مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

طريقة شرائحية بخمس نقاط تجميع لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الجبرية الخطية عالية الدليل

الدكتور سليمان محمد محمود*
الدكتور محسن الحسن**
بشار جديد***

(تاريخ الإيداع 28 / 4 / 2014. قُبِل للنشر في 13 / 7 /2014)

ملخّص

تم في هذا البحث تقديم طريقة عددية لحل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية ذات أدلة عالية. تعتمد الطريقة على تقريب دالة الحل بكثيرة حدود شرائحية من الدرجة الثامنة واستخدام خمس نقاط تجميع لإيجاد الحل العددي في كل خطوة. تبين الدراسة أن الطريقة تكون مستقرة ومتقاربة من الرتبة الثامنة عند تطبيقها لحل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية الخطية دليلها يساوي الواحد. وبشكل عام، عند تطبيق الطريقة لمنظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية دليلها u تكون مستقرة ومتقاربة من الرتبة $9-u$.

وقد تم اختبار فعالية الطريقة المقدمة بحل أربع مسائل ذات أدلة مختلفة حيث تشير النَتائِج العددية إلى فعالية وكفاءة الطريقة الشرائحية المقدمة بالمقارنة مع بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: أنظمة تفاضلية جبرية، دليل عال، كثيرة حدود شرائحية ،نقاط تجميع، الخطأ المقتطع، مرتبة التقارب.

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
**مدرس – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.
***طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

Spline Method with Five Collocation Points for Solving Systems of High-Index Linear Differential Algebraic Equations

Dr. Suliman M. Mahmood*
Dr. Mohsen Al-Hasan**
Bashar Gdeed***

(Received 28 / 4 / 2014. Accepted 13 / 7 /2014)

□ ABSTRACT □

In this paper, we introduce a numerical method for solving systems of high-index differential algebraic equations. This method is based on approximating the exact solution by spline polynomial of degree eight with five collocation points to find the numerical solution in each step. The study shows that the method when applied to linear differential-algebraic systems with index equal one is stable and convergent of order 8, while it is stable and convergent of order 9-u for index equal u .

Numerical experiments for four test examples and comparisons with other available results are given to illustrate the applicability and efficiency of the presented method.

Key Words: Differential-Algebraic Systems, Higher-Index, Spline Polynomial, Collocation Points, Truncation Error, Order of Convergence.

* **Associate Prof, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
** **Assistant Prof, Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
*** **Postgraduate student, Dept. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تنشأ المعادلات التفاضلية الجبرية في العديد من الفروع التطبيقية والعلمية نذكر على سبيل المثال هندسة الميكانيك – الكهرباء . الإلكترون . الديناميك الآلي . ديناميك السيارات وأنظمة الشبكات الكهربائية وأنظمة توزيع المياه والمسائل الفيزيائية والكيميائية. سنعالج في هذا البحث طريقة شرائحية تعتمد على خمس نقاط تجميع لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجبرية ذات دليل عال. يعدّ دليل المعادلة التفاضلية الجبرية مقياساً لصعوبتها ولهذا السبب نجد أن بعض الطرائق العددية تفشل في إيجاد الحلول العددية وبعضها الآخر يقدم حلولاً عددية منخفضة الدقة خاصة عندما يزيد دليل هذه المعادلات عن الواحد.

كرست مؤخرا الكثير من الدراسات والأبحاث لتطوير طرائق عددية لحل منظومات المعادلات التفاضلية الجبرية بأدلة مختلفة بدءا من الدليل واحد وحتى أربعة [1].

لقد أظهرت الدراسات في [1] أن التقريب المباشر لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجبرية الضمنية يمكن انجازه بشكل مقبول باستخدام طرائق رانج–كوتا الضمنية ولكن بدليل يساوي الواحد. قُدِمتْ بعد ذلك طرائق مطورة لحل المسألة المقدّمة لأجل أدلة أكبر من الواحد، فكانت طرائق الانتظام المتتالي[4] طريقة التجاور[5] وطريقة التصحيح التراجعي التي تعمل على تخفيض الدليل إلى الصفر[6]. قدمت بعد ذلك طرائق استخدمت كثيرات حدود خاصة لتقريب الحل مثل طريقة تحليل أدوميان اعتمدت على كثيرات حدود أدوميان [7]، طريقة كثيرات حدود تسيبتشيف [8]، وطرائق تستخدم كثيرات حدود هرميت الشرائحية في الفضاء C^2 [9]. في [10] قدم Al–Masaeed and Jaradat طريقة تحويلات لابلاس لإيجاد الحل التحليلي للمسألة على شكل سلاسل كثيرات حدود لانهائية. في [11] قدم Ramezani وآخرون طريقة التفاضل التربيعي التي يتم تطبيقها بعد تخفيض دليل المسألة إلى مرتبة أدنى. تم حل مسألة هيسنيرغ بدليل–3 بطريقة تكرار المتغير[12] وطريقة تقريبات بادي[13].

يعرّف الشكل العام لمنظومة المعادلات التفاضلية الجبرية الضمنية كالآتي:

$$(1)\; F(t,\, y,\, y') = 0, \qquad t \in [a,b]$$

حيث $F : \Re \times \Re^m \times \Re^m \to \Re^m$ هي دالة معطاة، و $\Re$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

إذا كانت مصفوفة جاكوبي $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ للدالة F غير شاذة عندئذ تؤول المنظومة (1) إلى منظومة من المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق، ويمكن كتابتها بالشكل الصريح كالآتي:

$$y' = f(t,\, y) \qquad (2)$$

حيث إنّ $t \in \Re,\, y \in \Re^m$.

كما تُعرّف منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية الخطية غير المتجانسة بالشكل:

$$\mathbf{A}\, y' + \mathbf{B}\, y = g(t), \qquad t \in [a,b] \qquad (3)$$

وهي ذات دليل يساوي ν، حيث **A** و **B** مصفوفتان مربعتان ثابتتان و $g(x)$ دالة ملساء.

تعريف(1) (دليل المعادلة التفاضلية الجبرية)

نظرا لكون المعادلة التفاضلية الجبرية تشتمل على خليط من معادلات تفاضلية و معادلات جبرية، عندئذ يعرف دليل المعادلة التفاضلية الجبرية بأنه أصغر عدد من التفاضلات التي تتطلبها منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية

الشكل (1) لتحويلها إلى منظومة تفاضلية عادية صريحة من الشكل(2) أي الحصول على منظومة معادلات تفاضلية عادية محلولة بالنسبة للمشتق

صيغ خاصة للمعادلات التفاضلية الجبرية[13]:

يوجد بعض الصيغ الشهيرة للمعادلة التفاضلية الجبرية تدعى بصيغ هيسنبيرغ وهي تختلف بالأدلة ويمكن تقديم بعض منها كما يلي:

- **صيغة هيسنبيرغ (Hessenberg) بدليل-1**

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,z), \\ 0 &= g(t,x,z)\ . \end{aligned} \qquad (4)$$

يشترط أن تكون مصفوفة جاكوبي للدالة g_z غير شاذة مهما تكن $\boldsymbol{t}$. و تدعى العلاقات (4) بالمنظومة شبه الصريحة.

- **صيغة هيسنبيرغ (Hessenberg) بدليل-2**

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,z), \\ 0 &= g(t,x)\ . \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث إن جداء مصفوفتي جاكوبي $g_x f_z$ للدالتين غير شاذ مهما تكن t.

- **صيغة هيسنبيرغ (Hessenberg) بدليل-3**

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,y,z), \\ y' &= g(t,x,y), \\ 0 &= h(t,y)\ . \end{aligned} \qquad (6)$$

يشترط أن يكون جداء مصفوفات جاكوبي $h_x g_x f_z$ للدوال الثلاث f, g, h غير شاذ.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بأنه يتناول منظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية الخطية ذات أدلة عالية والتي تمثل نماذج رياضية للكثير من المسائل في العلوم المختلفة. فمعظم الطرائق العددية تنخفض دقتها أو تفشل في إيجاد حلول عددية مستقرة لمثل هذه المنظومات خاصة وأن صعوبتها تقاس بارتفاع أدلتها. لهذا نهدف لتقديم طريقة شرائحية فعالة لإيجاد الحلول العددية للمنظومات المذكورة ودراسة واستقرار الطريقة وتقاربها وتحديد الخطأ المرتكب في الحل العددي.

طرائق البحث ومواده:

نقدم في هذا البحث طريقة عددية ذات صيغة تكرارية تعتمد على تقريب دالة الحل للمسألة المقدّمة بكثيرة حدود شرائحية من الدرجة الثامنة واستخدام خمس نقاط تجميع عند كل تكرار. عندما يتم تطبيق الطريقة على المسألة ينتج عنها متتالية من النتائج العددية تعطي الحل التقريبي لمنظومات المعادلات التفاضلية الجبرية ذات دليل عال. وللتحقق من وجود الحل العددي واستقراره، يتم إجراء دراسة تحليلية للطريقة بتطبيقها على منظومات من المعادلات ذات أدلة

مختلفة، فيُدْرسُ استقرارها وتقاربها، ويحدد مرتبة الخطأ النتائج عند كل تكرار، ويحدد أيضا الخطأ الشامل على طول مجال الحل. تختبر الطريقة الشرائحية بحل عدد من مسائل الاختبار التي تبين فعاليتها عندما تطبق لحل منظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية الخطية ونقترح مسألة للحل ذات دليل يساوي 5.

النتائج والمناقشة:

- **صياغة الطريقة الشرائحية**

لحل المسألة (3) نستخدم تجزئة منتظمة: $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ للمجال $[a,b]$، حيث $t_i = a + i\,h$، $i = 0(1)n$ ، و $h = (b-a)/n$ طول الخطوة.

تستخدم الطريقة الشرائحية نقاط التجميع الخمس التالية:

$$t_{k+z_j} = t_k + z_j h,\ \ j = 1(1)5 \tag{7}$$

في كل مجال جزئي $\mathrm{I}_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0(1)n\text{-}1,$ ، مع خمسة وسطاء :

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \tag{8}$$

نعرف كثيرة حدود شرائحية من الدرجة الثامنة في كل مجال جزئي I_i كالآتي:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{3} \frac{(t-t_k)^i}{i!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^{8} \frac{(t-t_k)^j}{j!} C_{k,\,j-3} \quad ,t \in [t_k, t_{k+1}],\quad k = 0,...,n-1 \tag{9}$$

حيث $S^{(i)}(a) = S_0^{(i)} = y_0^{(i)},\ (i = 0,1,2,3)$ هي القيم الابتدائية لدالة الحل $y(t)$ وهي قيم معلومة من شروط البدء، و $S_k^{(i)}$ هي القيمة التقريبية للمشتق من الدرجة i لكثيرة الحدود الشرائحية عند t_k ، و $C_{k,\,j-3}$ هي مجاهيل يطلب تعيينها.

وباشتقاق العلاقة (9) بالنسبة لـ t نحصل على:

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{(t-t_k)^{i-1}}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=4}^{8} \frac{(t-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} C_{k,\,j-3} \quad ,t \in [t_k, t_{k+1}],\quad k = 0,...,n-1 \tag{10}$$

وبتطبيق الشرائح (8)−(9) مع نقاط التجميع(7) على منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية (3)، ينتج:

$$\mathbf{A}\, S'(t_{k+z_j}) + \mathbf{B}\, S(t_{k+z_j}) = g(t_{k+z_j}),\ j = (1)4\ ,\quad k = 0(1)\mathrm{n}\text{-}1 \tag{11}$$

وهي خاضعة للشروط الابتدائية:

$$S_0^{(i)} = y_0^{(i)},\ (i = 0,1,2,3) \tag{12}$$

لتسهيل الدراسة التحليلية يمكن إجراء تحويل بسيط باستخدام خصائص تشابه المصفوفات لفصل الجزئين التفاضلي والجبري في المنظومة (3)، وهذا يقدم فهماً واضحاً للمعادلة التفاضلية الجبرية الخطية بدءا من الدليل 1 وحتى v وهي الحالة العامة [2]. لهذا سنجري دراستنا على المنظومة التفاضلية الجبرية الخطية ذات الدليل−u التالية:

$$M\,y' + y = g(t) \tag{13}$$

حيث M هي مصفوفة من المرتبة $u\times u$ ، و $g(t)=(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_u(t))^T$ ، $y(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\ \cdots,\ y_u(t))^T$.

يعطى حل الجملة (13) بالشكل [9]:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(t)\\
y_2(t) &= g_2(t)-y_1'(t)\\
&\vdots\\
y_u(t) &= g_u(t)+\sum_{i=1}^{u-1}(-1)^{u-i}\,y_i^{(u-i)}(t).
\end{aligned}
$$

بتطبيق الطريقة الشرائحية (11)−(12) على منظومة المعادلات الجبرية (13)، فنحصل على:

$$M\,S'(t_{k+z_j})+S(t_{k+z_j})=g(t_{k+z_j})\ ,\ j=1(1)5\ ,\ k=0(1)n\text{-}1 \tag{14}$$

حيث : $S'=(S'_1,\ldots,\ S'_u)^T,\ S=(S_1,\ldots,\ S_u)^T$.

الطريقة الشرائحية لأجل دليل−1

سيتم تطبيق الطريقة على منظومة معادلات جبرية بدليل يساوي الواحد، عندئذ تؤول الجملة (14) إلى منظومة المعادلات الجبرية التالية:

$$S_1(t_{k+z_j})=g_1(t_{k+z_j})\ ,\quad j=1(1)5\quad ,\quad k=0(1)n\text{-}1 \tag{15}$$

وباستخدام التقريب الشرائحي (9) في النقاط التجميعية $t_{k+z_j}=t_k+h\ z_j$ تأخذ العلاقة (15) الشكل:

$$
\begin{aligned}
&S_{1,k}+(h z_j)S'_{1,k}+\frac{(h z_j)^2}{2!}S''_{1,k}+\frac{(h z_j)^3}{3!}S'''_{1,k}+\frac{(h z_j)^4}{4!}C_{k,1}+\frac{(h z_j)^5}{5!}C_{k,2}+\\
&\frac{(h z_j)^6}{6!}C_{k,3}+\frac{(h z_j)^7}{7!}C_{k,4}\,\frac{(h z_j)^8}{8!}C_{k,5}=g_1(t_{k+z_j})\ ,\ j=1(1)5,\ k=0(1)n-1
\end{aligned}
\tag{16}
$$

نعيد كتابتها بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$A_1\,\overline{C}_{1,k}+\overline{S}_{1,k}=\overline{G}_{1,k}\quad ,\ k=0,1,\ldots,n-1 \tag{17}$$

حيث

$$
A_1=\begin{bmatrix}
\frac{h^4 z_1^4}{4!} & \frac{h^5 z_1^5}{5!} & \frac{h^6 z_1^6}{6!} & \frac{h^7 z_1^7}{7!} & \frac{h^8 z_1^8}{8!}\\
\frac{h^4 z_2^4}{4!} & \frac{h^5 z_2^5}{5!} & \frac{h^6 z_2^6}{6!} & \frac{h^7 z_2^7}{7!} & \frac{h^8 z_2^8}{8!}\\
\frac{h^4 z_3^4}{4!} & \frac{h^5 z_3^5}{5!} & \frac{h^6 z_3^6}{6!} & \frac{h^7 z_3^7}{7!} & \frac{h^8 z_3^8}{8!}\\
\frac{h^4 z_4^4}{4!} & \frac{h^5 z_4^5}{5!} & \frac{h^6 z_4^6}{6!} & \frac{h^7 z_4^7}{7!} & \frac{h^8 z_4^8}{8!}\\
\frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!}
\end{bmatrix},\quad
\overline{C}_{1,k}=\begin{bmatrix} C_{k,1}\\ C_{k,2}\\ C_{k,3}\\ C_{k,4}\\ C_{k,5}\end{bmatrix},\quad
\overline{G}_{1,k}=\begin{bmatrix} g_1(t_{k+z_1})\\ g_1(t_{k+z_2})\\ g_1(t_{k+z_3})\\ g_1(t_{k+z_4})\\ g_1(t_{k+1})\end{bmatrix},
$$

$$\overline{S}_{1,k}=\begin{bmatrix} S_{1,k}+(h\,z_1)S'_{1,k}+\frac{h^2\,z_1^2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^3\,z_1^3}{3!}S'''_{1,k}\\ S_{1,k}+(h\,z_2)S'_{1,k}+\frac{h^2 z_2^2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^3\,z_2^3}{3!}S'''_{1,k}\\ S_{1,k}+(h\,z_3)S'_{1,k}+\frac{h^2\,z_3^2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^3\,z_3^3}{3!}S'''_{1,k}\\ S_{1,k}+(h\,z_4)S'_{1,k}+\frac{h^2\,z_4^2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^3\,z_4^3}{3!}S'''_{1,k}\\ S_{1,k}+(h)S'_{1,k}+\frac{h^2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^3}{3!}S'''_{1,k} \end{bmatrix}.$$

إن المنظومة (17) قابلة للحل دائما من أجل $0<z_1<z_2<z_3<z_4<z_5=1$ ويمكن تعيين المجاهيل $\overline{C}_{1,k}$ وبالتالي الحل العددي في كل مجال جزئي $[t_k,t_{k+1}]$ لأن المصفوفة A_1 غير شاذة حيث نجد أن:

$$Det(A_1)=\frac{(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)(z_4-1)(z_1z_2z_3z_4)^4(z_1-z_2)(z_1-z_4)(z_2-z_4)(z_4-z_1)(z_2-z_3)(z_4-z_3)h^{30}}{4213820620800000}\neq 0$$

الطريقة الشرائحية لأجل دليل-2

الآن، سنطبق الطريقة الشرائحية على منظومة معادلات تفاضلية جبرية بدليل-2 فتأخذ المنظومة (14) الشكل التالي:

$$S_1(t_{k+z_j})=g_1(t_{k+z_j}), \tag{18a}$$

$$S_2(t_{k+z_j})=g_2(t_{k+z_j})-S'_1(t_{k+z_j}),\; j=1(1)5,\, i=0(1)n-1 \tag{18b}$$

و باستخدام التقريبات الشرائحية (9)-(10) في النقاط التجميعية $t_{k+z_j}=t_k+z_j\,h$ تأخذ المنظومة $(18b)$ الشكل:

$$S_{2,k}+(h\,z_j)S'_{2,k}+\frac{(h\,z_j)^2}{2!}S''_{2,k}+\frac{(h\,z_j)^3}{3!}S'''_{2,k}+\frac{(h\,z_j)^4}{4!}C_{k,6}+\frac{(h\,z_j)^5}{5!}C_{k,7}+$$
$$\frac{(h\,z_j)^6}{6!}C_{k,8}+\frac{(h\,z_j)^7}{7!}C_{k,9}\,\frac{(h\,z_j)^8}{8!}C_{k,10}=g_2(t_{k+z_j})-g'_1(t_{k+z_j}), \tag{19}$$
$$j=1(1)5,\; k=0(1)n-1$$

نعيد كتابة المنظومة $(18a)$-(18b) بصيغة المصفوفات نحصل على الصيغة التكرارية التالية:

$$A_2\overline{C}_{2,k}+\overline{S}_{2,k}=\overline{G}_{2,k} \quad , \; k=0,1,\ldots,N-1 \tag{20}$$

حيث

$$A_2=\begin{bmatrix} A_1 & O\\ O & A_1\end{bmatrix},\quad \overline{C}_{2,k}=\begin{bmatrix} C_{k,1}\\ C_{k,2}\\ \vdots\\ C_{k,10}\end{bmatrix} \quad ,\overline{G}_{2,k}=\begin{bmatrix} g_1(t_{k+z_1})\\ \vdots\\ g_1(t_{k+1})\\ g_2(t_{k+z_j})-g'_1(t_{k+z_j})\\ \vdots\\ g_2(t_{k+z_j})-g'_1(t_{k+z_j})\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن A_1 هي المصفوفة الواردة في المنظومة (17) وتدخل في تركيب المصفوفة A_2 ، و O هي مصفوفة صفرية مربعة من المرتبة الخامسة.

$$\bar{S}_{2,k}=\begin{bmatrix}\bar{S}_{1,k}\\ \\ \hat{S}_k\end{bmatrix},\quad \hat{S}_k=\begin{bmatrix}S_{2,k}+(h\,z_1)S'_{2,k}+\frac{h^2\,z_1^2}{2}S''_{2,k}+\frac{h^3\,z_1^3}{3!}S'''_{2,k}\\ S_{2,k}+(h\,z_2)S'_{2,k}+\frac{h^2\,z_2^2}{2}S''_{2,k}+\frac{h^3\,z_2^3}{3!}S'''_{2,k}\\ S_{2,k}+(h\,z_3)S'_{2,k}+\frac{h^2\,z_3^2}{2}S''_{2,k}+\frac{h^3\,z_3^3}{3!}S'''_{2,k}\\ S_{2,k}+(h\,z_4)S'_{2,k}+\frac{h^2\,z_4^2}{2}S''_{2,k}+\frac{h^3\,z_4^3}{3!}S'''_{2,k}\\ S_{2,k}+(h)S'_{2,k}+\frac{h^2}{2}S''_{2,k}+\frac{h^3}{3!}S'''_{2,k}\end{bmatrix}.$$

إن منظومة المعادلات (20) ذات الدليل−2 قابلة للحل دائما ويمكن تعيين المجاهيل $\bar{C}_{2,k}$ وبالتالي الحل العددي في كل خطوة على كامل مجال الحل لأن المصفوفة A_2 نظامية فهي مرتبطة بالمصفوفة النظامية A_1 حيث نجد أن:

$$Det(A_2)=Det(A_1).Det(A_1)\neq 0$$

الطريقة الشرائحية لأجل دليل−u

لتعميم هذه الدراسة سنطبق الطريقة الشرائحية على منظومة معادلات جبرية ذات دليل يساوي u فتأخذ المنظومة (14) الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&S_1(t_{k+z_j})=g_1(t_{k+z_j}),\\ &S_2(t_{k+z_j})=g_2(t_{k+z_j})-S'_1(t_{k+z_j})\\ &\qquad\vdots\\ &S_u(t_{k+z_j})=g_u(t_{k+z_j})+\sum_{r=1}^{u-1}(-1)^{u-r}S_r^{(u-r)}(t_{k+z_j}),\\ &\qquad\qquad j=1(1)5,\ i=0(1)n-1\end{aligned}\tag{21}$$

باستخدام التقريبات (9)−(10) في المنظومة (21)، نحصل بالشكل المصفوفي على المنظومة:

$$A_v\,\bar{C}_{u,k}+\bar{S}_{u,k}=\bar{G}_{u,k}\quad,\quad k=0,1,\ldots,n-1\tag{22}$$

حيث إنّ المصفوفة A_u من المرتبة $5u\times 5u$ يمكن كتابتها بالشكل البسيط التالي:

$$A_u=\left[\begin{array}{c:c:c:c}A_1&O&\cdots&O\\ \hdashline O&A_1&\ddots&\vdots\\ \hdashline \vdots&\ddots&\ddots&O\\ \hdashline O&\cdots&O&A_1\end{array}\right],\quad G_{v,k}=\begin{bmatrix}g_1(t_{k+z_1})\\ \vdots\\ g_1(t_{k+1})\\ \vdots\\ g_u(t_{k+z_1})+\sum_{r=1}^{u-1}(-1)^{u-r}g_r^{(u-r)}(t_{k+z_1})\\ \vdots\\ g_u(t_{k+z_j})+\sum_{r=1}^{u-1}(-1)^{u-r}g_r^{(u-r)}(t_{k+z_j})\end{bmatrix},$$

$$\overline{S}_{u,k}=\begin{bmatrix}\overline{S}_{1,k}\\ \overline{S}_{2,k}\\ \vdots\\ \overline{S}_{u-1,k}\\ \breve{S}_{k}\end{bmatrix},\quad \breve{S}_{k}=\begin{bmatrix}S_{u,k}+(h\,z_1)S'_{u,k}+\frac{h^2\,z_1^2}{2}S''_{u,k}+\frac{h^3\,z_1^3}{3!}S'''_{u,k}\\ S_{u,k}+(h\,z_2)S'_{u,k}+\frac{h^2\,z_2^2}{2}S''_{u,k}+\frac{h^3\,z_2^3}{3!}S'''_{u,k}\\ S_{u,k}+(h\,z_3)S'_{u,k}+\frac{h^2\,z_3^2}{2}S''_{u,k}+\frac{h^3\,z_3^3}{3!}S'''_{u,k}\\ S_{u,k}+(h\,z_4)S'_{u,k}+\frac{h^2\,z_4^2}{2}S''_{u,k}+\frac{h^3\,z_4^3}{3!}S'''_{u,k}\\ S_{u,k}+(h)S'_{u,k}+\frac{h^2}{2}S''_{u,k}+\frac{h^3}{3!}S'''_{u,k}\end{bmatrix},$$

$$\overline{C}_{u,k}=\begin{bmatrix}C_{k,1}\\ C_{k,2}\\ \vdots\\ C_{k,5\times u}\end{bmatrix}$$

إن منظومة المعادلات (22) ذات الدليل u- قابلة للحل دائما ويمكن تعيين المجاهيل $\overline{C}_{u,k}$ التي عددها $5\times u$ وعندئذ إيجاد الحل العددي في كل خطوة على كامل مجال الحل، فالمصفوفة A_u نظامية لأن المصفوفة A_1 نظامية حيث نجد أن:

$$Det(A_u)=[Det(A_1)]^u\neq 0,\ \ u\geq 1$$

تحليل الخطأ ومرتبة التقارب للطريقة

تعريف(1) [15]: نقول عن طريقة إنها متناسقة (consistent) من الرتبة p إذا كان $\|T\|_\infty=\max\limits_{0\leq k\leq N}\|\tau_k\|=O(h^p)$، حيث τ_k هو خطأ الاقتطاع الموضعي للطريقة عند x_k.

تعريف(2) [15]: نقول عن طريقة شرائحية تجميعية إنها مستقرة إذا كان $\|(A_u)^n\|_\infty\leq c=const$ مهما تكن $n\geq 1$، حيث $c=\max\limits_{1\leq i\leq 5}\sum\limits_{j=1}^{5}|a_{i,j}^n|$، $(A_u)^n=[a_{i,j}^n]$، و A_u هي مصفوفة المنظومة (22).

- <u>**تحديد الخطأ للطريقة الشرائحية لأجل منظومة ذات دليل− 1**</u>

بفرض أن $y_1(t)\in C^9[a,b]$ هو حل وحيد للمنظومة (15) وأن $S_1(t)$ هو الحل التقريبي الشرائحي . وبفرض أن $T=(\overline{\tau}_{1,k})$ هو شعاع ذوخمس مركبات، حيث $\overline{\tau}_{1,k}$ هو الخطأ المتقطع الموضعي. بتطبيق التقريب الشرائحي (9) في نقاط التجميع $t_{k+z_j}=t_k+z_j\,h$ $(j=1,..,5)$, ونضع بشكل تقريبي $y_1(t_{k+z_j})\cong S_1(t_{k+z_j})$ و $y_1^{(m)}(t_k)\cong S_{1,k}^{(m)}$,$m=0,\ldots,3$، نحصل على صيغة الخطأ المقتطع الموضعي:

$$\overline{\tau}_{1,k}=A_1\,\overline{C}_{1,k}+\overline{\Psi}_{1,k}\,,\quad k=1,\ldots\ldots n \qquad (23)$$

حيث

$$\overline{\Psi}_{1,k}=\begin{bmatrix} S_{1,k}+(h\,z_1)S'_{1,k}+\frac{h\,z_1}{2}S''_{1,k}+\frac{h^2\,z_1^2}{3!}S'''_{1,k}-y_1(t_k+z_1h)\\ S_{1,k}+(h\,z_2)S'_{1,k}+\frac{h\,z_2}{2}S''_{1,k}+\frac{h^2\,z_2^2}{3!}S'''_{1,k}-y_1(t_k+z_2h)\\ S_{1,k}+(h\,z_3)S'_{1,k}+\frac{h\,z_3}{2}S''_{1,k}+\frac{h^2\,z_3^2}{3!}S'''_{1,k}-y_1(t_k+z_3h)\\ S_{1,k}+(h\,z_4)S'_{1,k}+\frac{h\,z_4}{2}S''_{1,k}+\frac{h^2\,z_4^2}{3!}S'''_{1,k}-y_1(t_k+z_4h)\\ S_{1,k}+(h)S'_{1,k}+\frac{h}{2}S''_{1,k}+\frac{h^2}{3!}S'''_{1,k}-y_1(t_k+h)\end{bmatrix},$$

وبتعويض العلاقة (17) في (23) نحصل على:

$$\overline{\tau}_{1,k}=\overline{G}_{1,k}+\overline{\Psi}_{1,k}-\overline{S}_{1,k} \tag{24}$$

وباستخدام منشور تايلور للدالة $y_1(t)$ حول t_k والتعويض في (24) ينتج لدينا:

$$\overline{\tau}_{1,k}=\overline{G}_{1,k}+\overline{\Psi}_{1,k}-\overline{S}_{1,k}=\begin{bmatrix}\frac{z_1}{9!}h^9y_1^{(9)}(t_k)\\ \frac{z_2}{9!}h^9y_1^{(9)}(t_k)\\ \frac{z_3}{9!}h^9y_1^{(9)}(t_k)\\ \frac{z_4}{9!}h^9y_1^{(9)}(t_k)\\ \frac{1}{9!}h^9y_1^{(9)}(t_k)\end{bmatrix}\quad ,k=1,..,n \tag{25}$$

وبالتالي:

$$\|\,\overline{\tau}_{1,k}\,\|_2=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+1}\,|\,y_1^{(9)}(t_k)\,|\frac{h^9}{9!}\equiv O(h^9)$$

حيث

$$y_1(t)=\sum_{i=0}^{8}\frac{(t-t_k)^i}{i!}y_1^{(i)}(t_k)+O(h^9),\ t\in[t_k,t_{k+1}]\ ,$$

نلاحظ من العلاقة (25) أن **الخطأ الموضعي** عند الخطوة k من الرتبة التاسعة للطريقة الشرائحية المطبقة لأجل الدليل واحد، وأما **الخطأ الشامل** على طول مجال الحل $[a,b]$ سيكون من أجل n خطوة وبالتالي فإنّ:

$$\|\,T\,\|_\infty=n.O(h^9)=\frac{b-a}{h}O(h^9)\equiv O(h^8)$$

نتيجة1: نجد بحسب التعريف(1) أن الطريقة الشرائحية المطبقة لأجل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية ذات دليل 1 تكون متناسقة من الرتبة الثامنة.

تحديد الخطأ للطريقة الشرائحية لأجل منظومة ذات دليل− u

بفرض أن $y_1(t),...,y_u(t)\in C^9[a,\,b]$ هو حل وحيد للمنظومة (21) ذات الدليل u وأن $S_1(t),...,S_u(t)$ هو الحل التقريبي الشرائحي له. وبفرض أن $T=(\overline{\tau}_{u,k})$ هو شعاع بعده $5u$، حيث $\tau_{u,k}$ يرمز للخطأ المتقطع الموضعي للمنظومة(21). بأسلوب مشابه لحساب الخطأ لأجل الدليل واحد نطبق التقريب

الشرائحي (9) ومشتقاته في نقاط التجميع $t_{k+z_j} = t_k + z_j\, h$ $(j=1,..,5)$ ،, نحصل على صيغة الخطأ المقتطع الموضعي لأجل منظومة ذات دليل− u:

$$\overline{\tau}_{u,k} = A_u\, \overline{C}_{u,k} + \overline{\Psi}_{uk}\,, \tag{26}$$

حيث

$$\overline{\Psi}_{u,k} = \begin{bmatrix} S_{1,k} + (h\,z_1)S'_{1,k} + \frac{h^2\,z_1^2}{2}\,S''_{1,k} + \frac{h^3\,z_1^3}{3!}\,S'''_{1,k} - y_1(t_k + z_1 h) \\ S_{1,k} + (h\,z_2)S'_{1,k} + \frac{h^2\,z_2^2}{2}\,S''_{1,k} + \frac{h^3\,z_2^3}{3!}\,S'''_{1,k} - y_1(t_k + z_2 h) \\ S_{1,k} + (h\,z_3)S'_{1,k} + \frac{h^2\,z_3^2}{2}\,S''_{1,k} + \frac{h^3\,z_3^3}{3!}\,S'''_{1,k} - y_1(t_k + z_3 h) \\ S_{1,k} + (h\,z_4)S'_{1,k} + \frac{h^2\,z_4^2}{2}\,S''_{1,k} + \frac{h^3\,z_4^3}{3!}\,S'''_{1,k} - y_1(t_k + z_4 h) \\ S_{1,k} + (h)S'_{1,k} + \frac{h^2}{2}\,S''_{1,k} + \frac{h^3}{3!}\,S'''_{1,k} - y_1(t_k + h) \\ \vdots \\ S_{u,k} + (h\,z_1)S'_{u,k} + \frac{(h\,z_1)^2}{2}\,S''_{u,k} + \frac{h^3\,z_1^3}{3!}\,S'''_{u,k} - y_u(t_k + z_1 h) \\ S_{u,k} + (h\,z_2)S'_{u,k} + \frac{(h\,z_2)^2}{2}\,S''_{u,k} + \frac{h^3\,z_2^3}{3!}\,S'''_{u,k} - y_u(t_k + z_2 h) \\ S_{u,k} + (h\,z_3)S'_{u,k} + \frac{(h\,z_3)^2}{2}\,S''_{u,k} + \frac{h^3\,z_3^3}{3!}\,S'''_{u,k} - y_u(t_k + z_3 h) \\ S_{u,k} + (h\,z_4)S'_{u,k} + \frac{(h\,z_4)^2}{2}\,S''_{u,k} + \frac{h^3\,z_4^3}{3!}\,S'''_{u,k} - y_u(t_k + z_4 h) \\ S_{u,k} + (h)S'_{u,k} + \frac{h^2}{2}\,S''_{u,k} + \frac{h^3}{3!}\,S'''_{u,k} - y_u(t_k + h) \end{bmatrix},$$

وبتعويض العلاقة (22) في (26) نحصل على:

$$\overline{\tau}_{u,k} = \overline{G}_{u,k} + \overline{\Psi}_{u,k} - \overline{S}_{u,k} \tag{27}$$

وباستخدام منشور تايلور للدوال $y_1(t),\ldots,y_u(t)$ حول t_k ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} & y_1(x) - g_1(x) \equiv O(h^9), \\ & y_2(x) - g_2(x) + y'_1(x) \equiv O(h^8), \\ & \quad \vdots \\ & y_u(x) - g_u(x) - (-1)^{v-1}\, y'_{u-1}(x) \equiv O(h^{10-u}) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\overline{\tau}_{u,k} = \overline{G}_{u,k} + \overline{\Psi}_{u,k} - \overline{S}_{u,k} \equiv O(h^{10-u}) \quad ,u=1,..,8 \tag{28}$$

نلاحظ من العلاقة (28) أن الخطأ الموضعي عند الخطوة k يكون من الرتبة $(10-u)$ للطريقة الشرائحية المطبقة لأجل الدليل−u، ومنه يكون الخطأ الشامل من أجل n خطوة $\| T \|_\infty = O(h^{9-u})$.

<u>نتيجة2</u>: كذلك نجد بحسب التعريف(1) أن الطريقة الشرائحية المطبقة لأجل منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية ذات دليل u تكون متناسقة من الرتبة $(9-u)$، ومن الواضح أن الطريقة متقاربة لأن $\lim_{h\to 0} \| T \|_\infty = 0$.

استقرار الطريقة الشرائحية لأجل منظومة ذات دليل- u

من منظومة المعادلات (22) نجد أن الطريقة الشرائحية المطبقة لمنظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية ذات دليل u دائما موجودة لأن المصفوفة A_u نظامية وبالتالي يمكن حساب المجاهيل $\overline{C}_{u,k}$ عند كل خطوة في مجال الحل. وعندئذ يمكن إيجاد الحل الشرائحي العددي في كل خطوة بالعلاقة التكرارية التالية:

$$\overline{S}_{k+1} = \overline{S}_{u,k} + A_u \overline{C}_{u,k} \quad , \quad k=0,1,\ldots,n-1 \qquad (29)$$

حيث $\overline{S}_{u,k}$ هي المتجهة في المنظومة (22) نفسها ، و متجهة الحل الشرائحي التقريبي:

$$\overline{S}_{k+1} = [S_1(t_{k+1+z_1}),\ldots,S_1(t_{k+1+z_5}),\ldots.,\ S_u(t_{k+1+z_1}),\ldots,S_u(t_{k+1+z_5})]^T$$

تستخدم الطريقة الشرائحية نقاط التجميع الخمس التالية:

$$t_{k+z_j} = t_k + z_j h,\ \ j = 1(1)5 \qquad (7)$$

في كل مجال جزئي $\mathrm{I}_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0(1)n\text{-}1,$ ، مع خمسة وسطاء :

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \qquad (8)$$

<u>**نتيجة (3)**</u>: إن الطريقة الشرائحية المستخدمة لنقاط التجميع الخمس $t_{k+z_j} = t_k + z_j h,\ \ j = 1(1)5$ تكون مستقرة بحسب التعريف (2) إذا كان $\|(A_u)^n\| \le c = const$ مهما تكن $n \ge 1$، حيث $c = \max\limits_{1\le i\le 5}\sum_{j=1}^{5}|a_{i,j}^n|$ ، $(A_u)^n = [a_{i,j}^n]$ ، و A_u هي مصفوفة المنظومة (22).

<u>**برهان**</u>: لإثبات صحة النتيجة (3) يكفي إثبات أن تكون $\|(A_u)^n\|_\infty$ محدودة مهما تكن $n \ge 1$. ولكن ذلك مرتبط بتحديد قيم للوسطاء $z_j, j = 1(1)4$ حيث يتحقق الشرط $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < 1$. تشير الدراسات والنتائج العددية الى أن أفضل اختيار للوسطاء يتوزع في النصف الأيمن من المجال [0,1]، وبالتحديد وجدنا أن الاختيارات التالية مناسبة للحل العددي:

$$z_1 = 0.7, z_2 = 0.8, z_3 = 0.95,\ z_4 = 0.98$$
$$z_1 = 0.75, z_2 = 0.85, z_3 = 0.95,\ z_4 = 0.99$$
$$z_1 = 0.75, z_2 = 0.85, z_3 = 0.96, z_4 = 0.998$$
$$z_1 = 0.77, z_2 = 0.89, z_3 = 0.96, z_4 = 0.998$$
$$z_1 = 0.8, z_2 = 0.9, z_3 = 0.96, z_4 = 0.999$$

نبين في الجدول(1) بعض القيم لـ $\|(A_u)^n\|_\infty$ من أجل n=1,5,10,20,40,80، حيث يتضح أن $\lim\limits_{n\to\infty}\|(A_u)^n\|_\infty = 0$ وهذا يعني أن $\|(A_u)^n\|_\infty < 0.05 = const$ مهما تكن $n \ge 1$.

الجدول1: بعض القيم لـ $\| (A_u)^n \|_\infty$.

$\| (A_u)^n \|_\infty$					
n=1	n=5	n=10	n=20	n=40	n=80
0.05162	1.2563E−7	1.577E−14	2.488E−28	6.188E−56	3.829E−111

النتائج العددية

يتم اختبار فعالية الطريقة الشرائحية المقترحة بحل أربع مسائل لها حلول تحليلية لنتمكن من حساب الخطأ المطلق في الحل العددي. المسائل الثلاث الأولى، محلولة في المراجع[8,9,13] أخرى لهذا تمت مقارنة نتائجنا مع نتائج الطرائق الأخرى. ونظرا لفعالية الطريقة وكفاءتها العالية اقترحنا المسألة(4) دليلها يساوي خمسة وكانت النتائج عالية الدقة.

المسألة1:[9] : لتكن المنظومة مؤلفة من أربع معادلات تفاضلية ومعادلة جبرية واحدة بدليل−2 معطاة بالشكل:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -e^t\, y_1 + y_2 + y_4 + z - e^{-t} \\
y_2' &= -y_1 + y_2 - \sin(t)\, y_3 + z - \cos(t) \\
y_3' &= \sin(t)\, y_1 + y_3 + \sin(t)\, y_4 - \sin^2(t) - e^{-t}\sin(t) \\
y_4' &= \cos(t)\, y_2 + y_3 + \sin(t)\, y_4 - e^{-t}(1+\sin(t)) - \cos^2(t) - e^t \\
0 &= y_1 \sin^2(t) + y_2\cos^2(t) + (y_3 - e^t)(\sin(t) + 2\cos(t)) \\
&\quad + \sin(t)(y_4 - e^{-t})(\sin(t) + \cos(t) - 1) - \sin^3(t) - \cos^3(t)
\end{aligned}
$$

مع الحل التحليلي:

$$y_1 = \sin(t),\ y_2 = \cos(t),\ y_3 = e^t,\ y_4 = e^{-t}, \text{and } z(t) = e^t\sin(t).$$

نحل المسألة 1 بالطريقة الشرائحية المقترحة ونسجل النتائج في الجدول (2). ندرج في الجدول(3) نتائج لطريقة شرائحية من الدرجة الخامسة في المرجع [8]. بمقارنة نتائج الجدولين(2) و(3) تتضح دقة وأفضلية نتائج طريقتنا. نرسم في الأشكال 1و2 و 3 الحل التقريبي مع الحل التحليلي للمسألة 1 في المجال [0,10].

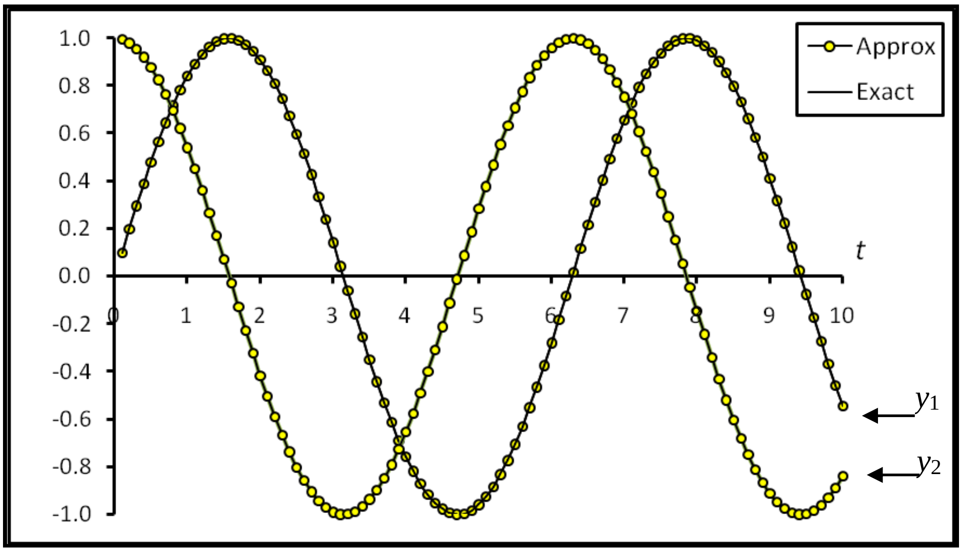
الجدول2: الخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة1 باستخدام الطريقة الشرائحية.

t	The Presented Method ($z_1 = 0.75, z_2 = 0.85, z_3 = 0.95,\ z_4 = 0.99$), h=0.1.				
	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	δy
1.0	1.5E-0015	1.8E-0015	7.2E-0016	7.1E-0016	3.9E-0015
2.0	2.5E-0015	6.1E-0015	3.5E-0015	2.8E-0015	4.1E-0014
3.0	2.3E-0015	5.6E-0014	2.9E-0014	1.6E-0015	7.9E-0015
4.0	6.8E-0014	9.7E-0013	1.1E-0013	1.2E-0013	3.4E-0012
5.0	2.7E-0012	1.3E-0011	3.8E-0013	9.5E-0013	3.9E-0010
6.0	4.8E-0015	1.5E-0012	8.2E-0013	6.2E-0014	7.5E-0013
7.0	1.1E-0014	7.7E-0012	2.3E-0012	2.2E-0012	1.3E-0012
8.0	3.3E-0014	3.5E-0011	1.6E-0012	1.2E-0011	1.3E-0010

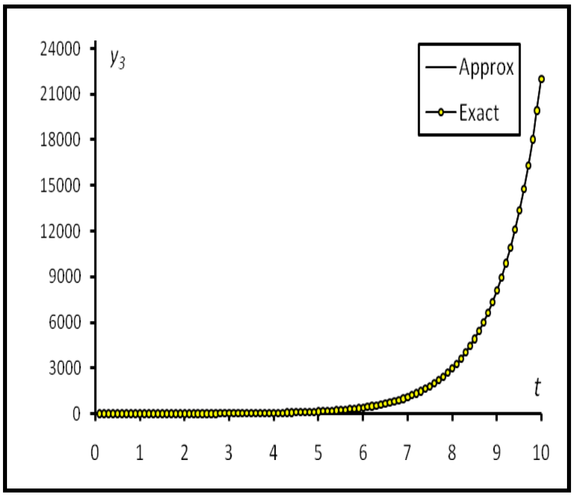
9.0	6.3E-0015	4.4E-0011	2.1E-0011	1.3E-0011	2.4E-0011
10.0	3.3E-0014	2.1E-0010	5.2E-0011	2.6E-0011	6.1E-0010

الجدول3: الخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة1 باستخدام طريقة الشرائحية في[9].

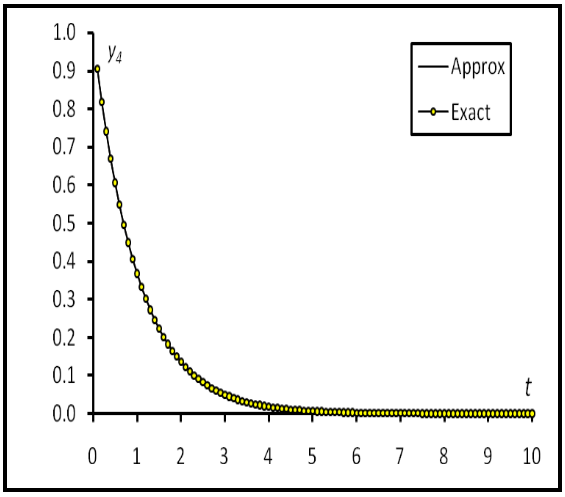
t	Quintic C^2- Spline Collocation Method [**9**] (z_1=0.5, z_2=0.99), h=0.1.				
	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	δy
1.0	1.6254E-12	1.7312E-12	1.4800E-14	1.9253E-12	3.7635E-11
2.0	1.9271E-12	1.0742E-11	1.6891E-12	8.6127E-13	1.0713E-10
3.0	2.5514E-11	3.9746E-11	2.1647E-11	5.2040E-12	1.8240E-10
4.0	1.9124E-11	1.4622E-09	1.2677E-10	2.0503E-10	4.5873E-09
5.0	5.2136E-09	2.5915E-08	4.7350E-10	1.8017E-09	7.6844E-07
6.0	4.1878E-11	1.7231E-09	9.5689E-09	1.6561E-10	2.0305E-08
7.0	4.3640E-11	9.6056E-09	2.9558E-09	3.5497E-09	9.0305E-08
8.0	2.4179E-09	1.0691E-07	3.7785E-09	1.6413E-08	7.6251E-06
9.0	5.1095E-12	5.6267E-08	2.7056E-08	1.3849E-08	1.8266E-06
10.0	2.3257E-11	2.2294E-07	5.8476E-08	2.0865E-08	7.6798E-06



الشكل1: الحل الشرائحي التقريبي لـ y_1 , y_2 مع الحل التحليلي
للمسألة 1 بخطوة h=0.1



الشكل3: الحل الشرائحي التقريبي لـ y_4 مع الحل التحليلي للمسألة 1 بخطوة h=0.1



الشكل2: الحل الشرائحي التقريبي لـ y_3 مع الحل التحليلي للمسألة 1 بخطوة h=0.1

المسألة2:[13] : لتكن منظومة هيسنبيرغ ذات الدليل – 3 التالية:

$$\begin{cases} y_2' + y_1 - 1 = 0 \\ t\, y_2' + y_3' + 2y_2 - 2t = 0, \qquad t \in [0, 10] \\ t\, y_2 + y_3 - e^t = 0 \end{cases}$$

مع الحل التحليلي:

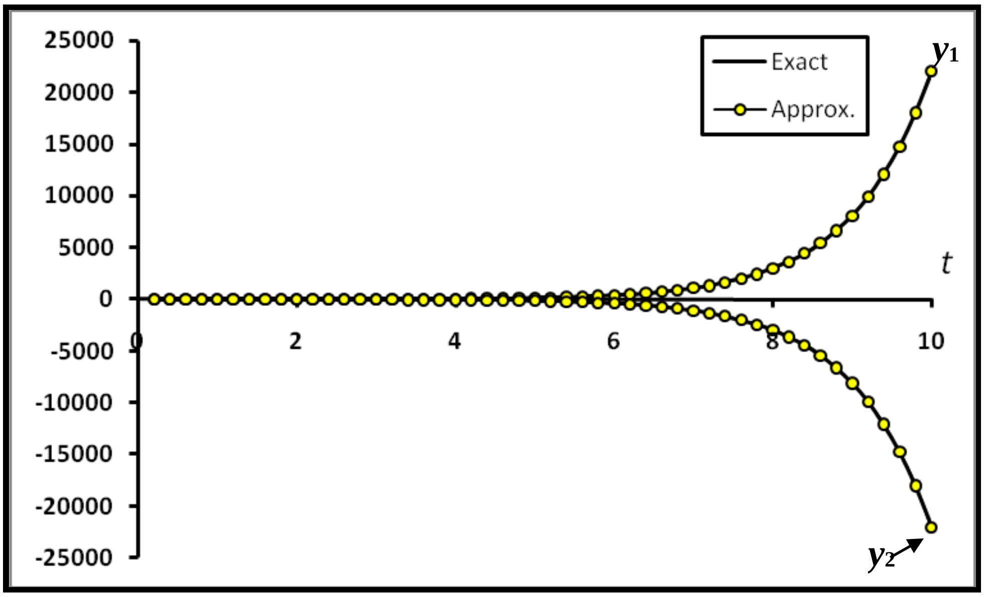
$$y_1 = e^t - 1, \quad y_2 = 2t - e^t, \quad y_3 = (1+t)e^t - 2t^2$$

نحل المسألة2 بالطريقة الشرائحية باستخدام الوسطاء $z_1 = 0.75, z_2 = 0.85, z_3 = 0.96, z_4 = 0.998$ ونسجل الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لطريقتنا في النصف الأيمن من الجدول (4)، ونعرض في النصف الأيسر من الجدول الخطأ المطلق لطريقة تقريب بادي في المرجع [13]. نرسم في الشكلين4و5 الحل الشرائحي التقريبي لـ y_1 , y_2, y_3 مع الحل التحليلي للمسألة 2 بخطوة h=0.1.

الجدول4: الخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة2 باستخدام الطريقة الشرائحية .

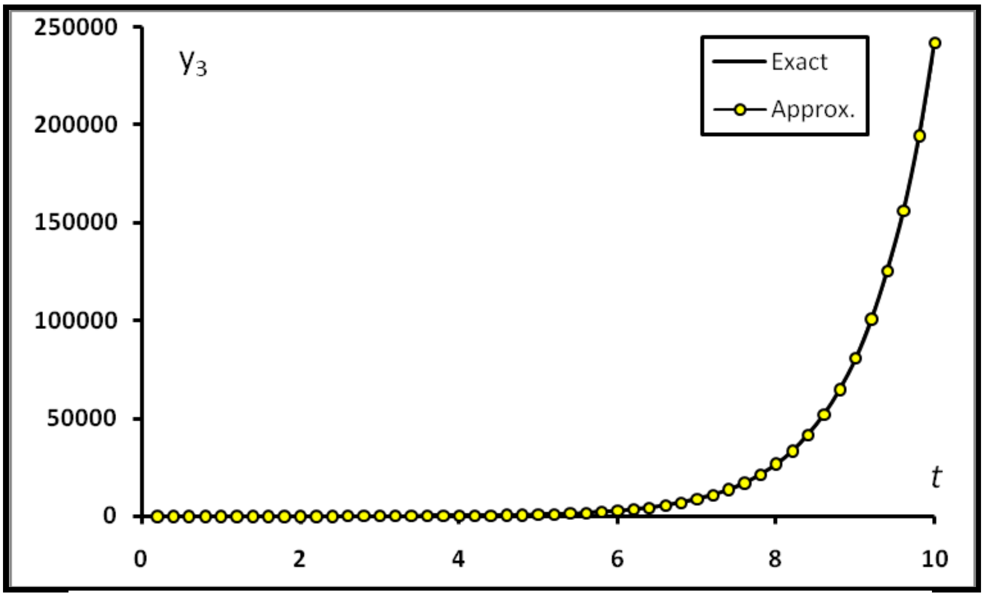
t	Pade Approximation Method [13]			The Presented Method , h=0.1.		
	δy_1	δy_2	δy_3	δy_1	δy_2	δy_3
0.1	1.0E-11	1.0E-11	1.0E-10	3.9E-013	3.8E-016	8.2E-018
0.2	1.0E-10	1.0E-10	2.0E-09	2.2E-013	1.0E-016	5.1E-017
0.3	1.0E-10	4.0E-10	1.0E-10	4.8E-013	8.5E-016	2.0E-016
0.4	3.0E-10	4.0E-10	1.0E-09	1.2E-012	1.3E-015	5.6E-016
0.5	3.0E-10	4.0E-10	1.0E-09	2.1E-012	2.7E-015	1.3E-015
0.6	1.0E-10	6.0E-10	1.0E-09	4.7E-013	3.8E-016	6.9E-017
0.7	3.0E-10	6.0E-10	3.0E-09	2.6E-012	3.6E-015	2.5E-015
0.8	1.0E-11	4.0E-10	9.0E-09	2.0E-012	2.9E-015	1.6E-015
0.9	5.0E-10	1.6E-09	3.0E-08	1.8E-012	1.9E-015	1.4E-015

1.0	1.2E-09	4.0E-09	8.80E-08	7.5E-014	1.8E-016	2.6E-016
3.0	-----	-----	-----	9.7E-012	2.9E-014	2.6E-014
6.0	-----	-----	-----	2.0E-010	1.6E-013	2.7E-013
9.0	-----	-----	-----	5.5E-009	6.4E-012	8.1E-011
10	-----	-----	-----	1.9E-008	4.9E-011	3.9E-010



الشكل4: الحل الشرائحي التقريبي مع الحل التحليلي لـ y_1 ، y_2

للمسألة 2 بخطوة h=0.1



الشكل5: الحل الشرائحي التقريبي مع الحل التحليلي لـ y_3

للمسألة 2 بخطوة h=0.1

المسألة3:[8] : لتكن المنظومة ذات الدليل−3 التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -(t+1) & t^2+2t \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

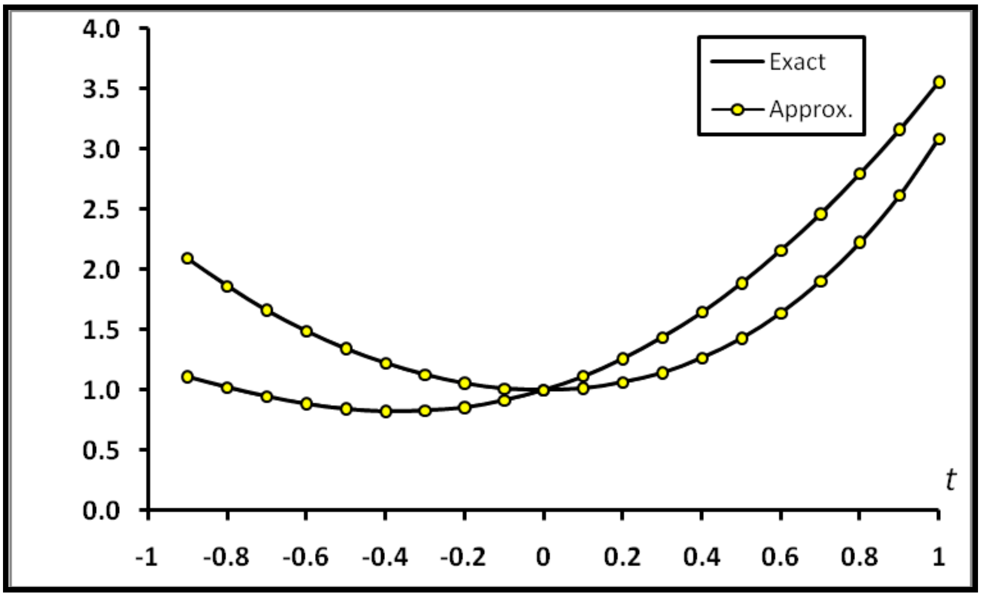
مع الحل التحليلي:

$$y_1(t) = e^{-t} + t\,e^{t}\,, \quad y_2(t) = e^{t} + t\,Sin\,t, \quad y_3(t) = Sin\,t$$

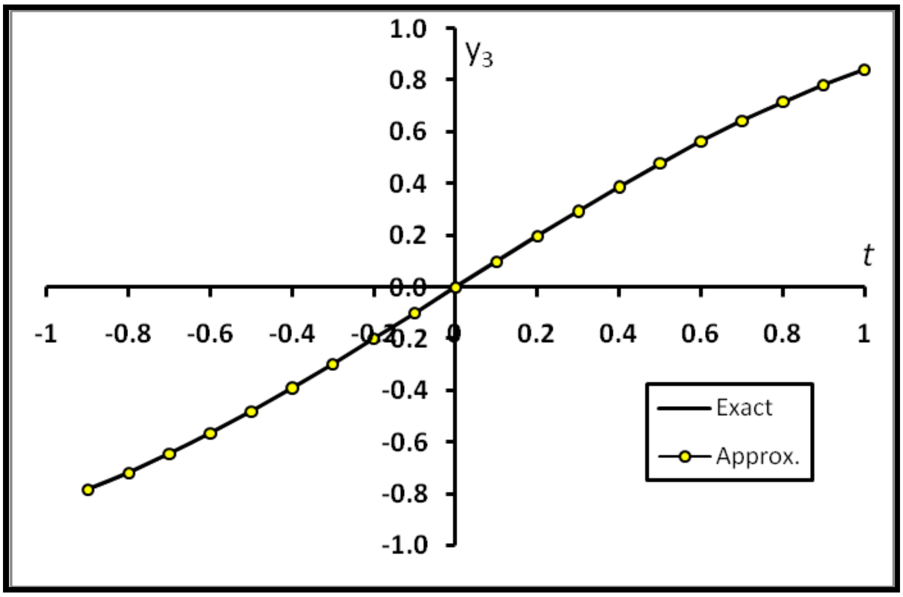
نحل المسألة3 بالطريقة الشرائحية المقترحة $z_1 = 0.77, z_2 = 0.89, z_3 = 0.96, z_4 = 0.998$ ونسجل في الجدول (5) الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي وكذلك الأخطاء المطلقة لطريقة تقريب تشيبتشيف في المرجع [8]. نعرض في الشكلين6 و7 الحل الشرائحي التقريبي لـ y_1 , y_2, y_3 مع الحل التحليلي للمسألة 3 بخطوة h=0.1 في المجال [1,1−].

الجدول5: الخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة2 باستخدام الطريقة الشرائحية.

t	Chebyshev Polynomials Method, N=10 [8]			The Presented Method , N=10.		
	$\delta\, y_1$	$\delta\, y_2$	$\delta\, y_3$	$\delta\, y_1$	$\delta\, y_2$	$\delta\, y_3$
-0.8	1.325E-12	1.612E-13	4.551E-14	1.0574E-14	5.6078E-14	1.2468E-18
-0.6	9.492E-13	3.185E-13	6.117E-14	2.8459E-14	1.1242E-13	3.8489E-18
-0.4	7.236E-13	2.743E-13	6.888E-14	4.5264E-14	1.6792E-13	6.5052E-19
-0.2	1.830E-12	5.299E-13	5.032E-14	5.4851E-14	2.2073E-13	2.3174E-18
0.0	3.823E-13	4.268E-13	2.011E-16	5.3250E-14	2.6907E-13	1.8030E-18
0.2	1.461E-12	6.903E-13	4.998E-14	3.9002E-14	3.1141E-13	2.8460E-19
0.4	6.954E-13	7.456E-13	6.905E-14	1.3248E-14	3.4651E-13	2.3852E-18
0.6	8.726E-13	9.694E-13	6.095E-14	2.0704E-14	3.7290E-13	4.8246E-18
0.8	1.290E-12	1.122E-12	4.596E-14	5.6874E-14	3.8990E-13	3.2526E-18
1.0	1.705E-12	1.412E-12	2.220E-16	8.6369E-14	3.9632E-13	1.3010E-18



الشكل6: الحل الشرائحي التقريبي مع الحل التحليلي لـ y_1 ، y_2
للمسألة 3 بخطوة h=0.1



الشكل7: الحل الشرائحي التقريبي مع الحل التحليلي لـ y_3
للمسألة 3 بخطوة h=0.1

<u>المسألة4</u> : مسألتنا الاختيارية الأخيرة هي منظومة من المعادلات التفاضلية الجبرية بدليل-5:

$$y_1' - y_2 = 0,$$
$$y_2' - y_3 = 0\,,$$
$$y_3' - y_4 = 0\,,$$
$$y_4' - y_5 = 0\,,$$

$$y_1 - Sin(t) = 0, \qquad t \in [0, 10],$$

تخضع للشروط الابتدائية:

$y_1(0)=0,\ y_2(0)=1,\ y_3(0)=0,\ y_4(0)=-1$

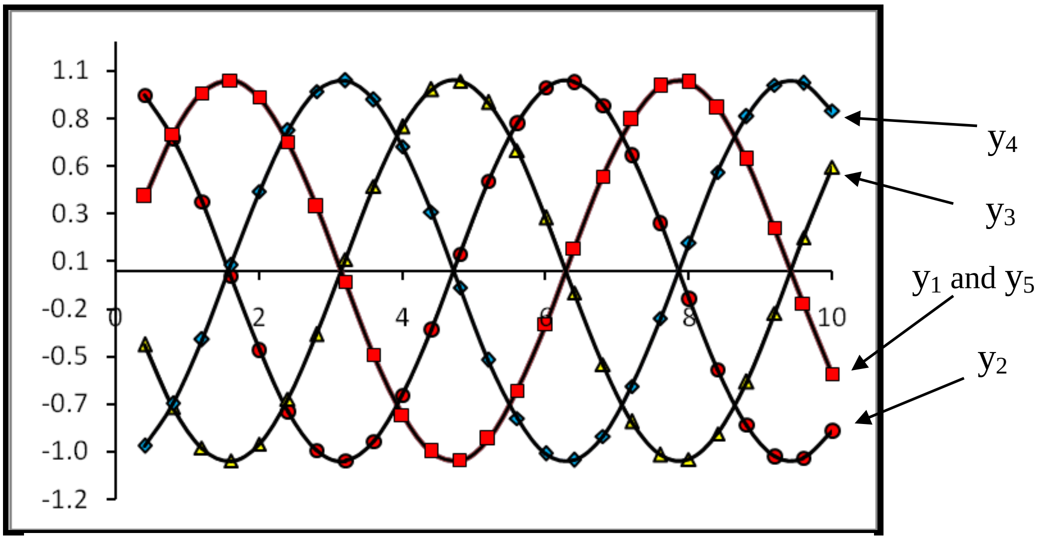
وتملك الحل التحليلي:

$y_1(t)=sin(t),\ y_2(t)=\cos(t),\ y_3(t)=-\sin(t),\ y_4(t)=-\cos(t),\ y_5(t)=\mathrm{Sin}(t)$

نحل المسألة4 باستخدام طريقتنا الشرائحية لأجل $z_1=0.7,\ z_2=0.8,\ z_3:=0.95;\ z_4:=0.98$ والخطوة $h=0.4$ ونسجل النتائج في **الجدول6** حيث تظهر النتائج دقة الطريقة العددية وعلى مجال أوسع وبدليل أعلى. نعرض في **الشكل8** الحل العددي لـ y_1 , y_2 , y_3, y_4 , y_5 مع الحل التحليلي.

الجدول6: الخطأ المطلق في الحل العددي للمسألة4 في المجال [0,10].

t	الطريقة الشرائحية المقدمة $(z_1=0.7, z_2=0.8, z_3:=0.95; z_4:=0.98)$ بخطوة $h=0.4$				
	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	δy_5
0.40	1.9E-17	1.6E-14	1.1E-11	2.9E-09	3.3E-07
1.20	3.2E-17	8.2E-15	5.2E-12	1.2E-09	1.3E-07
2.00	4.7E-17	2.9E-15	3.1E-12	7.8E-10	9.4E-08
2.80	2.4E-17	1.2E-14	9.5E-12	2.3E-09	2.6E-07
3.60	2.2E-17	1.5E-14	1.0E-11	2.5E-09	2.6E-07
4.40	2.6E-17	8.2E-15	4.7E-12	1.1E-09	1.1E-07
5.20	2.2E-17	4.4E-15	3.7E-12	9.2E-10	1.1E-07
6.00	3.7E-17	1.3E-14	9.8E-12	2.4E-09	2.6E-07
6.80	2.2E-17	1.4E-14	1.0E-11	2.4E-09	2.6E-07
7.60	8.1E-17	6.4E-15	4.1E-12	9.6E-10	9.5E-08
8.40	1.1E-16	4.5E-15	4.2E-12	1.1E-09	1.2E-07
9.20	5.8E-18	1.4E-14	1.0E-11	2.4E-09	2.7E-07
10	1.9E-17	1.4E-14	9.7E-12	2.3E-09	2.5E-07



الشكل8: الحل الشرائحي العددي y_1 , y_2 , y_3, y_4 , y_5 مع الحل التحليلي للمسألة4 بخطوة $h=0.4$.

الاستنتاجات والتوصيات:

يتضح من مقارنة النتائج في الجدولين 2 و3 للمسألة1 أن الطريقة المقدمة أفضل من الطريقة الشرائحية في [9] من حيث دقة الخطأ المطلق ، و نجد من الجدول(4) للمسألة2 أن طريقتنا أفضل من طريقة تقريبات بادي في [13] على المجال [0,1]، حيث تتابع طريقتنا نتائجها حتى $t=10$. أيضا من الجدول(5) للمسألة3 نجد أن طريقتنا أفضل من طريقة تقريبات تشيبتشيف في [8]. كذلك تبين الأشكال 1و8أن الطريقة الشرائحية المقدمة تستطيع أن تقدم حلا شرائحيا تقريبيا يتطابق إلى حد كبير من الحل التحليلي.

تشير نتائج حل المسألة 4 في الجدول6 أن الطريقة استطاعت أن تقدم حلا شرائحيا ذي خطأ صغير جدا لأجل منظومة ذات دليل يساوي 5 على طول المجال [0,10] وهذا ما لم تستطع تقديمه الطرائق الأخرى.

المراجع :

[1] PETZOLD L. R. (1986), *Order results for implicit Runge-Kutta methods applied to differential/algebraic systems*, SIAM J. Numer. Anal., 23, 837-852.

[2] ROCHE M. (1989), *Implicit Runge-Kutta methods for differential algebraic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 26, 963-975.

[3] ASCHER U. M. and L. R. PETZOLD (1991), *Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28, 1097-1120.

[4] ASCHER U. M. and P. LIN (1997), *Sequential regularization methods for nonlinear higher-index DAEs*, SIAM J. Sci. Comput., 18, 1, 160-181.

[5] CAO Y., LI SH., PETZOLD L. (2002), Adjoint Sensitivity Analysis For Differential-Algebraic Equations: Algorithms and Software , Journal of Computational and Applied Mathematics 149 171–191.

[6] RANGAN, A. (2003), Deferred Correction Methods For Low Index Differential Algebraic Equations , BIT Numerical Mathematics, Vol. 43, No. 1, pp. 001-018.

[7] CELIK E., BAYRAM M.,YELOGLU T. (2006), Solution of Differential-Algebraic Equations(DAEs) by Adomian Decomposition Method, International Journal Pure & Applied Mathematical Sciences. Vol.3 No.1, pp. 93-100.

[8] HUSEIN M. M. JARADAT (2008), Numerical Solution of Linear Differential-Algebraic Equations Using Chebyshev Polynomials, International Mathematical Forum, 3, no. 39, 1933 – 1943.

[9] MAHMOUD S. M. (2010), Quintic C^2- Spline Collocation Methods for Solving Initial Value Problems in Higher Index Differential-Algebraic Equations, Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. (32) No (3).

[10] Al-MASAEED R. and H.M. JARADAT (2012), Analytical approximate solutions of systems of differential-algebraic equations by Laplace homotopy analysis method, Mathematics and Computer Science Series, Volume 39(2), Pp. 191-199.

[11] RAMEZANI M., M. SHAHREZAEE, H. KHARAZI, L. H. KASHANY (2012), Numerical solutions of Differential Algebraic Equations by Differential Quadrature Method, Journal of Basic and Applied Scientific Research, 2(11), 11821-11828.

[12] KARTA M. and E. CELIK (2012), On the Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations (Daes) With Hessenberg Index-3, Atatürk University, Faculty of Science, Department of Mathematics, Erzurum-Turkey.
[13] TABATABAEI, KH., E. CELIK (2013), On The Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations(DAES) with Index-3 by Pade Approximation, Applied Mathematics& Information Sciences Letters, No. 2, 17-23.
[14] MAHMOUD, S. M. OSMAN, M. Sh., Al KABATH, A.(2008), C3-Seventh Spline Methods with Four Collocation Points for Solving Linear Third-Order Boundary Value Problems, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (30) No (1).