i)\quad f_{\lambda h}(x)\leq\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x)$$
$$ii)\quad \left(f_{\lambda h}\right)^{\lambda}\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)=f\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)$$

البرهان

i) لدينا

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\sup_{y\in S}\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$
$$=\sup_{y\in S}\left\{f_{\lambda h}(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

بأخذ $y=x$ نحصل على:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f_{\lambda h}(x)$$

من ناحية أخرى

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\sup_{y\in S}\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

بأخذ $u=x$ نحصل على:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq\sup_{y\in S}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda}D_h(x,y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

وبما أنّ $\lambda\geq\mu$ يكون $\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\leq 0$، بأخذ $x=y$ نحصل على $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x)$.

ii) حسب تعريف دالة التنظيم المعمّمة لدينا:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\lambda}\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)=\sup_{x\in S}\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,x)-\frac{1}{\lambda}D_h\left(J_{\lambda h,\mu h}x,x\right)\right\}=$$

$$=\sup_{y\in S}\left\{f\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)+\frac{1}{\lambda}D_h\left(J_{\lambda h,\mu h}x,x\right)-\frac{1}{\lambda}D_h\left(J_{\lambda h,\mu h}x,x\right)\right\}=f\left(J_{\lambda h,\mu h}x\right)$$

مثال :

لتكن الدّالة $f:R\longrightarrow R$ المعرّفة بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases}-|x| & ;|x|\le 1\\ |x|-2 & ;|x|\ge 1\end{cases}$$

ولتكن دالة بريغمان $h:R\longrightarrow R$ المعرّفة بالشكل:

$$h(x)=\frac{1}{2}|x|^2$$

وبحساب بسيط نجد أنّ:

$$f_{\lambda h}(x)=\begin{cases}-|x|-\dfrac{\lambda}{2} & ;|x|\le 1-\lambda\\ -1+\dfrac{\left(|x|-1\right)^2}{2\lambda} & ;1-\lambda\le|x|\le 1+\lambda\\ |x|-2-\dfrac{\lambda}{2} & ;|x|\ge 1+\lambda\end{cases}$$

ويكون

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{|x|^2}{2\mu} & ;|x|\le\mu\\ -|x|-\dfrac{\lambda-\mu}{2} & ;\mu\le|x|\le 1-(\lambda-\mu)\\ -1+\dfrac{\left(|x|-1\right)^2}{2(\lambda-\mu)} & ;1-(\lambda-\mu)\le|x|\le 1+(\lambda-\mu)\\ |x|-2-\dfrac{\lambda-\mu}{2} & ;|x|\ge 1+(\lambda-\mu)\end{cases}$$

وتبين المبرهنة الآتية أنّ دالة التنظيم المعمّمة مستمرة ونوعية.

مبرهنة 2.3

بفرض f,h يحققان شروط المبرهنة 2.1 عندئذٍ لكل $\lambda\ge\mu>0$ تكون دالة التنظيم المعمّمة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ مستمرة على Sونوعية.

البرهان

لنبرهن أنّ $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نوعية.

من المبرهنة 2.2 لدينا $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le f(x)$ لكل $x\in S$ وبما أنّ f دالة نوعية نجد $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ دالة نوعية.

لنبرهن أنّ الدالة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نصف مستمرة من الأدنى.

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\sup_{y\in S}\inf_{u\in S}\left\{f(u)+\frac{1}{\lambda}D_h(u,y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$
$$=\sup_{y\in S}\left\{f_{\lambda h}(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

بما أنّ الدالة $f_{\lambda h}$ مستمرة، وحسب خواص مسافة بريغمان $D_h(x,.)$ دالة مستمرة، وبالتالي الدالة

$$\Psi(y)=f_{\lambda h}(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)$$

مستمرة. أي الدالة Ψ نصف مستمرة من الأدنى، وبالتالي

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\sup_{y\in S}\left\{f_{\lambda h}(y)-\frac{1}{\mu}D_h(x,y)\right\}$$

نصف مستمرة من الأدنى (انظر[13]).

لنبرهن أنّ الدالة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نصف مستمرة من الأعلى.

ليكن $x_{\varepsilon}\in S$ متعلقاً بـ $\varepsilon>0$ ويحقق:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f_{\lambda h}(x_{\varepsilon})-\frac{1}{\mu}D_h(x,x_{\varepsilon})\geq\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)-\varepsilon$$

وبالتالي:

$$f_{\lambda h}(x_{\varepsilon})\geq\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)-\varepsilon+\frac{1}{\mu}D_h(x,x_{\varepsilon})\qquad(2.3)$$

ليكن $\bar{x}\in S$ ، حسب تعريف دالة التنظيم لدينا:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(\bar{x})\geq f_{\lambda h}(x_{\varepsilon})-\frac{1}{\mu}D_h(\bar{x},x_{\varepsilon})\qquad(2.4)$$

بالمقارنة بين (2.3) و (2.4) نحصل على:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(\bar{x})\geq\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)-\varepsilon+\frac{1}{\mu}D_h(x,x_{\varepsilon})-\frac{1}{\mu}D_h(\bar{x},x_{\varepsilon})$$

ومنه:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(\bar{x})+\varepsilon+\frac{1}{\mu}\left[D_h(\bar{x},x_{\varepsilon})-D_h(x,x_{\varepsilon})\right]\qquad(2.5)$$

وبحسب خاصة النقاط الثلاث التي تتمتع بها مسافة بريغمان، لكل $s,t,u\in R^n$، يكون لدينا:

$$D_h(u,s)=D_h(t,s)+D_h(u,t)+<\nabla h(t)-\nabla h(s),u-t>\qquad(2.6)$$

نضع $u=\bar{x}\quad,\quad t=x\quad,\quad s=x_{\varepsilon}$ في العلاقة (2.3) فنحصل على:

$$D_h(\bar{x},x_{\varepsilon})=D_h(x,x_{\varepsilon})+D_h(\bar{x},x)+<\nabla h(x)-\nabla h(x_{\varepsilon}),\bar{x}-x>$$

وبالتالي

$$D_h(\bar{x},x_{\varepsilon})-D_h(x,x_{\varepsilon})=D_h(\bar{x},x)+<\nabla h(x)-\nabla h(x_{\varepsilon}),\bar{x}-x>\qquad(2.7)$$

نعوض (2.7) في (2.5) فنحصل على:

$$\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\left(\overline{x}\right)+\varepsilon+\frac{1}{\mu}\left[D_h(\overline{x},x)+<\nabla h(x)-\nabla h(x_{\varepsilon}),\overline{x}-x>\right] \qquad (2.8)$$

حسب تعريف دالة بريغمان $\lim\limits_{x\to\overline{x}} D_h(\overline{x},x)=0$ ، بجعل $\varepsilon\to 0$ وأخذ $\lim\sup$ للطرفين عندما $\overline{x}\to x$ في العلاقة (2.8) نحصل على:

$$\limsup_{x\longrightarrow\overline{x}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\left(\overline{x}\right)$$

ومنه $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نصف مستمرة من الأعلى. ممّا سبق نجد أنّ الدالة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ مستمرة على S .

تبيَن المبرهنة الآتية أنّ الحد الأدنى للدالة f يتطابق مع الحد الأدنى لدالة التنظيم المعمّمة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ على مجموعة مفتوحة S. كما تبيّن العلاقة بين مجموعة الحلول الأصغرية لدالة f وبين الحلول الأصغرية لـ $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$.

مبرهنة 2.4

بفرض f,h يحققان شروط المبرهنة 2.1 عندئذٍ لكل $\lambda\ge\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\inf_{x\in S} f(x) \qquad (i$$

$$\arg\min_S\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}=\arg\min_S f \qquad (ii$$

البرهان

i) حسب المبرهنة 2.1 لكل $\lambda\ge\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le f(x)$ ، ومنه:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le\inf_{x\in S} f(x) \qquad (2.9)$$

من جهة ثانية حسب المبرهنة 2.2 لدينا $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\ge f_{\lambda h}(x)$ ، ومنه:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\ge\inf_{x\in S} f_{\lambda h}(x)$$

لكن حسب خواص تقريب مورو يوشيدا المعمّم باستخدام مسافة بريغمان لدينا $\inf_{x\in S} f(x)=\inf_{x\in S} f_{\lambda h}(x)$ ومنه نجد:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\ge\inf_{x\in S} f(x) \qquad (2.10)$$

من (2.9) و (2.10) ينتج أنّ:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\inf_{x\in S} f(x)$$

ii) حسب المبرهنة 2.2 لكل $\lambda\ge\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\le f(x)$ ، وبالتالي:

$$\arg\min_S\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\supseteq\arg\min_S f \qquad (2.11)$$

لكل $\overline{x}\in\arg\min_S\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ يكون $\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\left(\overline{x}\right)$ ، وحسب المبرهنة 2.2 نحصل على:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\left(\overline{x}\right)\ge f_{\lambda h}\left(\overline{x}\right)\ge\inf_{x\in S} f_{\lambda h}(x)$$

وحسب خواص تقريب مورو يوشيدا المعمّم لدينا $\inf_{x\in S} f(x)=\inf_{x\in S} f_{\lambda h}(x)$ وبالتالي:

$$\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\left(\bar{x}\right)\geq f_{\lambda h}\left(\bar{x}\right)\geq\inf_{x\in S}f_{\lambda h}(x)=\inf_{x\in S}f(x)$$

لكن حسب الجزئية i) من هذه المبرهنة لدينا $\inf_{x\in S}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=\inf_{x\in S}f(x)$، وبالتالي $\bar{x}\in \underset{S}{arg\,min}\, f_{\lambda h}$.

وبما أنّ $\bar{x}$ عنصر كيفي من $\underset{S}{arg\,min}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نحصل على:

$$\underset{S}{arg\,min}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\subseteq \underset{S}{arg\,min}\, f_{\lambda h}$$

وحسب خواص مورو يوشيدا المعمّم لدينا $\underset{S}{arg\,min}\, f_{\lambda h}=\underset{S}{arg\,min}\, f$، وبالتالي:

$$\underset{S}{arg\,min}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}\subseteq \underset{S}{arg\,min}\, f \qquad (2.12)$$

من (2.11) و (2.12) ينتج أنّ:

$$\underset{S}{arg\,min}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}=\underset{S}{arg\,min}\, f$$

<u>مبرهنة 2.5</u>

بفرض $f\,,h$ يحققان شروط المبرهنة 2.1 عندئذٍ لكل $\lambda\geq\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون:

$$\lim_{\substack{(\lambda,\mu)\to(0,0)\\ \lambda\geq\mu}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=f(x) \qquad (i$$

$$\sup_{\lambda\geq\mu>0}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=f(x) \qquad (ii$$

البرهان

i) حسب المبرهنة 2.1 لكل $\lambda\geq\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x)$، ومنه:

$$\lim_{\substack{(\lambda,\mu)\to(0,0)\\ \lambda\geq\mu}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x) \qquad (2.11)$$

من جهة أخرى لدينا حسب المبرهنة 2.1 من أجل $\lambda\geq\mu>0$ أنّ $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f_{\lambda h}(x)$، ومنه:

$$\lim_{\substack{(\lambda,\mu)\to(0,0)\\ \lambda\geq\mu}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq \lim_{\lambda\to 0}f_{\lambda h}(x)$$

وحسب خواص تقريب مورو يوشيدا المعمّم لدينا $\lim_{\lambda\to 0}f_{\lambda h}(x)=f(x)$، وبالتالي:

$$\lim_{\substack{(\lambda,\mu)\to(0,0)\\ \lambda\geq\mu}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f(x) \qquad (2.12)$$

من (2.11) و (2.12) ينتج أنّ:

$$\lim_{\substack{(\lambda,\mu)\to(0,0)\\ \lambda\geq\mu}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=f(x)$$

ii) حسب المبرهنة 2.1 لكل $\lambda\geq\mu>0$ وكل $x\in S$ يكون $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x)$، ومنه:

$$\sup_{\lambda\geq\mu>0}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\leq f(x) \qquad (2.13)$$

من جهة أخرى لدينا حسب المبرهنة 2.1 من أجل $\lambda\geq\mu>0$ أنّ $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f_{\lambda h}(x)$، ومنه:

$$\sup_{\lambda\geq\mu>0}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq \sup_{\lambda>0}f_{\lambda h}(x)$$

وحسب خواص تقريب مورو يوشيدا المعمّم لدينا $\sup\limits_{\lambda>0} f_{\lambda h}(x)=f(x)$، وبالتالي:

$$\sup_{\lambda\geq\mu>0}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)\geq f(x) \qquad (2.14)$$

من (2.13) و (2.14) ينتج أنّ:

$$\sup_{\lambda\geq\mu>0}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=f(x)$$

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا خواص دالة تنظيم المعمّمة Lasry – Lions باستخدام مسافة بريغمان وتوصلنا إلى بعض النتائج الهامة، ومن بينها أنّ دالة التنظيم مستمرة، كما أثبتنا $\lim\limits_{\substack{\lambda\geq\mu \\ (\lambda,\mu)\to(0,0)}}\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}(x)=f(x)$ ونظراً لأهمية الدالة $\left(f_{\lambda h}\right)^{\mu}$ نوصي بتعميم النتائج التي توصلنا إليها في فضاءات غير منتهية البعد.

المراجع:

[1] ATTOUCH, H.: *Variational convergence for functions and operators* , Pitman,London (1984), 120-264.

[2] ATTOUCH, H.; AZE, D.: Approximation and regularization of arbitrary functions in Hilbert space by the Lasry-Lions method, Ann. Inst. Henri Poincare 10(3) (1993), pp. 289–312.

[3] BAUSCHKE, H. H. ; BORWEIN,J.M. *: Legendre functions and the method of random Bregman projections* .Journal of Convex Analysis 4 (1997) 27-67.

[4] BAUSCHKE, H. H. ; BORWEIN, J. M. ; COMBETTES, P. L. *:Bregman monotone optimization Algorithms*, SIAM J. Control Optim, vol. 42, pp. 596–636, 2003

[5] BAUSCHKE, H. H., COMBETTES, P. L , NOLL, D.*: Joint minimization with alternating Bregman proximity operators*, Pacific J. Optim. 2 (2006), 401–424.

[6] BAUSCHKE, H.H., WANG, X.F., Ye, J. Yuan, X.M.*: Bregman distances and Chebyshev sets*, J. Approx. Theory 159 (2009) 3–25.

[7] BREGMAN, L. M.: *The relaxation method of finding the common point of* convex sets and *Its application to the solution of problems in convex programming*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics , (1967), vol. 7, pp. 200–217.

[8] CENSOR, Y.; ZENIOS, S.*: Parallel Optimization: Theory, Algorithms and Applications*, Oxford University Press, New York (1997).

[9] LANGENBERG, N.: *Pseudomonotone operators and the Bregman proximal point algorithm*. J.Global Optim. 47(4), 537–555 (2010).

[10]LANGENBERG,N.; TICHATSCHKE,R.: *Interior proximal methods for quasiconvex optimization.* J. Global Optim (2012) 52:641–661.

[11] OVCHAROVA,N: Second-order analysis of the Moreau–Yosida and the Lasry–Lions regularizations Optimization Methods & Software Vol. 25, No. 1, February 2010, 109–116

[12] ROCKAFELLAR, R.T. *: convex Analysis* . Princeton University Press, Princeton N. J (1970).

[13] ROCKAFELLAR, R.T.; WETS, R. :*Variational analysis* . 2en, Springer, New York,(2004) , 10-212.

[14]SOUEYCATT,M; HAMWI,Y.:*Generalized Moreau–Yosida Approximation.* J.for Research and Scientific studies-Basic Sciences. Series,(2013).