استقرار الأنظمة الديناميكية المولَّدة بطريقة نيوتن المنظّمة في فضاء هلبرت

د. محمد سويقات*

د. بشرى عباس**

ربا إسماعيل***

(تاريخ الإيداع 14 / 9 / 2020. قُبِل للنشر في 11 / 3 /2021)

□ ملخّص □

ليكن H فضاء هلبرت حقيقي و $A: H \to 2^H$ ، $B: H \to H$ مؤثرين مضطردين أعظميين و B ليبشتز مستمر موضعياً.
المسألة المطروحة هي إيجاد أصفار المؤثر المضطرد $M := A + B$.
في هذا المقال سيتم دراسة استقرار النظام الديناميكي في الحالة الخاصة عندما $A := \partial\varphi: H \to 2^H$ و $B := \nabla\Psi$
حيث φ دالة محدبة وخاصة ونصف مستمرة من الأدنى ، و Ψ دالة محدبة وقابلة للاشتقاق.

الكلمات المفتاحية: طريقة نيوتن، مؤثر مضطرد أعظمي، الحل العام القوي، التقارب الضعيف، استقرار نظام ديناميكي.
التصنيف الرياضي: 90C25, 90C26, 90C33

---

* أستاذ – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

** مدرسة– قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

*** طالبة ماجستير – قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

Stability of Dynamical Systems Generated by Regularized Newton Method In Hilbert Spaces

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr. Boushra Abbas**
Ruba Ismail ***

(Received 14 / 9 / 2020. Accepted 11 / 3 /2021)

□ ABSTRACT □

Let H a real Hilbert space, $A: H \to 2^H$, $B: H \to H$ are maximal monotones operators and B is locally Lipschitz continuous.
The question is to find the zeroes of structured monotone operator $M \coloneqq A + B$.
In this article we study the stability of Dynamical system in special situation when $A: = \partial\varphi: H \to 2^H$and $B: = \nabla\Psi$ when φ is convex, proper and lower-semi continuous, Ψ is convex and differential.

Keywords: Newton method, Maximal monotone operator, strong global solution, weak convergence, stability of dynamical system.

Mathematics Subject Classification: 90C25, 90C26, 90C33

***Professor, Department of mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. soueycatt55@hotmail.com**
**** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. abbas.boushra@yahoo.com**
*****Master, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعتبر الأنظمة الديناميكية من أهم الطرق الرياضية التي تساعد في حل المسائل التي تأخذ صفة الصعوبة من خلال استبدالها مسائل أبسط منها، إذ تلعب دوراً أساسياً في نظرية الألعاب والمعادلات التفاضلية الجزئية، نظرية النقطة الثابتة والأمثليات التي سوف تكون موضوع دراستنا، من أجل تفاصيل أكثر يمكن العودة إلى المراجع [3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 12, 13]

ليكن H فضاء هلبرت، والدالة $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وخاصة و الدالة $\Psi\colon \mathrm{H} \to R$ محدبة وقابلة للاشتقاق.

سيكون هدفنا الأساسي إيجاد $x \in H$ التي تحقق:

$$(\varphi + \Psi)(x) = inf_H(\varphi + \Psi) \qquad (1)$$

حيث:

$$(\varphi + \Psi)(x) \coloneqq \varphi(x) + \Psi(x)$$

المسألة (1) تكافئ مسألة إيجاد قيم $x \in H$ التي تحقق:

$$0 \in (\partial\varphi + \nabla\Psi)(x) \qquad (2)$$

حيث $\partial\varphi\colon H \to 2^H$ تحت تفاضل للدالة $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ و $\nabla\Psi\colon H \to H$ تدرج للدالة Ψ .

ليكن H فضاء هلبرت، و $M\colon H \to 2^H$ مؤثر قابل للاشتقاق، عندئذٍ طريقة نيوتن الكلاسيكية تولد المتتالية $(x_k)_{k\in N}$التي تحقق:

$$M(x_k) + \dot{M}(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \qquad (3)$$

إذا كانت الخطوة الحالية بعيدة عن الحل، فإننا نقوم بالتقسيم على الخطوةΔt_k، فتصبح المعادلة السابقة من الشكل:

$$M(x_k) + \dot{M}(x_k)\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k}\right) = 0 \qquad (4)$$

لكي تكون المسألة جيدة التوضّع (well−posed)، قام Levenberg−Marqardt بتنظيمها [1]، وذلك عن طريق إضافة الحد المنظم$(\lambda_k)_{k\in N}$ لتصبح المعادلة السابقة من الشكل:

$$M(x_k) + \left(\lambda_k I + \dot{M}(x_k)\right)\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k}\right) = 0 \qquad (5)$$

حيث$(\lambda_k)_{k\in N}$ أعداد حقيقية موجبة، و$I\colon H \to H$ المؤثر المطابق.

عندما $\Delta t_k \to 0$ فإننا نحصل على الصيغة المستمرة للمعادلة (5) بالشكل:

$$M\big(x(t)\big) + \Big(\lambda(t)I + \dot{M}\big(x(t)\big)\Big)\,\dot{x}(t) = 0 \qquad (6)$$

عندما يكون $M\colon H \to 2^H$ مؤثر متعدد القيم يصبح النظام الديناميكي بالشكل:

$$\begin{cases} v(t) \in M\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + v(t) + \dot{v}(t) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

وفي حالات نموذجية يتم تقسيم المؤثر M إلى مجموع المؤثرين $M \coloneqq A + B$، حيث:

$A \coloneqq H \to 2^H$ مؤثر متعدد القيم و مضطرد أعظمي، $B \coloneqq H \to H$ مؤثر وحيد القيمة ليبشتز مستمر.

يصبح النظام الديناميكي من الشكل:

$$\begin{cases} v(t) \epsilon A\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + v(t) + \dot{v}(t) + \mathrm{B}\big(x(t)\big) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

وبالتالي يصبح النظام الديناميكي الذي يدرس المسألة (2) من الشكل:

$$\begin{cases} v(t)\epsilon\partial\varphi\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t)+v(t)+\dot{v}(t)+\nabla\Psi\big(x(t)\big)=0 \end{cases} \qquad (9)$$

بإضافة شروط ابتدائية نحصل على مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} v(t)\epsilon\partial\varphi\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t)+v(t)+\dot{v}(t)+\nabla\Psi\big(x(t)\big)=0 \\ x(0)=x_0,\;\; v(0)=v_0,\;\; v_0\in\partial\varphi(x_0) \end{cases} \qquad (10)$$

بشرط الدالة $\varphi+\Psi$ محدودة من الادنى، والمؤثر $\nabla\Psi: H\to H$ ليبشتز مستمر موضعياً.

قام كل من الباحثين S. Svaiter, H. Attouch, B. Abbas في المراجع [1,2] بدراسة الوجود والوحدانية للحل القوي الشامل للمسألة (10) وكذلك التقارب الضعيف نحو حل للمسألة (2)، و درست بعض المسائل من قبل آخرين نذكر في سبيل المثال [8, 10, 18] .

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا المقال إلى تعميم النتائج الأساسية حول إيجاد حد أعلى لطويلة المسارات و مشتقاتها على المجال $]0,+\infty[$ التي دُرست من قبل B. Abbas على المجال $[0,T]$، و من ثمَّ إيجاد حد أعلى للمسافة بين مسارات نظامين ديناميكيين مع تغيير الشروط الابتدائية والحد المنظّم في كل منهما على المجال $]0,+\infty[$.

طرائق البحث و مواده:

يستخدم في هذا البحث أهم التعاريف والمفاهيم المتعلقة بالأنظمة الديناميكية وتستخدم طريقة نيوتن المنظمّة لدراسة هذه الأنظمة .

1. تعاريف ومفاهيم أساسية.

نقدم في هذه الفقرة أهم التعاريف المفاهيم التي نستخدمها في دراستنا يمكن العودة إلى المراجع [1, 2, 6, 7, 16, 17, 19]

- **المؤثر المضطرد الأعظمي Maximal monotone operator:[7, 16, 17, 19]**

ليكن المؤثر $A: H\to 2^H$ مؤثر متعدد القيم، يكون المؤثر A مؤثر مضطرد إذا حقق:

$$\forall v_1\epsilon A(x_1), v_2\in A(x_2) \quad ; \quad < v_2-v_1, x_2-x_1 >\geq 0$$

يكون المؤثر A مضطرد أعظمي إذا كان مضطرد، وبيانه غير محتوى في بيان أي مؤثر مضطرد آخر.

- يرمز لمجموعة حلول المسألة $P_j := inf_H f(x)$ بالرمز $argminf$ وتعرف بالعلاقة:

$$argminf := \{\bar{x}\in H\,;\, f(\bar{x})=inf_H\, f(x)\}$$

- **الدالة المستمرة مطلقاً Absolutely continuous function:[19, 1, 2]**

ليكن $b\in R^+$ والدالة $f:[0,b]\to H$ نقول عن الدالة f مستمرة مطلقاً إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط الآتية:

1) توجد الدالة $g:[0,b]\to H$ القابلة للمكاملة بحيث:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds \quad ; \quad \forall t \in [0, b]$$

2)الدالة f مستمرة ومشتقها قابل للمكاملة حسب لوبيغ على المجال $[0, b]$.

3) من أجل كل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث أنّ من أجل كل مجموعة منتهية من المجالات $I_k = (a_k, b_k)$ المنفصلة مثنى مثنى المحققة بالعلاقة $\sum_k |b_k - a_k| < \delta$ فإنّ:

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$$

- **الحل العام القوي Strong global solution:[1, 2, 19]**

تكون الثنائية $(x(.), v(.)) : [0, +\infty[\to H \times H$ حل عام قوي لمسألة كوشي(10) إذا حقق:

1) $(x(.), v(.)) : [0, +\infty[\to H \times H$ مستمرة بالمطلق على كل مجال $[0, b]$ حيث $0 < b < +\infty$.

2) $v(t) \in A(x(t))$ من أجل كل $t \in [0, +\infty[$.

3) $\lambda(t)\dot{x}(t) + v(t) + \dot{v}(t) + B(x(t)) = 0$ محققة في كل مكان تقريباً almost every where.

4) $x(0) = x_0 , v(0) = v_0$.

2. الوجود والوحدانية والتقارب الضعيف[1].

عند دراسة الأنظمة الديناميكية ، نحرص على التأكيد أن يكون النظام الديناميكي المصمم من أجل حل المسألة المطلوبة جيد التوضّع well–posed أي يتحقق وجود و وحدانية الحل والتقارب الضعيف للحل نحو حل للمسألة وكذلك استقرار المسارات[1, 2].

إن دراسة وجود ووحدانية الحل القوي الشامل لمسألة كوشي (10)، و التقارب الضعيف للمسارات نحو حل للمسألة (2) تمت من قبل الباحثين B. Abbas, H. Attouch, B. F. Svaiter في المرجع [1] وذلك بالاعتماد على تحليل ليابانوف، وإضافة شروط على الحد المنظّم $\lambda(.)$ التي سوف نعرضها في المبرهنتين الآتيتين.

مبرهنة1.2:[1]

لتكن $\lambda(.) : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ دالة مستمرة مطلقاً على كل مجال $[0, b]$ حيث $0 < b < +\infty$ ، وليكن $\partial\varphi : H \to 2^H$ تحت تفاضل للدالة $\varphi : \mathrm{H} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ الخاصة والمحدبة ونصف مستمرة من الادنى، $\nabla\Psi : H \to H$ تدرج للدالة $\Psi : \mathrm{H} \to \mathrm{R}$ المحدبة والقابلة للاشتقاق، حيث $\nabla\Psi : H \to H$ ليبشتز مستمر موضعياً، ولنفرض أنّ الدالة $\varphi + \Psi$ محدودة من الأدنى، ولتكن $(x_0, v_0) \in H \times H$ عندئذٍ:

يوجد حل عام و قوي و وحيد $(x(.), v(.)) : [0, +\infty[\to H \times H$ لمسألة كوشي (10).

مبرهنة2.2:[1]

لتكن الثنائية $(x(.), v(.)) : [0, +\infty[\to H \times H$ حل قوي وحيد وشامل لمسألة كوشي (10)، ولتكن $\lambda(.)$ محدودة وتحقق الشرط توجد $\varepsilon > 0$ بحيث $1 + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \geq \varepsilon$، و الدالة $\varphi + \Psi$ تحقق $argmin(\varphi + \Psi) \neq \emptyset$ عندئذٍ:

المسار $x(.)$ محدود، ويتقارب بضعف نحو $\bar{x} \in argmin(\varphi + \Psi)$، $< \dot{x}, \dot{v} > \geq 0$، $\dot{x} \in L^2(0, +\infty)$، $\lim_{t \to +\infty} \|v(t) + \nabla\Psi(x(t))\| = 0$

3. تقدير المسارات على المجال $[0,T]$.[20]

سنقدم في هذه الفقرة أهم النتائج التي درست من قبل الباحثة B. Abbas حيث قامت بإيجاد حد أعلى لطويلة المسارات على المجال $[0,T]$ ، حيث $(x(.),v(.)):[0,T]\to H\times H$ الحل القوي العام لمسألة كوشي (10) و $C_0>0$; $\forall t\in[0,T]$; $\lambda(t)\ge C_0$ عندئذ يتحقق التالي:

$$\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^2 dt \le \frac{1}{c_0}[(\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)] \qquad (11)$$

$$\|x(t)\|_{L^\infty(0,T;H)} \le \|x_0\| + \sqrt{\frac{T}{c_0}}[(\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)]^{\frac{1}{2}} \qquad (12)$$

$$\int_0^T \|\dot{v}(t)\|^2 dt \le \|v_0\|^2 + 2T\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2T^2{L_\Psi}^2}{C_0}((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)) \qquad (13)$$

$$\|v\|_{L^\infty[0,T]} \le \|v_0\| + \sqrt{2T}\|\nabla\Psi(x_0)\| + \frac{\sqrt{2}TL_\Psi}{{C_0}^{\frac{1}{2}}}\left((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

كما قامت B. Abbas بإيجاد العلاقة بين المسافة بين المسارات والشروط الابتدائية على المجال $[0,T]$ أي إذا كان لدينا نظامين ديناميكيين يدرسان نفس المسألة ونفس التوابع، لكن الشروط الابتدائية مختلفة والحد المنظّم في كل منهما مختلف، تم إيجاد الحد الأعلى للمسافة بين المسارات الناتجة عن كل نظام ديناميكي على المجال $[0,T]$، حيث أنه إذا كانت $\lambda,\eta:[0,T]\to[c_0,+\infty[$ دوال مستمرة مطلقاً من أجل كل $T>0$ و $c_0>0$ وليكن $(x(.),v(.)),(y(.),w(.)):[0,T]\to H\times H$ حلين لمسألتي كوشي الآتيتين على الترتيب:

$$\lambda(t)\dot{x}(t)+v(t)+\dot{v}(t)+\nabla\Psi(x(t))=0 \quad x(0)=x_0, v(0)=v_0$$

$$\eta(t)\dot{y}(t)+w(t)+\dot{w}(t)+\nabla\Psi(y(t))=0 \quad y(0)=y_0, w(0)=w_0$$

لنعرف الدالة $\theta(.):[0,T]\to R$ بالشكل :

$$\theta(t)=\sqrt{{c_0}^2\|x(t)-y(t)\|^2+\|v(t)-w(t)\|^2}$$

عندئذٍ يتحقق الآتي:

$$\|\theta\|_{L^\infty([0,T]} \le \left[\frac{\lambda(0)+\eta(0)}{2}\|x_0-y_0\|+\|v_0-w_0\|+\frac{C}{2}\|\lambda-\eta\|_{L^1([0,T])}\right] \times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda}+\dot{\eta}\|_{L^1}}{2c_0}+T(1+\frac{L_\Psi}{c_0})\right) \qquad (15)$$

حيث :

$$C=\frac{\|v_0\|+\|w_0\|}{c_0}+\frac{1+\sqrt{2T}}{c_0}(\|\nabla\Psi(x_0)\|+\|\nabla\Psi(y_0)\|)+$$

$$\frac{(\sqrt{2}T+\sqrt{T})L_{\Psi}}{c_0^{\frac{3}{2}}}\left[\big((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}}+((\varphi+\Psi)(y_0)--inf_H(\varphi+\Psi))^{\frac{1}{2}}\right. \quad (16)$$

عندما لا يحدث تغيير على الشروط الابتدائية ،أي عندما $x_0=y_0, v_0=w_0$ فإننا نحصل على التالي :

$$\|\theta\|_{L^{\infty}([0,T]}\le\frac{C}{2}\|\lambda-\eta\|_{L^1([0,T])}\times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda}+\dot{\eta}\|_{L^1}}{2c_0}+T\left(1+\frac{L_{\Psi}}{c_0}\right)\right) \quad (17)$$

حيث :

$$C=\frac{2\|v_0\|}{c_0}+2\frac{1+\sqrt{2T}}{c_0}\|\nabla\Psi(x_0)\|+2\frac{(\sqrt{2}T+\sqrt{T})L_{\Psi}}{c_0^{\frac{3}{2}}}\left[\big((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (18)$$

النتائج والمناقشة:

من المهم عند دراسة المسائل باستخدام الأنظمة الديناميكية هو استقرار النظام الديناميكي، فعند تغيير الشروط الابتدائية نحصل على مسار جديد سوف نقوم بتحديد حد أعلى لطويلة المسارات على المجال $[0,+\infty[$ كتعميم للعلاقات التي درستها B.Abbas على المجال $[0,T]$.

سوف نعمم العلاقات $(11),(12),(13),(14),(15),(16),(17),(18)$ على المجال $[0,+\infty[$.

مبرهنة1.:

لتكن الثنائية $(x(.),v(.)):[0,+\infty[\to H\times H$ حل لمسألة كوشي (10) عندئذ:

$$\int_0^{+\infty}\|\dot{x}(t)\|^2dt\le\frac{1}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)\big) \quad (19)$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{L}^{\infty}([\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}];\boldsymbol{H})}\le\ \|\boldsymbol{x}_0\|+\sqrt{\frac{T}{c_0}}\big((\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

المتراجحة (20) محققة عندما $T\to+\infty$.

البرهان.

من العلاقة (11) نجد أنّ من أجل كل $T>0$ يتحقق:

$$\int_0^T\|\dot{x}(t)\|^2dt\le\frac{1}{c_0}[(\varphi+\Psi)(x_0)-inf_H(\varphi+\Psi)]$$

ولتكن $T=T_{max}$ هي أكبر قيمة ل T تكون من أجلها العلاقة (11) محققة، ولنفرض أنّ $T_{max}<+\infty$ عندئذٍ من أجل كل $T_m>T_{max}$ يتحقق:

$$\int_0^{T_m} \|\dot{x}(t)\|^2 dt > \frac{1}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big) \tag{21}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\int_0^{T_m} \|\dot{x}(t)\|^2 dt = \int_0^{T_{max}} \|\dot{x}(t)\|^2 dt + \int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{x}(t)\|^2 dt$$

أصبح لدينا:

$$\int_0^{T_{max}} \|\dot{x}(t)\|^2 dt + \int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{x}(t)\|^2 dt > \frac{1}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big) \tag{22}$$

من المتراجحة (22) بأخذ $T_m \to T_{max}$ عندئذٍ $\int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{x}(t)\|^2 dt \to 0$ وبالتالي نجد:

$$\int_0^{T_{max}} \|\dot{x}(t)\|^2 dt > \frac{1}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)$$

نحصل على تناقض مع كون $T = T_{max}$ أكبر قيمة ل T تكون من أجلها العلاقة (11) محققة، هذا يعني أنّ الفرض الجدلي خاطئ و $T_{max} = +\infty$ وبهذا يتم برهان المتراجحة (19) .

الآن لنبرهن العلاقة (20):

من العلاقة (12) نجد أنّه من أجل كل $T > 0$ يتحقق:

$$\|x(t)\|_{L^\infty(0,T;H)} \le \|x_0\| + \sqrt{\frac{T}{c_0}}\,[(\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)]^{\frac{1}{2}}$$

ولتكن $T = T_{max}$ أكبر قيمة ل T تكون من أجلها المتراجحة السابقة محققة، ولنفرض جدلاً أنّ $T_{max} < +\infty$ عندئذٍ من أجل كل $T_m > T_{max}$ يتحقق:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{L}^\infty([\boldsymbol{0},\boldsymbol{T_m}];\boldsymbol{H})} > \|\boldsymbol{x}_0\| + \sqrt{\frac{T_m}{c_0}}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

من المتراجحة (16) بأخذ $T_m \to +\infty$ ينتج لدينا:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{L}^\infty([\boldsymbol{0},+\infty[;\boldsymbol{H})} > +\infty$$

وهذا تناقض مع كون المسار $t \to x(t)$ محدود على $[0,+\infty[$ حسب مبرهنة (2.2) وهذا يعني أنّ الفرض الجدلي خاطئ و $T_{max} = +\infty$.

مبرهنة2.:

لتكن الثنائية $(x(.), v(.)): [0,+\infty[\to H \times H$ الحل العام القوي والوحيد لمسألة كوشي (10) عندئذٍ العلاقات الآتية محققة عندما $T \to +\infty$:

$$\int_0^T \|\dot{v}(t)\|^2 dt \le \|v_0\|^2 + 2T\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2T^2 {L_\Psi}^2}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big) \tag{24}$$

$$\|v\|_{L^\infty([0,T];H)} \leq \|v_0\| + \sqrt{2T}\|\nabla\Psi(x_0)\| + \sqrt{\frac{2}{C_0}}TL_\Psi\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}} \qquad (25)$$

البرهان.

من العلاقة (13) نجد أنّه من أجل كل $T > 0$ يتحقق:

$$\int_0^T \|\dot{v}(t)\|^2 dt \leq \|v_0\|^2 + 2T\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2T^2{L_\Psi}^2}{C_0}((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi))$$

لتكن $T = T_{max}$ أكبر قيمة ل T تكون من أجلها العلاقة السابقة محققة، ولنفرض جدلاً أنّ $T_{max} < +\infty$، عندئذٍ من أجل كل $T_m > T_{max}$ ينتج لدينا :

$$\int_0^{T_m} \|\dot{v}(t)\|^2 dt > \|v_0\|^2 + 2T_m\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2{T_m}^2{L_\Psi}^2}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big) \qquad (26)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\int_0^{T_m} \|\dot{v}(t)\|^2 dt = \int_0^{T_{max}} \|\dot{v}(t)\|^2 dt + \int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{v}(t)\|^2 dt \qquad (27)$$

من العلاقتين $(26),(27)$ ينتج :

$$\int_0^{T_{max}}\|\dot{v}(t)\|^2 dt + \int_{T_{max}}^{T_m}\|\dot{v}(t)\|^2 dt > \|v_0\|^2 + 2T_m\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2{T_m}^2{L_\Psi}^2}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big) \qquad (28)$$

وعندما $T_m \to T_{max}$ فإنّ $\int_{T_{max}}^{T_m}\|\dot{v}(t)\|^2 dt \to 0$ وبالتالي من العلاقة (28) نجد:

$$\int_0^{T_{max}}\|\dot{v}(t)\|^2 dt > \|v_0\|^2 + 2T_{max}\|\nabla\Psi(x_0)\|^2 + \frac{2{T_{max}}^2{L_\Psi}^2}{c_0}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)$$

وهذا تناقض مع كون العلاقة محققة من أجل $T = T_{max}$ سببه الفرض الجدلي الخاطئ وهذا يعني أنّ $T_{max} = +\infty$ ، و بالتالي العلاقة (24) محققة عندما $T \to +\infty$.

لنبرهن الآن العلاقة (25).

من العلاقة (14) نجد من أجل كل $T > 0$ يتحقق:

$$\|v\|_{L^\infty[0,T]} \leq \|v_0\| + \sqrt{2T}\|\nabla\Psi(x_0)\| + \frac{\sqrt{2}TL_\Psi}{{C_0}^{\frac{1}{2}}}\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)^{\frac{1}{2}}$$

لتكن $T = T_{max}$ أكبر قيمة ل T تكون من أجلها العلاقة السابقة محققة، ولنفرض جدلاً أنّ $T_{max} < +\infty$، عندئذٍ من أجل كل $T_m > T_{max}$ ينتج لدينا :

$$\|v\|_{L^\infty([0,T_m];H)} > \|v_0\| + \sqrt{2T_m}\|\nabla\Psi(x_0)\| + \sqrt{\frac{2}{C_0}T_m L_\Psi\big((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\big)}^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

وعندما $T_m \to +\infty$ نجد أنّ :

$$\|v\|_{L^\infty([0,+\infty[;H)} > +\infty$$

من المبرهنة (2.2) نلاحظ أنَّ $\lim_{t\to+\infty}(v(t) + \nabla\Psi(x(t))) = 0$، أي أنّ $\lim_{t\to+\infty} v(t) = \alpha\epsilon R$ وبالتالي $t \to v(t)$ متقاربة فهي محدودة و بالتالي من غير الممكن أن يكون $\|v\|_{L^\infty([0,+\infty[;H)} > +\infty$ إذاً الفرض الجدلي خاطئ، و $T_{max} = +\infty$ ، و بالتالي العلاقة (26) محققة عندما $T \to +\infty$.

مبرهنة3.:

لتكن $\lambda, \eta: [0,T] \to [c_0, +\infty[$ دالتين مستمرتين مطلقاً من أجل كل $T > 0$ و $c_0 > 0$ وليكن $(x(.), v(.)), (y(.), w(.)): [0,+\infty[\to H \times H$ حلين لمسألتي كوشي الآتيتين على الترتيب:

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + v(t) + \dot{v}(t) + \nabla\Psi(x(t)) = 0 x(0) = x_0, v(0) = v_0$$

$$\eta(t)\dot{y}(t) + w(t) + \dot{w}(t) + \nabla\Psi(y(t)) = 0\ y(0) = y_0, w(0) = w_0$$

لنعرف الدالة $\theta(.): [0,T] \to R$ بالشكل :

$$\theta(t) = \sqrt{{c_0}^2\|x(t) - y(t)\|^2 + \|v(t) - w(t)\|^2}$$

عندئذٍ يتحقق الآتي عندما $T \to +\infty$.

$$\|\theta\|_{L^\infty([0,T]} \le \left[\frac{\lambda(0) + \eta(0)}{2}\|x_0 - y_0\| + \|v_0 - w_0\| + \frac{C}{2}\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T])}\right] \times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1}}{2c_0} + T(1 + \frac{L_\Psi}{c_0})\right) \quad (30)$$

حيث C المعرّفة بالعلاقة (16)

عندما لا يحدث تغيير على الشروط الابتدائية ،أي عندما $x_0 = y_0, v_0 = w_0$ فإننا نحصل على التالي :

$$\|\theta\|_{L^\infty([0,T]} \le \frac{C}{2}\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T])} \times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1}}{2c_0} + T\left(1 + \frac{L_\Psi}{c_0}\right)\right) \quad (31)$$

حيث C المعرّفة بالعلاقة (18)

البرهان.

لدينا العلاقتين (31) ,(30) محققة على المجال $[0,T]$ حسب العلاقات (15) ,(16) ,(17) ,(18)، ولتكن $T = T_{max}$ أكبر قيمة ل T تكون من أجلها العلاقات السابقة محققة، ولنفرض جدلاً أنّ $T_{max} < +\infty$ عندئذٍ: من أجل كل $T_m > T_{max}$ يكون:

$$\|\theta\|_{L^\infty([0,T_m]} > \left[\frac{\lambda(0) + \eta(0)}{2}\|x_0 - y_0\| + \|v_0 - w_0\| + \frac{C_m}{2}\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T_m])}\right] \times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1[0,T_m]}}{2c_0} + T_m(1 + \frac{L_\Psi}{c_0}\right) \quad (32)$$

$$C_m = \frac{\|v_0\| + \|w_0\|}{c_0} + \frac{1+\sqrt{2T_m}}{c_0}(\|\nabla\Psi(x_0)\| + \|\nabla\Psi(y_0)\|) + \frac{(\sqrt{2}T_m + \sqrt{T_m})L_\Psi}{c_0^{\frac{3}{2}}}\left[\left((\varphi+\Psi)(x_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\right)^{\frac{1}{2}} + \left((\varphi+\Psi)(y_0) - inf_H(\varphi+\Psi)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (33)$$

حيث:

$$\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T_m])} = \int_0^{T_m} \|\lambda - \eta\| dt = \int_0^{T_{max}} \|\lambda - \eta\| dt + \int_{T_{max}}^{T_m} \|\lambda - \eta\| dt \quad (34)$$

$$\|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1[0,T_m]} = \int_0^{T_m} \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\| dt = \int_0^{T_{max}} \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\| dt + \int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\| dt \quad (35)$$

عندما $T_m \to T_{max}$ نجد :

$$\int_{T_{max}}^{T_m} \|\lambda - \eta\| dt \to 0, \int_{T_{max}}^{T_m} \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\| dt \to 0$$

وبالتالي :

$$\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T_m])} \to \|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T_{max}])}, \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1[0,T_m]} \to \|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1[0,T_{max}]}, C_m \to C$$

وبالتالي عندما $T_m \to T_{max}$ نحصل على:

$$\|\theta\|_{L^\infty([0,T_{max}]} > \left[\frac{\lambda(0)+\eta(0)}{2}\|x_0 - y_0\| + \|v_0 - w_0\| + \frac{C}{2}\|\lambda - \eta\|_{L^1([0,T_{max}])}\right] \times exp\left(\frac{\|\dot{\lambda} + \dot{\eta}\|_{L^1[0,T_{max}]}}{2c_0} + T_{max}(1 + \frac{L_\Psi}{c_0})\right)$$

وهذا تناقض مع كون العلاقة (30) محققة من أجل $T = T_{max}$ وهذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ.
العلاقة (31) محققة عندما $T = +\infty$ كونها حالة خاصة من العلاقة (30).

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

إنَّ الدراسة السابقة سمحت لنا بإيجاد حد أعلى للمسارات والمسافة بينها على المجال $[0, +\infty[$، وبالتالي من أجل الحد المنظّم $\lambda = \mathrm{C}$ حيث C ثابت موجب تماماً تتحقق لدينا جميع الشروط السابقة للحد المنظّم، وبالتالي ينتج لدينا المسألة :

$$\begin{cases} v(t) \epsilon \partial\varphi(x(t)) \\ C\dot{x}(t) + v(t) + \dot{v}(t) + \nabla\Psi(x(t)) = 0 \\ x(0) = x_0, v(0) = v_0, v_0 \epsilon \partial\varphi(x_0) \end{cases} \quad (36)$$

المسألة السابقة تشكل حالة خاصة ويتحقق من أجلها الوجود والوحدانية والتقارب الضعيف، وكذلك تتحقق المبرهنات (4.1)، (4.2)، (4.3) كحالة خاصة للحد المنظّم.

التوصيات:

دراسة النتائج السابقة من وجود ووحدانية الحل العام القوي والتقارب الضعيف واستقرار النظام في حالة الحد المنظّم $t \to \lambda(t)$ محدود التغيّر (Bounded variation).

References:

[1] B. Abbas, Attouch, B. F. Svaiter, Newton-like dynamics and forward-backward method for structured monotone inclusious in Hilbert spaces, J. Optim. Theory Appl, 161 (2014). No. 2, pp. 331-360.
[2] Attouch, H., Svaiter, B.F. : A continuous dynamical Newton-like approach to solv-ing monotone inclusions SIAM J. Control Optim. 49, 574-598(2011).
[3] Peypouquet, J., Sorin, S. : Evolution equations for maximal monotone operators: asymptotic analysis in continuous and discrete time. J. of Convex Analysis **17**. 1113-1163 (2010).
[4] B. Abbas. Attouch, Dynamical systems and forward-backward algorithms associated with the sum of convex subdifferential and a monotone cocoercive operator, optimization, (2014) http ://dx.doi.org/10.1080/02331934.2014.971412.
[5] Alvarez, F., Attouch, H., Bolte, J., Redont, p. :A second-order gradient-like dissipat-ive dynamical system with Hessian-driven damping. Application to optimization and mechanics, J. Math. Pures Appl. 81, 747-779(2002).
[6] Antipin, A.S. : Minimization of convex function on convex sets by means of differ-ential equations. Differential Equations. 30, 1365-1375 (1994).
[7] Attouch, H., Briceno, L., Combettes, P.L. : A parallel splitting method for coupled monotone inclusions. SIAM J. Control Optim. 48,3246-3270 (2010).
[8] H. Attouch, p. Redont, B. F. Svaiter, Global convergence of a closed-loop regulariz-ed Newton method for solving monotone inclusions in Hilbert spaces, J. Optim. The-ory Appl., 157(2013), No. 3, pp. 624-650.
[9] Beck, A., Teboulle, M. : Gradient-based algorithms with applications in signal rec-overy problems. In : palomar, D., Eldar, Y. (eds.) : Convex Optimization in Signal pro-cessing and Communications, pp. 33-88. Cambridge University Press, (2010).
[10] Bolte, J. : Continuous gradient projection method in Hilbert spaces. J. Optim. Th-eory Appl. 119, 235-259 (2003).
[11]] Bre'zis, H. : Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris (1983).
[12] Combettes, P.L., Pesquet, J.-C. : Proximal splitting methods in signal processing. In : Bauschke, H., Burachik, R., Combettes, P.L., Elser, V., Luke, D.R., Wolkowicz, H. (eds.) : Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering, pp. 185-212. Springer, New York, (2011).
[13] Ferreia, O.P., Svaiter, B.F. : Kantorovich's theorem on Newton's method on Rie-mannian manifolds. Journal of Complexity **18**, 304-329 (2002).
[14] Haraux, A. : Systemes dynamiques dissipatifs et applications. RMA 17, Masson, Paris, (1991).
[15] Minty, G.J**. :** Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces. Duke Mathematical Journal **29**, 341-588 (1962).
[16] Rockafellar, R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM J. Control Optim. **14**, 877-898 (1985).

[17]Rockafellar, R.T. : Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions. Ann. Inst. Henri Poincare **2**, 167-184 (1985).
[18] Solodov, M.V., Svaiter, B.F. : A globally convergent inexact Newton method for systems of monotone equations. In : Fukushima, M., Qi, L., (eds) : Nonsmooth, Piecewise Smooth, semismooth and smoothing Methods, pp. 355-369. Kluwer Acadermic Publishers, (1999).
[19] Mohamed Soueycatt; B, Abbas; Somar Soueycatt, *Regularized Newton approach to finding optimal solution for optimization problem – existence and uniqueness.* Tishreen University, Syria, -Basic Sciences Series VoL. (41)No. (3)2019, 221-230.
[20] ABBAS, B, *Newton-like methods forstructured monotone inclusions : study of the associated dynamics and algorithms.HAL, France, 2019, 123.*