

عدد السيطرة المرمزة في البيان

د. محمد حسن*

د. محسن الحسن**

مازن مصطفى***

(تاريخ الإيداع 2 / 12 / 2020. قَبِلَ للنشر في 9 / 3 / 2021)

□ ملخص □

ليكن $G(V,E)$ بيان بسيط ومتصل ومنتهي . نسمي $f : V(G) \rightarrow \{-1,1\}$ دالة سيطرة مرمزة للبيان G إذا كان من أجل كل رأس $v \in V(G)$ ، فإن المجاورات المغلقة لذلك الرأس تحوي عدد من الرؤوس تحمل الوزن 1 أكثر من عدد الرؤوس التي تحمل الوزن -1 . كما يعرف عدد السيطرة المرمزة في البيان G ونرمزه $\gamma_s(G)$ بأنه أصغر وزن لمجموعة من مجموعات السيطرة المرمزة لذلك البيان G . في هذا المقال نحسب عدد السيطرة المرمزة في الجداء الديكارتي لمسارين P_m و P_n من أجل $m=8$ و n كفي.

الكلمات المفتاحية: مسار، الجداء الديكارتي، دالة السيطرة المرمزة، عدد السيطرة المرمزة.

* أستاذ- قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** مدرس- قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)- قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية البريد الالكتروني:

mazenmostafa1979@gmail.com

Signed Domination Number of Graph

Dr. Mohammad Hassan^{*}
Dr. Muhsin AL Hassan^{**}
Mazen Mostafa^{***}

(Received 2 / 12 / 2020. Accepted 9 / 3 /2021)

□ ABSTRACT □

Let $G(V, E)$ be a finite connected simple graph. A function $f : V(G) \rightarrow \{-1, 1\}$ is a signed dominating function if for every vertex $v \in V(G)$, the closed neighborhood of v contains more vertices with function values 1 than with -1. The signed domination number $\gamma_s(G)$ of G is the minimum weight of a signed dominating function on G . In this paper, we calculate the signed domination numbers of the Cartesian product of two paths P_m and P_n for $m=8$ and arbitrary n .

Keywords: path, Cartesian product, signed dominating function, signed domination number.

^{*} Professor ,Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

^{**} Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

^{***} Postgraduate Student ,Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia ,Syria. E-mail: mazenmostafa1979@gmail.com.

مقدمة:

ليكن G بيان بسيط ومتصل ومنتهي مع مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومجموعة الأضلاع $E(G)$ ، نعرف المجاورات المفتوحة للرأس v ونرمزها $N(v)$ بأنها مجموعة الرؤوس التي تشترك مع الرأس v بضلع، كما نعرف المجاورات المغلقة للرأس v ونرمزها $N[v]$ بأنها المجاورات المفتوحة لذلك الرأس بالإضافة للرأس v ذاته.

نقول عن الدالة f أنها دالة سيطرة مرمزة للبيان G إذا كانت المجاورات المغلقة لأي رأس من رؤوس البيان تحوي رؤوس تحمل الوزن 1 أكثر من الرؤوس التي تحمل الوزن -1. وعدد السيطرة المرمزة للبيان G ونرمزه $\gamma_s(G)$ بأنه أصغر وزن لدالة سيطرة مرمزة للبيان G .

في [1] درس Dunbar مفهوم السيطرة المرمزة في البيان وكذلك درس آخرون هذا المفهوم في [1, 2, 3, 4]. وفي [5] أوجد Haas و Wexler عدد السيطرة المرمزة في البيان $P_2 \times P_n$ و $P_2 \times C_n$.

وفي [6] أعطى Hosseini الحد الأعلى والأدنى لعدد السيطرة المرمزة لأي بيان. وفي [7,8] أوجد Hassan و AL Mostafa و Hassan عدد السيطرة المرمزة للبيان $P_m \times P_n$ من أجل $m=3, 4, 5, 6, 7$ و n كيفي.

نعرف $A_j = \{v \in V : f(v) = 1\}$ و $B = \{v \in V : f(v) = -1\}$ ولتكن K_j رؤوس العمود j والمجموعتين $A_j = \{v \in K_j : f(v) = 1\}$ ، $B_j = \{v \in K_j : f(v) = -1\}$.

عند تمثيل البيان $P_m \times P_n$ لإيجاد دالة السيطرة المرمزة نعتبر أن الدوائر السوداء تشير إلى رؤوس البيان التي تحمل الوزن -1 والرؤوس البيضاء تشير إلى الرؤوس التي تحمل الوزن 1.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بأنه يعالج مشكلة إيجاد العدد الأقل من الرؤوس التي تحمل الوزن 1 مع بقاء كل رأس من رؤوس البيان يحقق دالة السيطرة المرمزة. ومن الناحية التطبيقية تكمن أهميته في إيجاد العدد الأقل من الرؤوس أو الأشياء التي تحمل صفة إيجابية ونتيجة ارتباطها مع الرؤوس أو الأشياء التي تحمل الصفة السلبية تبقى الصفة الإيجابية هي الصفة الراجحة. ويهدف البحث إلى إيجاد عدد السيطرة المرمزة للجداء الديكارتي لمسارين $P_m \times P_n$ حالة $m=8$ و n عدد كيفي.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من مفهومي دالة السيطرة المرمزة و عدد السيطرة المرمزة للبيان.

النتائج و المناقشة:

نقدم في هذا المقال مبرهنة لإيجاد عدد السيطرة المرمزة لجداء مسارين بالإضافة إلى مبرهنة تمهيدية تفيد في إثباتها.

تمهيدية: لتكن f دالة سيطرة مرمزة للبيان $P_8 \times P_n$ ولتكن B مجموعة رؤوس البيان التي تحمل الوزن -1. عندئذ أياً كانت $1 \leq j \leq n-1$ فإن $\sum_{k=j}^{j+1} |B_k| \leq 7$.

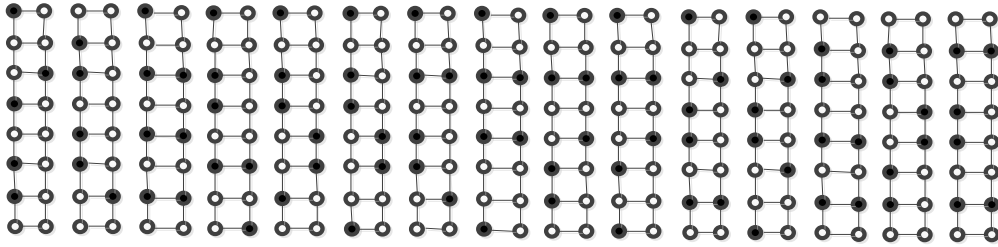
البرهان:

أياً كانت $1 \leq j \leq n$ فإن $|B_j| \leq 5$ وبالتالي فإن حالة $|B_j| = 0$ و $|B_j| = 1$ و $|B_j| = 2$ محققة وضوحاً. و في حالة $|B_j| = 5$ نلاحظ أن العمود $j-1$ والعمود $j+1$ يحوي رأس واحد على الأكثر من رؤوس المجموعة B . وبالتالي فإن حالة $|B_j| = 3$ و $|B_j| = 5$ محققة أيضاً. أما في حالة $|B_j| = 4$ نميز الحالات التالية:

1- إذا كانت $(1,j), (4,j), (6,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (3,j), (5,j), (6,j) \in B$ فإن العمود $j+1$ يحوي رأس واحد على الأكثر من رؤوس المجموعة B .

2- إذا كانت $(1,j), (3,j), (5,j), (7,j) \in B$ فإن العمود $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B .

3- في بقية الحالات فإن العمود $j+1$ يحوي رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B .



(الشكل 1 بين حالة $|B_j|=4$)

مبرهنة: أياً كان العدد الصحيح $n \geq 5$ فإن:

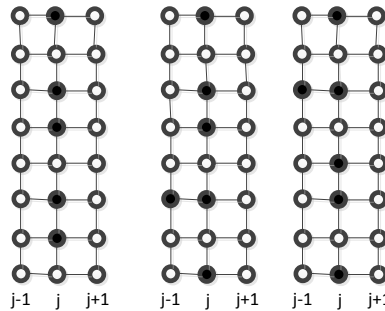
$$\begin{aligned} \gamma_s(P_8 \times P_n) &= \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 8: n \equiv 0 \pmod{5}, \\ \gamma_s(P_8 \times P_n) &= \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 9: n \equiv 1, 2 \pmod{5}, \\ \gamma_s(P_8 \times P_n) &= \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 10: n \equiv 3 \pmod{5}, \\ \gamma_s(P_8 \times P_n) &= \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 11: n \equiv 4 \pmod{5}. \end{aligned}$$

البرهان:

لنثبت أولاً أنه أياً كانت $2 \leq j \leq n-3$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_j| \leq 14$ نناقش الحالات التالية:

الحالة الأولى: حالة $|B_j| = 5$

في هذه الحالة فإن أحد العمودين $j-1$ أو $j+1$ يحوي على رأس واحد من رؤوس المجموعة B على الأكثر وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+1} |B_k| \leq 6$ وحسب التمهيدية فإن $|B_{j+2}| + |B_{j+3}| \leq 7$ وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_k| \leq 13$.



(الشكل 2 بين حالة $|B_j|=5$)

الحالة الثانية: حالة $|B_j| = 4$

نناقش الحالات التالية:

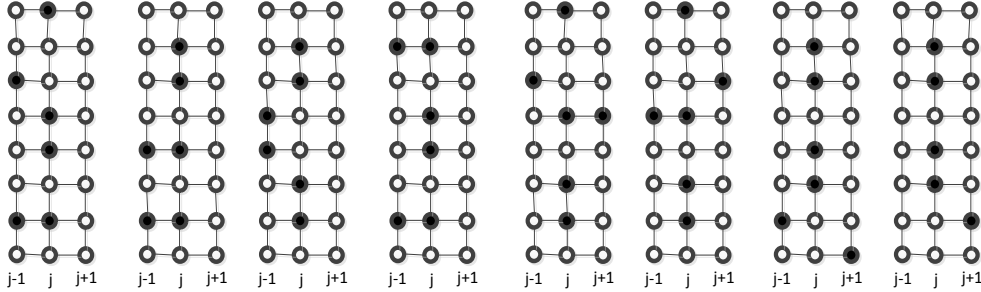
a- إذا كانت $(1,j), (4,j), (5,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (3,j), (5,j), (7,j) \in B$

$$(2,j), (4,j), (5,j), (7,j) \in B \quad \text{أو} \quad (2,j), (3,j), (6,j), (7,j) \in B$$

$$(2,j), (3,j), (5,j), (6,j) \in B \quad \text{أو} \quad (1,j), (4,j), (6,j), (7,j) \in B$$

فإن العمودين $j-1$ و $j+1$ يحويان على رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي $|B_K| \leq 6$ و $\sum_{j-1}^{j+1} |B_K|$ وحسب

$$\text{التمهيدية فإن } |B_{j+2}| + |B_{j+3}| \leq 7 \text{ وبالتالي } \sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 13$$



(الشكل 3 بين الحالة a)

$$(1,j), (1,j), (3,j), (4,j), (7,j) \in B \quad \text{أو} \quad (1,j), (3,j), (4,j), (6,j) \in B \quad \text{إذا كانت } -b$$

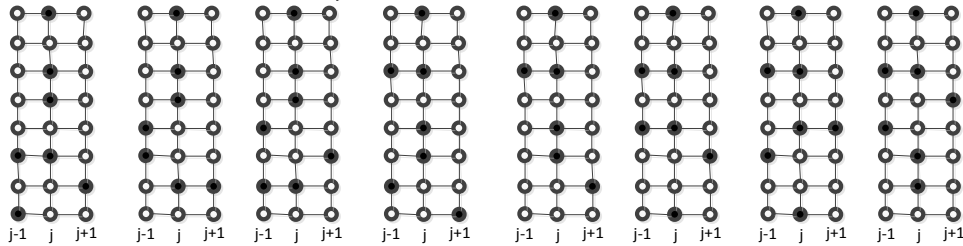
$$(1,j), (3,j), (5,j), (8,j) \in B \quad (1,j), (3,j), \quad \text{أو} \quad (3,j), (5,j), (6,j) \in B$$

$$(1,j), (3,j), (1,j), (3,j), (4,j), (8,j) \in B \quad \text{أو} \quad (6,j), (7,j) \in B$$

$$(1,j), (3,j), (6,j), (7,j) \in B \quad \text{أو} \quad (5,j), (8,j) \in B$$

فإن العمودين $j-1$ و $j+1$ معاً يحويان ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B ومنه $|B_K| \leq 7$ و $\sum_{j-1}^{j+1} |B_K|$ وحسب

$$\text{التمهيدية فإن } |B_{j+2}| + |B_{j+3}| \leq 7 \text{ وبالتالي } \sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$$

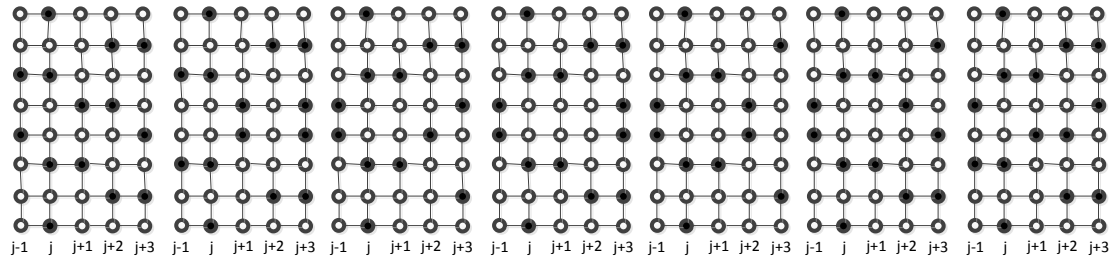


(الشكل 4 بين الحالة b)

$$(1,j), (3,j), (6,j), (8,j) \in B \quad \text{إذا كانت } -c$$

فإن كل من العمودين $j-1$ و $j+1$ يحوي رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B وعندئذ فإن العمودين $j+2$ و $j+3$

يحويان ستة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر.

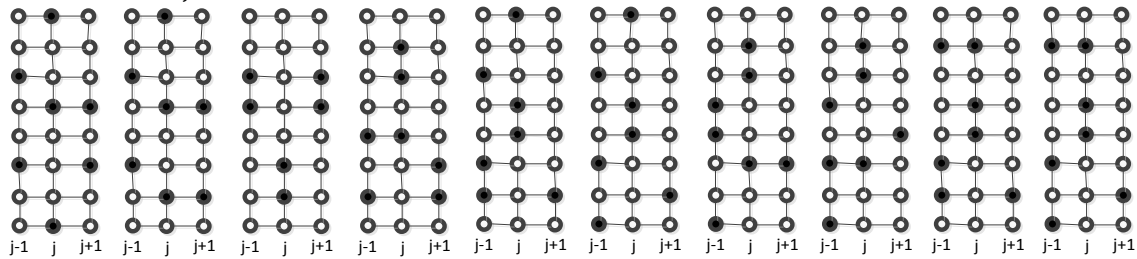


(الشكل 5 حالة C)

الحالة الثالثة: حالة $|B_j| = 3$

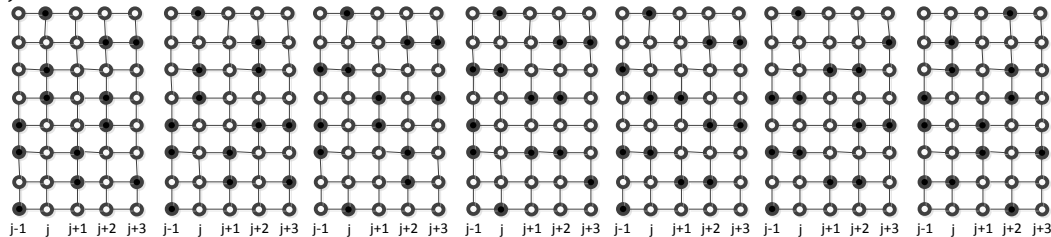
نناقش الحالات التالية:

-a إذا $(1,j), (4,j), (8,j) \in B$ أو $(1,j), (4,j), (7,j) \in B$ أو $(1,j), (4,j), (7,j) \in B$ أو $(1,j), (6,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (3,j), (5,j) \in B$ فإن العمودين $j-1$ و $j+1$ يحويان أربعة رؤوس على الأكثر من رؤوس B . وبما أن $|B_{j+2}| + |B_{j+3}| \leq 7$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 6 بين الحالة a)

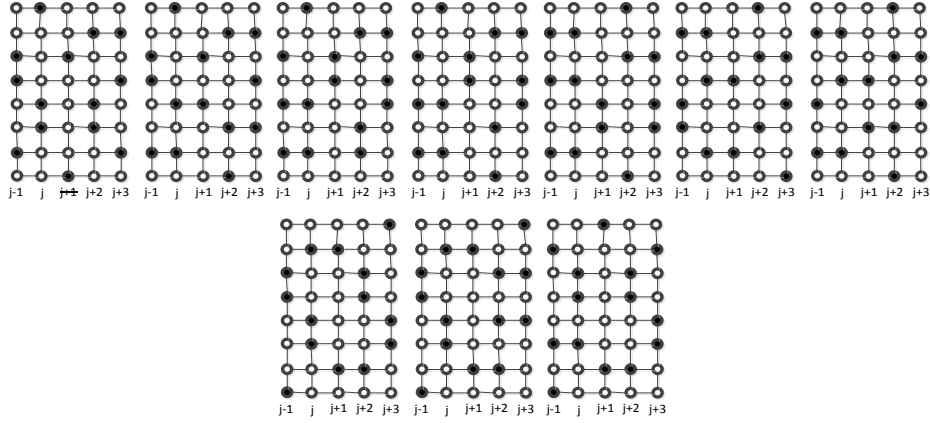
-b إذا $(1,j), (3,j), (4,j) \in B$ أو $(1,j), (3,j), (8,j) \in B$ أو $(1,j), (3,j), (8,j) \in B$ أو $(1,j), (4,j), (6,j) \in B$ أو $(2,j), (3,j), (7,j) \in B$. فإن العمود $j-1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B والعمود $j+1$ يحوي رأسين على الأكثر من B و العمودين $j+2$ و $j+3$ يحويان معاً على خمسة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 7 حالة b)

-c إذا $(1,j), (5,j), (6,j) \in B$ أو $(1,j), (5,j), (7,j) \in B$ أو $(1,j), (5,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (4,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (5,j), (6,j) \in B$ أو $(3,j), (4,j), (6,j) \in B$.

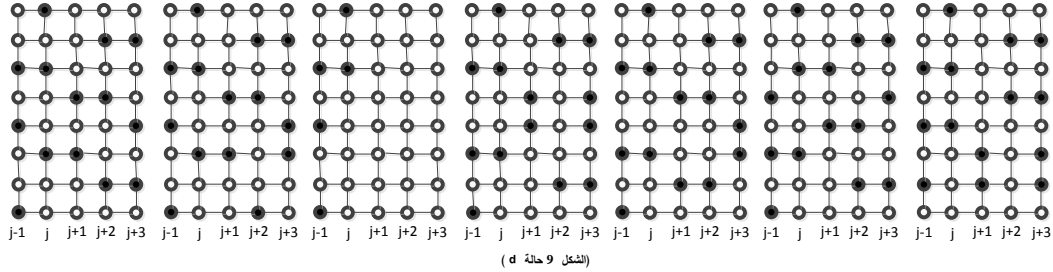
فإن سلسلة عدد الرؤوس للمجموعة B في الأعمدة الخمسة هي $(3,3,2,3,3)$ وبالتالي فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



-d إذا كانت $(1,j), (3,j), (6,j) \in B$.

فإن العمود $j-1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B والعمود $j+1$ يحوي رأسين والعمودان $j+2$

و $j+3$ يحويان ستة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.

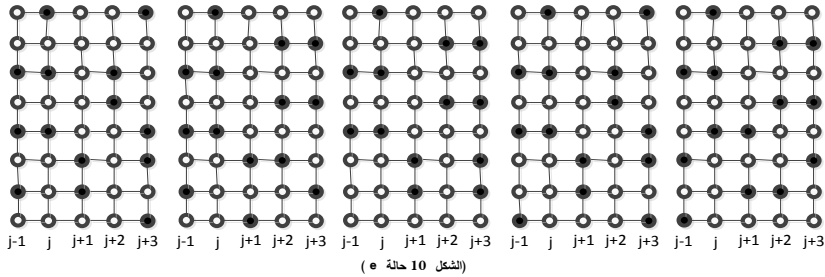


-e إذا كانت $(1,j), (3,j), (5,j) \in B$.

فإن العمود $j-1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B وكل من العمودان $j+1$ و $j+2$ يحوي رأسين،

وفي هذه الحالة فإن العمود $j+3$ يحوي أربعة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي فإن

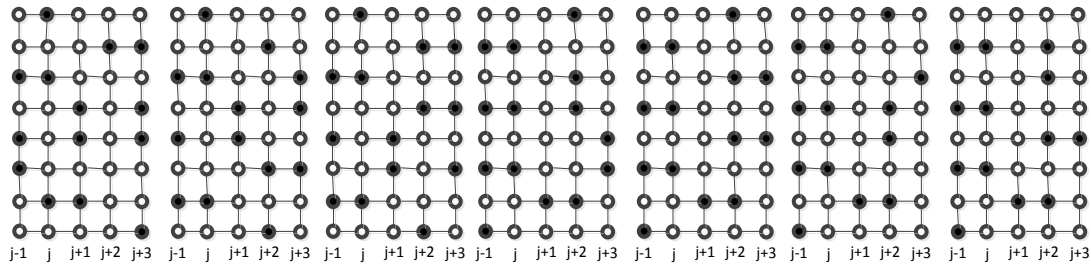
$$\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$$



-f إذا كانت $(1,j), (3,j), (7,j) \in B$ أو $(2,j), (4,j), (6,j) \in B$.

فإن سلسلة عدد الرؤوس للمجموعة B في الأعمدة الخمسة هي $(3,3,3,1,4)$ أو $(3,3,2,3,3)$ أو $(4,3,1,4,2)$

$$\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$$



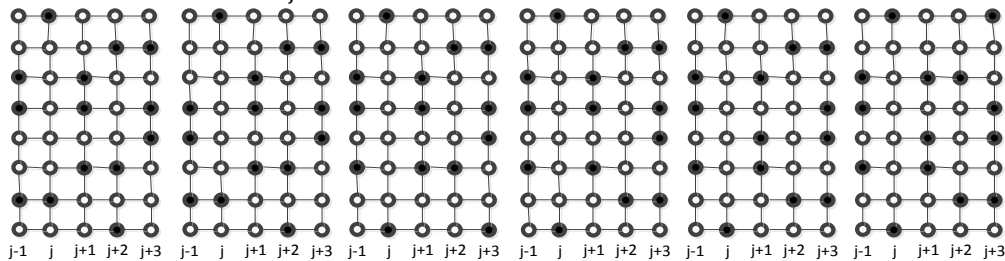
(الشكل 11 حالة f)

الحالة الثالثة: $|B_j| = 2$

في هذه الحالة نميز الحالات التالية:

a - إذا كانت $(1, j), (7, j) \in B$ أو $(8, j), (1, j) \in B$.

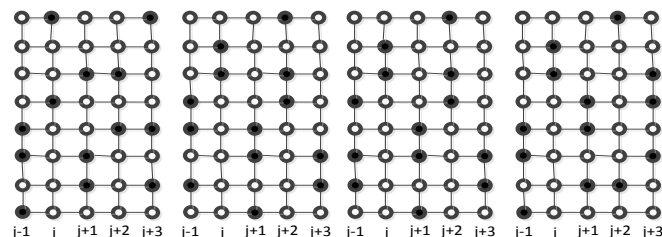
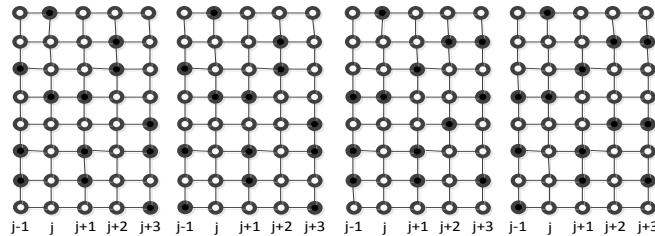
فإن كل من العمودين $j-1$ و $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B، والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان معاً على ستة رؤوس من رؤوسها على الأكثر، وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 12 حالة a)

b - إذا كانت $(1, j), (4, j) \in B$ أو $(2, j), (3, j) \in B$

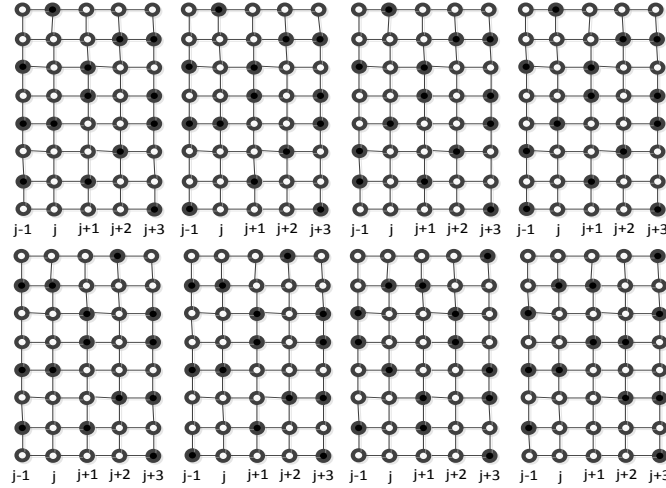
فإن كل من العمودين $j-1$ و $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان معاً على خمسة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر، وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 13 حالة b)

c - إذا كانت $(1, j), (5, j) \in B$ أو $(2, j), (5, j) \in B$

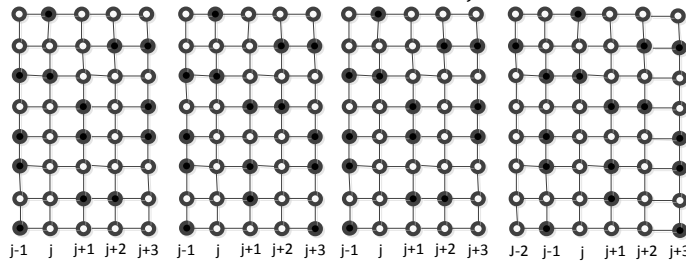
فإن كل من العمودين $j-1$ و $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B، والعمود $j+2$ يحوي على رأسين من رؤوس B على الأكثر والعمود $j+3$ يحوي أربعة رؤوس من B وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 14 حالة c)

-d إذا كانت $(1, j), (3, j) \in B$.

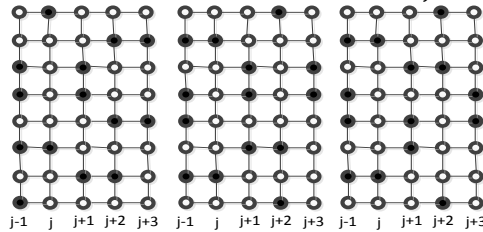
فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر وعندئذ فإن كل من العمودان $j+1$ و $j+2$ يحوي رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B ، والعمود $j+3$ يحوي ثلاثة أو أربعة رؤوس من رؤوس B وفي كلا الحالتين فإن العمود $j-2$ يحوي على رأس واحد من رؤوس المجموعة B على الأكثر، وبما أنه في حالة $|B_j| = 4$ أو $|B_j| = 3$ فإن $\sum_{j+3}^{j+7} |B_K| \leq 14$. وبما أن العمود $j+3$ يحوي ثلاث أو أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B فإن $\sum_{j-2}^{j+7} |B_K| \leq 26$ وبالتالي $\sum_{j+4}^{j+7} |B_K| \leq 10$.



(الشكل 15 حالة d)

-e إذا كانت $(1, j), (6, j) \in B$ أو $(2, j), (7, j) \in B$

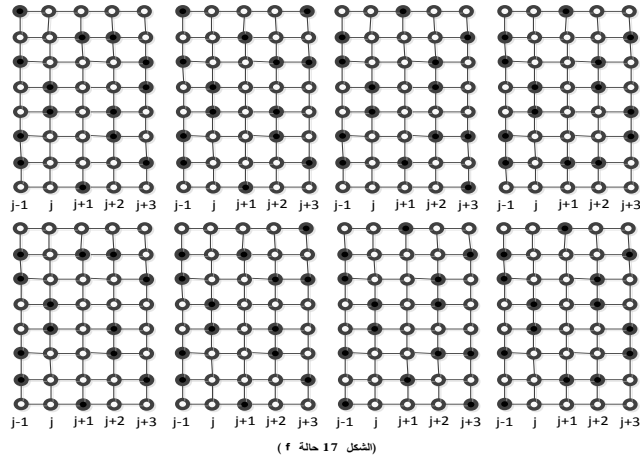
فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر وعندئذ كل من العمودين $j+1$ و $j+2$ يحوي على ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر وكذلك العمود $j+3$ يحوي رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



(الشكل 16 حالة e)

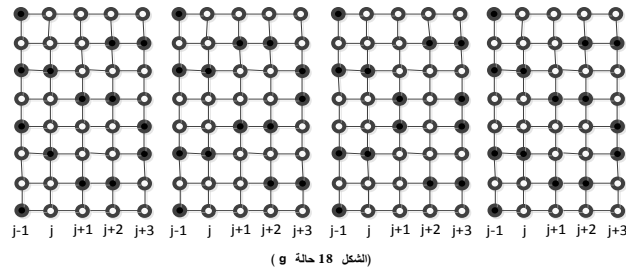
-f إذا كانت $(4, j), (5, j) \in B$

فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر وعندئذ العمود $j+1$ يحوي على رأسين من رؤوس B و كل من العمودين $j+2$ و $j+3$ يحوي ثلاثة على الأكثر من رؤوس B وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



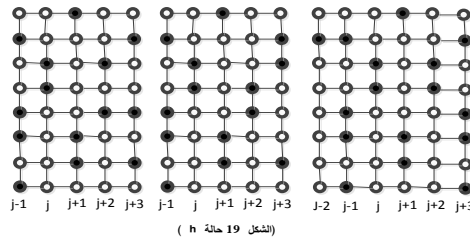
$-g$ إذا كانت $(6, j), (3, j) \in B$.

فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر، وعندئذ العمود $j+1$ يحوي على رأسين من رؤوس B على الأكثر و العمودين $j+2$ و $j+3$ يحويان ستة رؤوس من رؤوس المجموعة B . وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



$-h$ إذا كانت $(4, j), (3, j) \in B$.

فإن كل من العمودين $j-1$ و $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر، وفي هذه الحالة فإن العمود $j+2$ يحوي على رأسين من رؤوس B على الأكثر والعمود $j+3$ يحوي ثلاثة. أما في حالة $(3, j+2), (4, j+2) \in B$ فإن العمود $j+3$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس B على الأكثر، ولكن في حالة $|B_j| = 4$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$ أي $\sum_{j+3}^{j+7} |B_K| \leq 10$ ومنه $\sum_{j-2}^{j+7} |B_K| \leq 25$ وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.

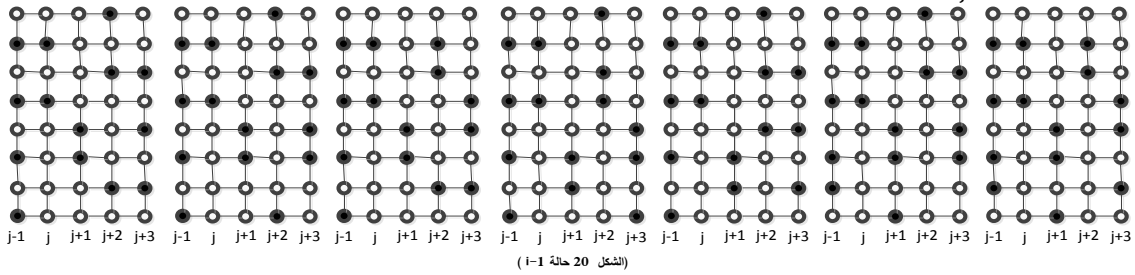


$-i$ إذا كانت $(4, j), (2, j) \in B$

نميز الحالات التالية:

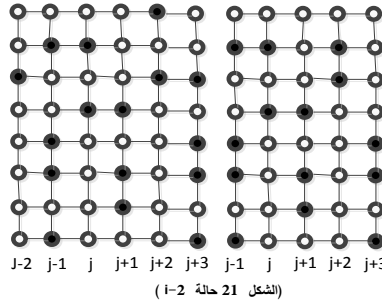
$i-1$: إذا كانت $(2, j-1), (4, j-1), (6, j-1), (7, j-1) \in B$ أو $(2, j-1), (4, j-1), (6, j-1), (8, j-1) \in B$.

فإن سلسلة عدد رؤوس المجموعة B في الاعمدة الخمسة هي (4,2,3,2,3) أو (4,2,2,3,3) وفي كلا الحالتين فإن



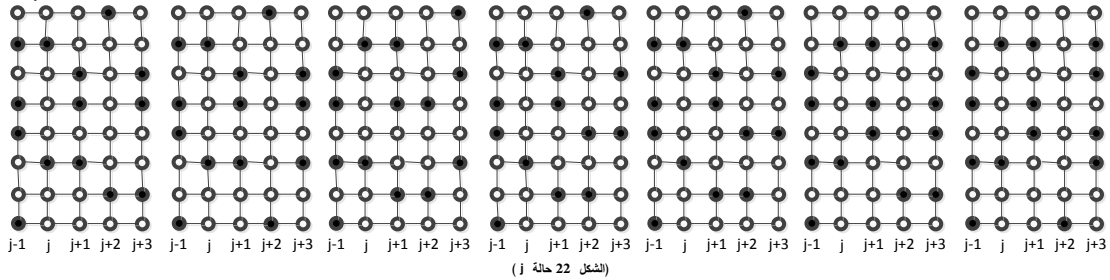
$i-2$: إذا كانت $(2,j-1), (5,j-1), (6,j-1), (8,j-1) \in B$

فإن سلسلة عدد رؤوس المجموعة B في الاعمدة الخمسة هي (4,2,3,2,3) أو (4,2,3,2,4) ونعلم أنه في حالة $|B_j| = 3$ أو $|B_j| = 4$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$ وبالتالي $\sum_{j+3}^{j+7} |B_K| \leq 14$ وبما أن العمود $j+3$ يحوي ثلاث أو أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B فإن $\sum_{j+4}^{j+7} |B_K| \leq 10$ ومنه $\sum_{j-2}^{j+7} |B_K| \leq 26$.



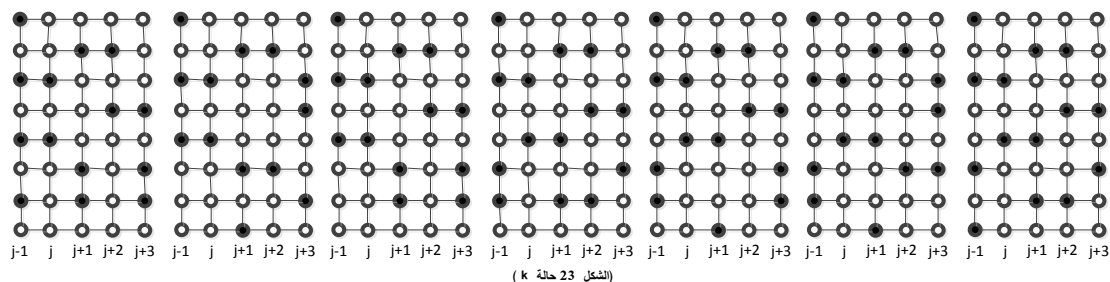
$j -$ إذا كانت $(2,j), (6,j) \in B$

فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر وفي هذه الحالة فإن العمود $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس B والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان خمسة رؤوس على الأكثر ومنه $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



$k -$ إذا كانت $(3,j), (5,j) \in B$

في هذه الحالة فإن العمود $j-1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس B على الأكثر و العمود $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان خمسة رؤوس على الأكثر وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.



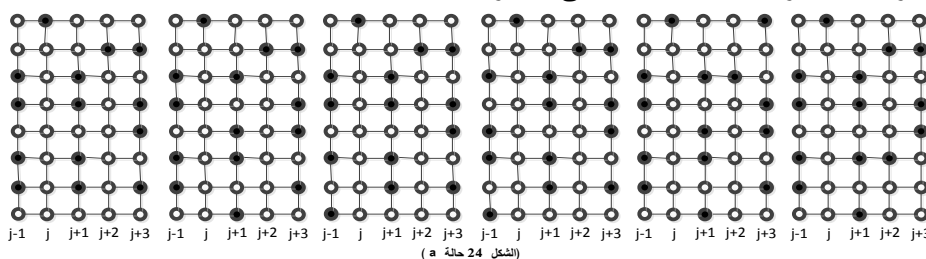
نستنتج من جميع الحالات السابقة انه في حالة $|B_j| = 2$ فإن $|\sum_{j-1}^{j+3} B_K| \leq 14$.

الحالة الرابعة: حالة $|B_j| = 1$

عندئذ نميز الحالات التالية:

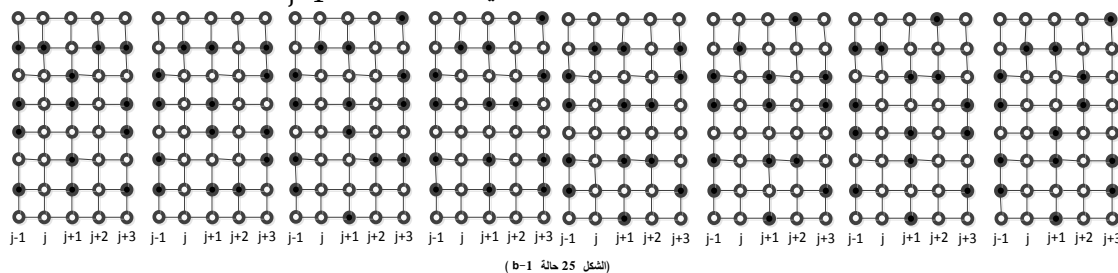
-a حالة $(1, j) \in B$

في هذه الحالة فإن كل من العمودان $j-1$ و $j+1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان خمسة رؤوس من رؤوس المجموعة B على الأكثر.



-b حالة $(2, j) \in B$

في هذه الحالة فإن كل من العمودان $j-1$ و $j+1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B. والعمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان خمسة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B. وبالتالي $|\sum_{j-1}^{j+3} B_K| \leq 14$.

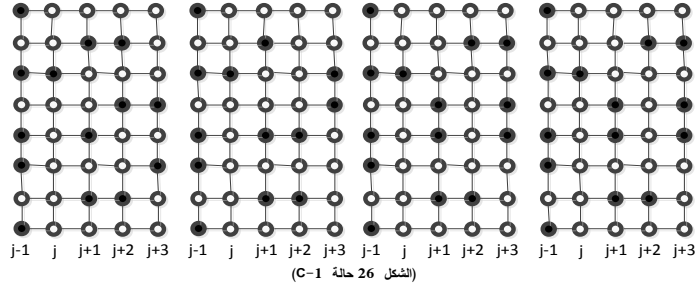


-c حالة $(3, j) \in B$

في هذه الحالة فإن العمود $j-1$ يحوي خمسة رؤوس من رؤوس المجموعة B والعمود $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B ونميز حالتين:

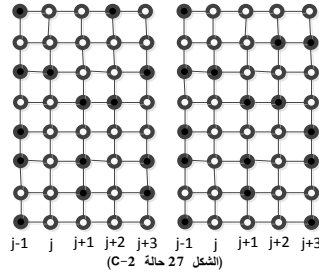
c-1: اذا كانت $(2, j+1), (5, j+1), (6, j+1) \in B$ أو $(2, j+1), (7, j+1), (5, j+1) \in B$.

فإن العمودان $j+2$ و $j+3$ يحويان خمسة رؤوس على الأكثر من رؤوس B وبالتالي $|\sum_{j-1}^{j+3} B_K| \leq 14$.



C-2: في حالة $(4, j+1), (6, j+1), (7, j+1) \in B$.

فإن العمود $j+2$ يحوي رأسين على الأكثر من رؤوس المجموعة B والعمود $j+3$ يحوي ثلاثة أو أربعة رؤوس من رؤوس B عندئذ فإن العمود $j-2$ لا يحوي أي رأس من رؤوس المجموعة B ، والعمود $j+4$ يحوي رأس واحد على الأكثر من رؤوس المجموعة B ، وبما أنه في حالة $|B_j| = 4$ أو $|B_j| = 3$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$ وبالتالي $\sum_{j+3}^{j+7} |B_K| \leq 14$ وبما أن العمود $j+3$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B فإن $\sum_{j+4}^{j+7} |B_K| \leq 11$ وبالتالي $\sum_{j-2}^{j+7} |B_K| \leq 26$.



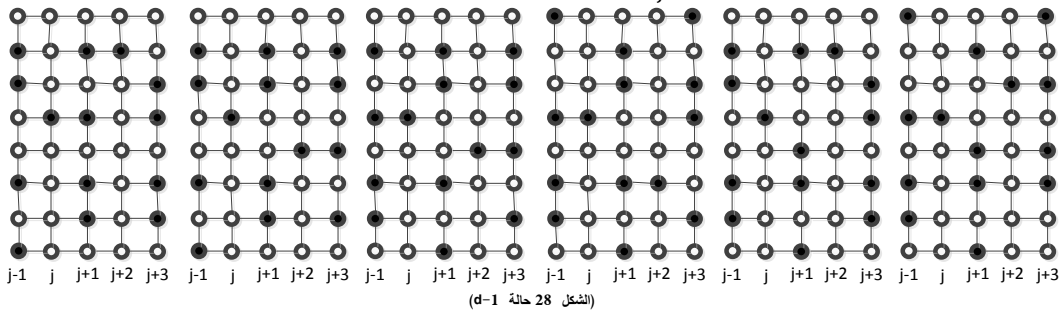
d- حالة $(4, j) \in B$

في هذه الحالة فإن كل من العمودان $j-1, j+1$ يحوي أربعة رؤوس من رؤوس المجموعة B والعمود $j+1$ يحوي ثلاثة رؤوس من رؤوس المجموعة B ونميز الحالات التالية:

d-1: إذا كانت $(1, j+1), (5, j+1), (6, j+1), (8, j+1) \in B$ أو $(2, j+1), (4, j+1), (6, j+1), (7, j+1) \in B$

أو $(2, j+1), (3, j+1), (6, j+1), (8, j+1) \in B$ أو $(2, j+1), (3, j+1), (6, j+1), (7, j+1) \in B$

في هذه الحالة فإن العمود $j+2$ يحوي رأس واحد على الأكثر من رؤوس المجموعة B والعمود $j+3$ يحوي أربعة رؤوس على الأكثر وبالتالي $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.

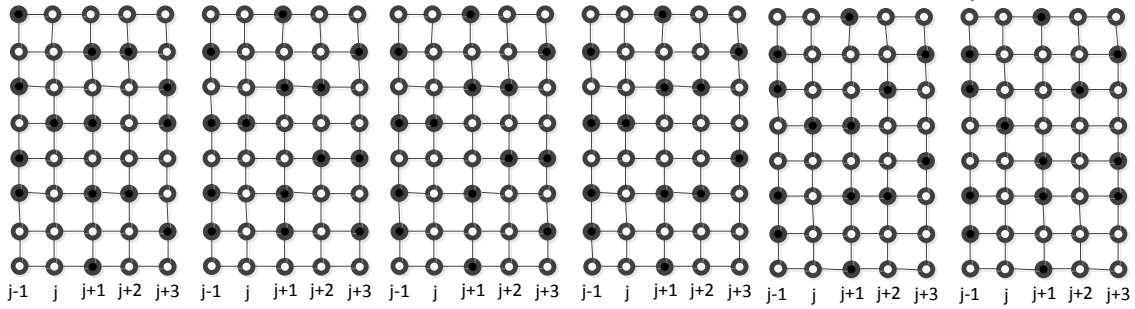


d-2: إذا كانت $(1, j+1), (3, j+1), (6, j+1), (7, j+1) \in B$ أو $(2, j+1), (4, j+1), (6, j+1), (8, j+1) \in B$

أو $(1, j+1), (4, j+1), (6, j+1), (8, j+1) \in B$ أو $(1, j+1), (3, j+1), (6, j+1), (8, j+1) \in B$

في هذه الحالة فإن العمودان $j+2$ و $j+3$ معاً يحويان خمسة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B وبالتالي يبقى

$$\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$$



(الشكل 29 حالة d-2)

الحالة الخامسة: حالة $|B_j| = 0$

في هذه الحالة فإن السلسلة (0,5) تتكرر دوماً. أي انه إذا كان العمود j لا يحوي أي رأس من رؤوس المجموعة B فإن العمود $j+1$ يحوي خمسة رؤوس على الأكثر من رؤوس المجموعة B ، والعمود $j+2$ لا يحوي أي رأس وتتكرر هذه

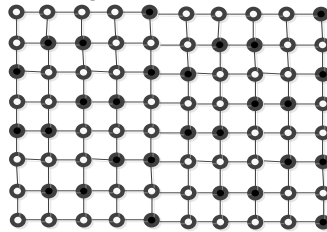
السلسلة وبالتالي كل عشرة أعمدة تحوي 25 رأس على الأكثر وبالتالي يبقى $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$.

ونستنتج من جميع الحالات السابقة أنه أياً كانت $n \geq 1$ فإن $\sum_{j-1}^{j+3} |B_K| \leq 14$ وبالتالي كل خمسة أعمدة تحوي 14

رأس على الأكثر من رؤوس المجموعة B . وبالتالي $\gamma_s(P_8 \times P_n) \geq 8n - 2\left(\frac{14n}{5}\right) \geq \frac{12n}{5}$

لإيجاد الحد الأعلى لعدد السيطرة للبيان $P_8 \times P_n$ نعرف المجموعة

$$B = \{(3, 3j+1), (5, 3j+1) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor \cup (2, 5j+2), (5, 5j+2), (7, 5j+2) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-2}{5} \rfloor \cup \\ (2, 5j+3), (4, 5j+2), (7, 5j+3) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-3}{5} \rfloor \cup (4, 5j+4), (6, 5j+4) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-4}{5} \rfloor \cup \\ (1, 5j+5), (3, 5j+5), (6, 5j+4) : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n-4}{5} \rfloor\}.$$



(الشكل 30 بين المجموعة B)

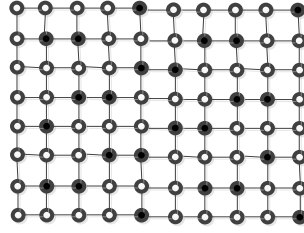
إذا كانت B هي مجموعة رؤوس البيان التي تحمل الوزن -1 عندئذ كل رأس من رؤوس البيان $P_8 \times P_n$ يحقق دالة

$$|B| \geq \lceil \frac{14n}{5} \rceil$$

حالة $n \equiv 0 \pmod{5}$

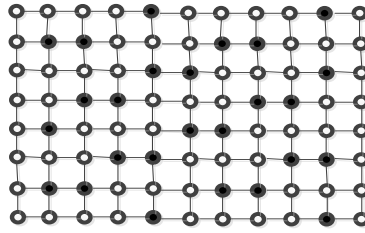
في هذه الحالة نحذف الرأسين $(5,1)$ ، $(3,1)$ من العمود الأول و الرأسين $(6,n)$ ، $(3,n)$ من العمود الأخير. وفي هذه

الحالة يزداد عدد السيطرة بمقدار 8 وبالتالي $\gamma_s(P_8 \times P_n) = \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 8$: $n \equiv 0 \pmod{5}$

(الشغل 31 يبين حالة $n \equiv 0 \pmod{5}$)حالة $n \equiv 1 \pmod{5}$

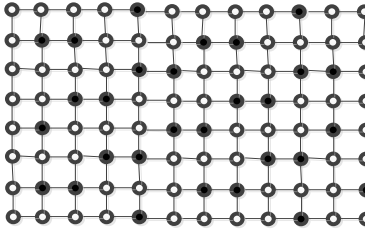
في هذه الحالة إذا أضفنا عمود للبيان في حالة $n \equiv 0 \pmod{5}$ وحذفنا الرأسين $(5, n)$, $(3, n)$ من العمود الأخير. فإن عدد الرؤوس يزداد بمقدار 8 وعدد رؤوس المجموعة B بمقدار 2 وبالتالي:

$$\gamma_s(P_8 \times P_n) = \left\lceil \frac{12n}{5} \right\rceil + 9; n \equiv 1 \pmod{5}.$$

(الشغل 32 يبين حالة $n \equiv 1 \pmod{5}$)حالة $n \equiv 2 \pmod{5}$

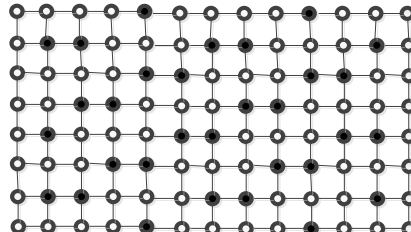
إذا أضفنا عمودين للبيان في حالة $n \equiv 0 \pmod{5}$ وحذفنا الرأسين $(5, n)$, $(2, n)$ من العمود الأخير. فإنه يزداد عدد رؤوس البيان بمقدار 8 عن حالة $n \equiv 1 \pmod{5}$ وعدد رؤوس المجموعة B بمقدار 3 وبالتالي:

$$\gamma_s(P_8 \times P_n) = \left\lceil \frac{12n}{5} \right\rceil + 9; n \equiv 1 \pmod{5}.$$

(الشغل 33 يبين حالة $n \equiv 2 \pmod{5}$)حالة $n \equiv 3 \pmod{5}$

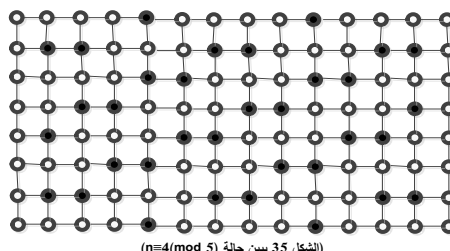
في هذه الحالة نحذف الرؤوس $(2, n)$, $(4, n)$, $(7, n)$ من العمود الأخير. وبالتالي يزداد عدد رؤوس البيان بمقدار 8 عن حالة $n \equiv 2 \pmod{5}$ وعدد رؤوس المجموعة B بمقدار 2 ومنه

$$\gamma_s(P_8 \times P_n) = \left\lceil \frac{12n}{5} \right\rceil + 10; n \equiv 3 \pmod{5}.$$

(الشغل 34 يبين حالة $n \equiv 3 \pmod{5}$)حالة $n \equiv 4 \pmod{5}$

في هذه الحالة نحذف الرؤوس $(4,n)$, $(6,n)$ من العمود الأخير. وبالتالي يزداد عدد رؤوس البيان بمقدار 8 عن حالة $n \equiv 3 \pmod{5}$ وعدد رؤوس المجموعة B بمقدار 3 ومنه

$$\gamma_s(P_8 \times P_n) = \lceil \frac{12n}{5} \rceil + 11; n \equiv 4 \pmod{5}.$$



الاستنتاجات والتوصيات:

لقد توصلنا إلى إيجاد عدد السيطرة المرمزة في الجداء الديكارتي لمسارين $P_m \times P_n$ في حالة $m=8$ و n كفي. وهدفنا المستقبلي هو إيجاد عدد السيطرة المرمزة لبعض البيانات الخاصة.

References :

- [1] J. Dunbar, S.T. Hedetniemi, M.A. Henning, P.J. Slater, Signed domination in Graph Theory, Combinatorics and Applications, Wiley New York, 1 (1995) 311-322.
- [2] I. Broere, J.H. Hattingh, M.A. Henning and A. McRae, Majority domination in graphs, Discrete Math. 138 (1995), 125–135.
- [3] E.J. Cockayne, and C.M. Mynhardt, On a generalization of signed dominating functions of graphs, Ars Combin. 43 (1996), 235–245.
- [4] O. Favaron, Signed domination in regular graphs. Discrete Math. 158 (1995) 287-293.
- [5] Ruth Haasa, Thomas B. Wexlerb, Signed domination numbers of a graph and its complement, Discrete Mathematics 283(2004) 87–92.
- [6] S.M. Hosseini, New bounds on the signed domination numbers of graphs, Australasian Journal of combinatorics Volume 61(3) (2015), Pages 273–280.
- [7] M. Hassan, M. AL Hassan, M. Mostafa, The signed domination number of Cartesian product of two paths, Open Journal of Discrete Mathematics vol. 10. No. 2, April 2020.
- [8] M. Hassan, M. AL Hassan, M. Mostafa, On signed domination of grid graph, Open Journal of Discrete Mathematics vol. 10. No. 4, October 2020.