مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

تقريب الدوال العقدية على أسرة جزئية من منحنيات كارلسون

الدكتور محمد علي*
الدكتور محمد سويقات **
أحمد كنج***

(تاريخ الإيداع 16 / 6 / 2014. قُبِل للنشر في 26 / 8 /2014)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث مسألة تقريب الدوال العقدية من فضاء أورليتش $L_M(\Gamma)$ على أسرة جزئية من أسرة منحنيات كارلسون تدعى منحنيات ديني الملساء إلى دوال كسرية بواسطة كثيرات حدود تتعلق بمجاميع دزياديك الناتجة عن كثيرات حدود فابير، معتمدين في الوصول إلى الهدف المنشود على بعض مفاهيم التحليل العقدي مثل صيغ سوخوتسكي.

الكلمات المفتاحية: منحنيات كارلسون (Carlson curves) ، فضاء أورليتش (orlicz space) ، كثيرات حدود فابير (Faber polynomials).

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات–كلية العلوم– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (4) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (4) 2014

Approximation of Complex Functions on some subclass of Carlson Curves

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Mohamed Soueycatt**
Ahmad kinj***

(Received 16 / 6 / 2014. Accepted 26 / 8 /2014)

□ ABSTRACT □

We study in this research approximation of complex functions from Orlicz space $L_M(\Gamma)$ on a subclass of Carlson curves, which called Dini smooth curves to rational functions by using polynomials related with Dzjadyk sums which obtained from Faber polynomials. We depend on some concepts of complex analysis such as formulas of Sokhotski to reach the desired goal.

Keywords: Carlson curves, orlicz space, Faber polynomials.

***Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
*****Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن العناصر الرئيسية في مسائل نظرية تقريب الدوال العقدية ترتبط بما يلي:

1- أسرة الدوال التي يتم تقريبها(أسرة دوال ليبيغ – أسرة دوال أورليتش...).

2- أسرة الدوال التي يتم التقريب إليها (كثيرات حدود – دوال كسرية...).

3- أسرة المجموعات التي يتم التقريب عليها(مناطق – منحنيات مغلقة – منحنيات مفتوحة).

4- تقدير درجة التقريب أو تقدير الفروق بين الدالة المقربة والدالة التي يتم التقريب إليها.

في بحثنا هذا قمنا بدراسة مسألة تقريب الدوال العقدية من أسرة دوال أورليتش إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود فابير للدالة المقربة وذلك على أسرة واسعة من المنحنيات تدعى منحنيات ديني الملساء.

وننوه إلى أننا من أجل الوصول إلى النتيجة الرئيسية لهذا العمل قمنا بإثبات بعض المبرهنات اللازمة وعندها أتى برهان النتيجة الرئيسية بشكل مبسّط ومختصر.

كما أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث $c_1, c_2, ...$ كلها موجبة ومختلفة ولا تؤثر في دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه :

يملك هذا البحث أهمية في نظرية تقريب الدوال العقدية، فمن خلال معرفة الأسرة التي تنتمي إليها الدالة العقدية يمكننا إيجاد كثيرة حدود أو دالة كسرية قريبة منها بدرجة كافية، أما هدف البحث فيكمن في دراسة تقريب أسرة دوال أورليتش $L_M(\Gamma)$ إلى دوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات فابير.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي ونظرية تقريب الدوال، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

<u>تعريف1 [4] الأسرة N–function</u>: يقال عن الدالة الحقيقية المستمرة والمحدبة $M:[0,\infty[\to[0,\infty[$ إنها من الأسرة N–function إذا حققت الشروط الآتية:

$$M(0)=0 \quad , M(x)>0 \; for \; x>0 \;,\; \lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0 \;,\; \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

كما وتُعرف الدالة المتممة للدالة M (complementary function) بالعلاقة:

$$N(y)=\max_{x\ge 0}\{xy-M(x)\},\; y\ge 0$$

<u>تعريف 2 [4] فضاء أورليتش</u> $L_M(\Gamma)$: ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، يرمز بالرمز $L_M(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال العقدية $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ المحققة للشرط الآتي:

$$\int_\Gamma M\left(\alpha|f(z)|\right)|dz|<\infty$$ من أجل ثابت موجب α.

ومن المعلوم أن فضاء أورليتش $L_M(\Gamma)$ يمثل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم الآتي [7]

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)}=\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_\Gamma |f(z)g(z)|\,|dz|$$

حيث $\rho(g,N)=\int_{\Gamma} N\left(|g(z)|\right)|dz|$ و N هي الدالة المتتمة للدالة M.

تعريف 3 [6] الفضاء $L_1(\Gamma)$: ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، يرمز بالرمز $L_1(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال العقدية $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ القابلة للمكاملة ليبيغياً على Γ والمحققة للشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma}|f(z)||dz|<\infty$$

ومن المعلوم أن فضاء أورليتش $L_M(\Gamma)$ محتوى في الفضاء $L_1(\Gamma)$ [7] أي:

$$L_M(\Gamma)\subset L_1(\Gamma)\quad ...(1)$$

وبكلام آخر: إن أيّة دالة من فضاء أورليتش قابلة للمكاملة ليبيغياً على Γ.

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث [6]

أ) ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولنرمز بـ $G=\operatorname{int}\Gamma$ و $G^-=ext\,\Gamma$ ولنفترض، دون المساس بعمومية المسألة، أن $0\in G$ ولنرمز بـ γ_0 للدائرة الواحدية أي $\gamma_0=\{w\in\mathbb{C}:|w|=1\}$ وبالرمز $D=\operatorname{int}\gamma_0$ و $D^-=ext\,\gamma_0$

ب) لنرمز بـ $w=\varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$, $\varphi(\infty)=\infty$ ولنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

ت) لنرمز بـ $w=\varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to 0}z\,\varphi_1(z)>0$, $\varphi_1(0)=\infty$ ولنرمز بـ ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1.

ث) لنرمز بـ $K_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{ikt}$ لكثيرة حدود مثلثية من الدرجة n، زوجية وغير سالبة تحقق الشروط الآتية:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt=1\quad ...(2)\quad ،\quad \int_0^{\pi}t\,K_n(t)\,dt\le\frac{C}{n}\quad ...(3)$$

تعريف 4 [2] منحني كارلسون: يُقال عن منحني جوردان المحدود الطول Γ إنّه منحني كارلسون إذا كان من أجل أيّة نقطة $z\in\Gamma$ ومن أجل أي $r>0$ يوجد ثابت موجب k حيث يكون $|\Gamma(z,r)|\le k.r$

حيث $|\Gamma(z,r)|$ يمثل طول جزء المنحني Γ الواقع داخل الدائرة التي مركزها النقطة z ونصف قطرها r

تعريف 5 [4] منحنيديني الأملس: لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$ معامل استمراريتها معرف بالعلاقة

$$w(t,h)=\sup_{|t_1-t_2|\le t}|h(t_1)-h(t_2)|\quad ...(4)$$

يُقال عن الدالة h إنها دالة ديني – مستمرة إذا حققت الشرط الآتي: $\int_0^{\pi}\frac{w(t,h)}{t}\,dt<\infty$

ويقال عن المنحني Γ إنه منحني ديني – أملس إذا كان له التمثيل $\Gamma:\ z=z(\tau)\quad 0\le\tau\le 2\pi$

وكانت الدالة $z'(\tau)$ دالة ديني مستمرة وتحقق الشرط $z'(\tau)\neq 0$ لكل $\tau\in[0,2\pi]$

وكما هو معلوم فإن أسرة منحنيات ديني الملساء هي أسرة جزئية من أسرة منحنيات كارلسون[2]

تعريف 6 [4] لنعرف من أجل النقطة $\zeta\in\Gamma$ النقطتين $\zeta_{1h}\in\Gamma$ و ζ_h بالعلاقتين

$$\zeta_h=\psi[\varphi(\zeta)e^{ih}]\quad,\quad \zeta_{1h}=\psi_1[\varphi_1(\zeta)e^{ih}]\quad,\quad h\in[0,2\pi]$$

و لنعرف لكل $f \in L_M(\Gamma)$ المؤثرين $T_h f(\zeta)$, $T_{1h} f(\zeta)$ بالعلاقتين

$$T_h f(\zeta) = f(\zeta_h) \quad ...(5) \quad , \quad T_{1h} f(\zeta) = f(\zeta_{1h}) \quad ...(6)$$

ولنعرف معاملات الاستمرارية في فضاء أورليتش $L_M(\Gamma)$ بالشكل الآتي:

$$w_M(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta} \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)} \quad ...(7) \text{ ، } w_M(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta} \| f - T_{1h} f \|_{L_M(\Gamma)} \quad ...(8)$$

<u>تعريف 7 [8] كثيرات حدود فابير</u>: تُعرف كثيرات حدود فابير $F_k(z)$ من الدرجة k: بأنها مجموع الحدود ذات القوى غير السالبة في منشور لوران للدالة $[\varphi(z)]^k$ في جوار اللانهاية أي:

$$[\varphi(z)]^k = F_k(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-j}}{z^j} \quad z \in G \quad ...(9)$$

ويكون لدينا

$$[\varphi_1(z)]^k = F_k(1/z) + \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad z \in G^- \quad ...(10)$$

النتائج والمناقشة:

تبيَن المبرهنة الآتية أن الدالتين $f_0 = f \circ \psi$ و $f_1 = f \circ \psi_1$ حيث $f \in L_M(\Gamma)$ قابلتين للمكاملة على الدائرة الواحدية وبالتالي يمكن نشر كل منها في متسلسلة فورييه.

<u>مبرهنة 1</u> إذا كان Γ منحني ديني الأملس و $f \in L_M(\Gamma)$ فإن $f_0(w) \in L_1(\gamma_0)$ و $f_1(w) \in L_1(\gamma_0)$ ويكون

$$f_0(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad ...(11) \text{ ، } f_1(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad ...(12)$$

حيث a_k و a_k أمثال فورربيه للدالتين f_0 و f_1 على الترتيب.

البرهان: بما أن $f \in L_M(\Gamma)$ فحسب (1) يكون $f \in L_1(\Gamma)$ وبما أن Γ منحني ديني الأملس فإنّه يوجد ثابتان موجبان c_1, c_2 حيث يكون $0 < c_1 \le |\varphi'(z)| \le c_2 < \infty$ [4]

وبالتالي نجد أن:

$$\int_{\gamma_0} |f_0(w)||dw| = \int_{\gamma_0} |f(\psi(w))||dw| = \int_{\Gamma} |f(z)||\varphi'(z)||dz| \le c_2 \int_{\Gamma} |f(z)||dz| < \infty$$

أي $f_0(w) \in L_1(\gamma_0)$ وبالتالي يمكننا أن ننشر الدالة f_0 في متسلسلة فورييه على الشكل $f_0(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k$.

بنفس الطريقة نبرهن أن $f_1(w) \in L_1(\gamma_0)$ و $f_1(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k$.

<u>مبرهنة مساعدة 1 [5]</u>:إذا كان Γ منحني كارلسون و $f \in L_M(\Gamma)$ فإن تكامل كوشي الشاذ للدالة f المعرف بالعلاقة $S_\Gamma f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad z \in \Gamma$ يكون موجوداً ومحدوداً أي يوجد $c > 0$ حيث يتحقق:

$$\| S_\Gamma f \|_{L_M(\Gamma)} \le c \; \| f \|_{L_M(\Gamma)} \quad ...(13)$$

<u>مبرهنة مساعدة 2 [3]</u>: إذا كان $f \in L_1(\Gamma)$ ،عندئذٍ لتكامل نوع كوشي قيمتين حدوديتين من جهتي المنحني Γ نرمز لهما بـ. f^-, f^+ تحليليان في G^-, G على الترتيب ويرتبطان مع الدالة f من خلالٍ علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\left.\begin{array}{c} f^{+}(z)=S_{\Gamma}f(z)+\frac{1}{2}f(z) \\ f^{-}(z)=S_{\Gamma}f(z)-\frac{1}{2}f(z) \\ f=f^{+}-f^{-} \end{array}\right\} \quad ....(14)$$

ملاحظة: من العلاقة $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ نجد أنه من أجل تقريب الدالة f على المنحني Γ يكفي أن نقوم بتقريب الدالتين f^{+},f^{-} على G^{-},G ولأجل الوصول إلى هذه الغاية سنقوم بتشكيل كثيرة حدود جبرية من الدرجة n بقوى z لتقريب الدالة f^{+} وكثيرة حدود من الدرجة n بقوى $1/z$ لتقريب الدالة f^{-} .

في المبرهنة الآتية سنشكل كثيرة حدود بقوى z حيث $z\in G$ ولتكن $P_n(z,f)$ لتقريب الدالة f^{+} وذلك باستخدام طريقة مجاميع دذياديك [1].

مبرهنة 2: إذا كان Γ منحني ديني الأملس عندئذٍ من أجل كل $f\in L_M(G)$ فإن

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta_{-t})}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k F_k(z)=P_n(z,f) \qquad z\in G \quad ...(15)$$

حيث $F_k(z)$ كثيرات حدود فابير من الدرجة k، والنقطة $\zeta_{-t}=\psi\left[\varphi(\zeta)e^{-it}\right]\in\Gamma$.

البرهان:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left\{\psi\left[e^{i(\tau-t)}\right]\right\}K_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0\left(e^{i(\tau-t)}\right)K_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0\left(e^{it}\right)K_n(\tau-t)dt=$$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{ik\tau}\int_{-\pi}^{\pi}f_0\left(e^{it}\right)e^{-ikt}dt=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k a_k e^{ik\tau}=T_n\left(e^{i\tau}\right) \quad ....(16)$$

حيث

$$T_n(\zeta)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k a_k\zeta^k \qquad ...(17)$$

بما أنه لكل $\zeta\in\Gamma$ يوجد $\tau\in[0,2\pi[$ حيث $\varphi(\zeta)=e^{i\tau}$ وبالتعويض في العلاقة (16) نجد أن:

$$T_n\left(\varphi(\zeta)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left\{\psi\left[\varphi(\zeta)e^{-it}\right]\right\}K_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\zeta_{-t}\right)K_n(t)dt \quad ...(18)$$

من جهة أخرى باستخدام العلاقتين (9) و (17) نجد أن:

$$T_n\left(\varphi(\zeta)\right)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k a_k\left(\varphi(\zeta)\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k\left[F_k(\zeta)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_{-j}}{\zeta^j}\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{-k}a_{-k}}{\varphi^k(\zeta)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k F_k(\zeta)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\zeta^k}=P_n(\zeta,f)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\zeta^k} \qquad ...(19)$$

وباستخدام صيغة كوشي التكاملية حيث $z\in G=\operatorname{int}\Gamma$ نجد أن:

$$P_n(z,f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{P_n(\zeta,f)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{T_n\left(\varphi(\zeta)\right)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\zeta^k}}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{T_n\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z}d\zeta$$

وبتعويض العلاقة (18) نجد أن:

$$P_n(z,f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\zeta-z}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\zeta_{-t}\right)K_n(t)dt\,d\zeta=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt\int_{\Gamma}\frac{f\left(\zeta_{-t}\right)}{\zeta-z}d\zeta$$

في المبرهنة الآتية نشكل كثيرة حدود جبرية بقوى $1/z$ لكل $z\in G^{-}$ لتقرب الدالة f^{-}.

مبرهنة 3 إذا كان Γ منحني ديني الأملس عندئذٍ من أجل كل $f\in L_M(G^{-})$ فإن:

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta_{1(-t)})}{\zeta - z}d\zeta = -\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k F_k(1/z) = Q_n(1/z,f) \quad z\in G^- \quad ...(20)$$

البرهان: طريقة المبرهنة نفسها(2).

ندرس في المبرهنة الآتية تقريب الدالة f^+ إلى كثيرة الحدود $P_n(z,f)$ المشكلة في المبرهنة (2).

مبرهنة 4 إذا كان Γ منحني ديني الأملس و $f\in L_M(\Gamma)$ فإنه يوجد ثابت موجب c_5 حيث يكون:

$$\left\| f^+ - P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \le c_5 w_M(\frac{1}{n},f)$$

حيث $w_M(\frac{1}{n},f)$ معامل الاستمرارية في فضاء أورليتش.

البرهان: بما أن $K_n(t)$ زوجية فإنه يمكن كتابة العلاقة (15) بالشكل:

$$P_n(z,f) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\left[f(\zeta_t)+f(\zeta_{(-t)})\right]\frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad z\in G$$

ومن العلاقة (5) نجد أن:

$$P_n(z,f) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\left[T_t f(\zeta)+T_{-t} f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$P_n(z,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[(T_t f)^+(z)+(T_{-t} f)^+(z)\right]dt \quad z\in G \quad ...(21)$$

من أجل النقطة $z'\in G$ ومن العلاقة (2) يكون لدينا:

$$f^+(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^+(z')K_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f^+(z')K_n(t)dt \quad ...(22)$$

وبطرح (21) من (22) نجد:

$$f^+(z') - P_n(z',f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left\{2f^+(z') - \left[(T_t f)^+(z')+(T_{-t} f)^+(z')\right]\right\}dt$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $z'\to z\in\Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من (14) نجد أن

$$f^+(z) - P_n(z,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[S_\Gamma\left(f-(T_t f)\right)(z)+S_\Gamma\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right]dt$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left(f-(T_t f)\right)(z)+\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right]dt$$

وبالتالي باستخدام النظيم في الفضاء $L_M(\Gamma)$ نجد أن:

$$\left\| f^+ - P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} = \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|f^+(z) - P_n(z,f)\right||g(z)||dz|$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[S_\Gamma\left(f-(T_t f)\right)(z)+S_\Gamma\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right]dt\right||g(z)||dz|$$
$$+\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left(f-(T_t f)\right)(z)+\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right]dt\right||g(z)||dz|$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left|S_\Gamma\left(f-(T_t f)\right)(z)\right|+\left|S_\Gamma\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right|\right]dt\right\}|g(z)||dz|$$
$$+\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left|\left(f-(T_t f)\right)(z)\right|+\left|\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right|\right]dt\right\}|g(z)||dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left\{\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\leq 1}}\int_{\Gamma}\left[\left|S_\Gamma\left(f-(T_t f)\right)(z)\right|+\left|S_\Gamma\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right|\right]|g(z)||dz|\right\}dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left\{\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\leq 1}}\int_{\Gamma}\left[\left|\left(f-(T_t f)\right)(z)\right|+\left|\left(f-(T_{-t} f)\right)(z)\right|\right]|g(z)||dz|\right\}dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left\|S_\Gamma\left(f-(T_t f)\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma\left(f-(T_{-t} f)\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\|f-T_t f\|_{L_M(\Gamma)}+\|f-T_{-t} f\|_{L_M(\Gamma)}\right]dt$$

ومن العلاقة (13) ينتج لدينا:

$$\left\|f^{+}-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_3\int_0^{\pi} K_n(t)\left\{\|f-T_t f\|_{L_M(\Gamma)}+\|f-T_{-t} f\|_{L_M(\Gamma)}\right\}dt$$

و باستخدام العلاقتين (7) و (3) نجد أن:

$$\left\|f^{+}-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq 2c_3\int_0^{\pi} K_n(t)\, w_M(t,f)\,dt\leq c_4 w_M(\frac{1}{n},f)\int_0^{\pi} K_n(t)\,(nt+1)dt\leq$$

$$\leq c_5 w_M(\frac{1}{n},f)$$

ندرس في المبرهنة الآتية تقريب الدالة f^{-} إلى كثيرة الحدود $Q_n(1/z,f)$ المشكلة في المبرهنة (3).

<u>مبرهنة 5</u> إذا كان Γ منحني ديني الأملس و $f\in L_M(\Gamma)$ عندئذٍ فإنه يوجد ثابت موجب c_8 حيث يكون:

$$\left\|f^{-}-Q_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\leq c_8 w_M(\frac{1}{n},f)$$

<u>البرهان:</u> بما أن $K_n(t)$ زوجية فإنه يمكن كتابة العلاقة (20) بالشكل:

$$Q_n(1/z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\left[f(\zeta_{1(t)})+f(\zeta_{1(-t)})\right]\frac{d\zeta}{\zeta-z}\qquad z\in G^{-}$$

ومن العلاقة (6) نجد أن:

$$Q_n(1/z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi} K_n(t)dt\int_{\Gamma}\left[T_{1t} f(\zeta)+T_{1(-t)} f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

$$Q_n(1/z,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left(T_{1t} f\right)^{-}(z)+\left(T_{1(-t)} f\right)^{-}(z)\right]dt\qquad z\in G^{-}\qquad ...(23)$$

من أجل النقطة $z''\in G^{-}$ ومن العلاقة (2) يكون لدينا:

$$f^{-}(z'')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-}(z'')K_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f^{-}(z'')K_n(t)dt\qquad ...(24)$$

وبطرح (23) من (24) نجد:

$$f^{-}(z'')-Q_n(1/z'',f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left\{2f^{-}(z'')-\left[\left(T_{1t} f\right)^{-}(z'')+\left(T_{1(-t)} f\right)^{-}(z'')\right]\right\}dt$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $z''\to z\in\Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من (14) نجد أن

$$f^{-}(z)-Q_n(1/z,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[S_\Gamma\left(f-(T_{1t} f)\right)(z)+S_\Gamma\left(f-\left(T_{1(-t)} f\right)\right)(z)\right]dt$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\left[\left(f-(T_{1t} f)\right)(z)+\left(f-\left(T_{1(-t)} f\right)\right)(z)\right]dt$$

وبالتالي باستخدام النظيم في الفضاء $L_M(\Gamma)$ نجد أن:

$$\left\|f^{-}-Q_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}=\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|f^{-}(z)-Q_n(1/z,f)\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[S_{\Gamma}\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)+S_{\Gamma}\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right]dt\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$+\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)+\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right]dt\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[\left|S_{\Gamma}\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)\right|+\left|S_{\Gamma}\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right|\right]dt\right\}\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$+\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[\left|\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)\right|+\left|\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right|\right]dt\right\}\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left\{\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left[\left|S_{\Gamma}\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)\right|+\left|S_{\Gamma}\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right|\right]\left|g(z)\right|\left|dz\right|\right\}dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left\{\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}}\int_{\Gamma}\left[\left|\left(f-(T_{1t}f)\right)(z)\right|+\left|\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)(z)\right|\right]\left|g(z)\right|\left|dz\right|\right\}dt$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[\left\|S_{\Gamma}\left(f-(T_{1t}f)\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|S_{\Gamma}\left(f-\left(T_{1(-t)}f\right)\right)\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left[\left\|f-T_{1t}f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{1(-t)}f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]dt$$

ومن العلاقة (13) ينتج لدينا:

$$\left\|f^{-}-Q_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le c_6\int_0^{\pi}K_n(t)\left\{\left\|f-T_{1t}f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{1(-t)}f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right\}dt$$

و باستخدام العلاقتين (8) و (3) نجد أن:

$$\left\|f^{+}-Q_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le 2c_6\int_0^{\pi}K_n(t)\,w_M(t,f)\,dt\le c_7w_M(\frac{1}{n},f)\int_0^{\pi}K_n(t)\,(nt+1)\,dt\le$$

$$\le c_8w_M(\frac{1}{n},f)$$

سنعرض الآن المبرهنة الرئيسة في هذه المقالة التي تختص بتقريب الدوال العقدية من فضاء أورليتش إلى دوال كسرية.

<u>مبرهنة 6</u> إذا كان $f\in L_M(\Gamma)$ عندئذٍ من أجل أي عدد طبيعي n توجد دالة كسرية R_n من الدرجة n على الأكثر و ثابت موجب c_9 بحيث يتحقق:

$$\left\|f-R_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le c_9\left\{w_M(\frac{1}{n},f)+w_M(\frac{1}{n},f)\right\}$$

<u>البرهان:</u> بوضع $R_n(z,f)=P_n(z,f)-Q_n(z,f)$ وباستخدام العلاقة $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ وبالاستفادة من المبرهنتين (5) و (6) يكون لدينا:

$$\left\|f-R_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\le\left\|f^{+}-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f^{-}-Q_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\le c_5w_M(\frac{1}{n},f)+c_8w_M(\frac{1}{n},f)\le c_9\left\{w_M(\frac{1}{n},f)+w_M(\frac{1}{n},f)\right\}$$

حيث $c_9=\max\left\{c_5,c_8\right\}$.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى تقريب الدوال العقدية من فضاء أورليتش على أسرة منحنيات ديني الملساء .

أما بالنسبة للتوصيات: نوصي بدراسة تقريب الدوال العقدية من فضاء أورليتش على منحنيات أكثر عمومية من منحنيات ديني الملساء كأسرة منحنيات كارلسون على سبيل المثال.

المراجع:

[1] ANDRIEVSKII.V.V; BELYI.V.I; DZJADYK.V.K. *Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable*. World Federation Pub.Com, Atlanta, 1995.

[2] BÖTTCHER.A; KARLOVICH.A.Y. *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*. Springer Basel AG, Washington D.C, 1997, 407.

[3] GOLUZIN.G.M. *Geometric Theory of Functions of a complex variables*. vol 26, translation of Mathematical Monographs, U.S.A, 1968, 676.

[4] ISRAFILOV.D.M; OKTAY. B; AKGUN.R. *Approximation in Smirnov–Orlicz classes*. vol 40 (60), Glasnik mathematicki, Croatia, 2005, 87-102.

[5] KARLOVICH.A.Y. *Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces*. Math Nachr, 1996, 187-222.

[6] MAMEDKHANOV.J.I; DADASHOVA.I.B. *Rational Approximation On Closed Curves.* Vol 2(3), Applied Mathematics, 2012, 90-93.

[7] RAO,M.M; REN.Z.D, *Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekken, New York, 1991, 445.

[8] SUETIN.P.K. *Series of Faber polynomials* .Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1998, 338.