التقارب القوي باستخدام طريقة الاتجاهات المتناوبة الأقرب للمضاريب في فضاءات هلبرت الحقيقية

د. محمد سويقات *

د. بشرى عباس**

ليال علي***

(تاريخ الإيداع 28 / 9 / 2020. قُبِل للنشر في 20 / 6 /2021)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو إثبات أن التقارب القوي يتوافق بشكل جيد مع طريقة الاتجاهات المتناوبة الأقرب للمضاريب (PADMM) في فضاءات هلبرت الحقيقية غير منتهية الأبعاد لمسائل الأمثليات المحدبة على فرض أن تكون مجموعة الحلول لهذه المسائل غير خالية. سنقوم بإثبات أن المتتالية الناتجة بواسطة PADMM متقاربة بقوة نحو الحل الأمثل لمسألة الأمثليات المحدبة المقيدة ذات المتحولين.

الكلمات المفتاحية: مسائل أمثليات محدبة، تابع لاغرانج الموسع، طريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب، طريقة النقطة الأقرب.

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. soueycatt55@hotmail.com

**مدرسة– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية abbas.boushra@yahoo.com

***طالبة دكتوراه – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية layal91me@hotmail.com

The Strong Convergence of Proximal Alternating Direction Method of Multipliers in Real Hilbert Spaces

Dr. Mohamed Soueycatt*
Dr.Boushra Abbas**
Layal Ali***

(Received 28 / 9 / 2020. Accepted 20 / 6 /2021)

☐ ABSTRACT ☐

The aim of this paper is to demonstrate that strong convergence corresponds well to the approximate alternating directions method (PADMM) in real infinite dimensional Hilbert spaces for convex optimization problems. Assuming that the solutions set for these problems are not empty, we demonstrate that the sequence generated by the PADMM is strongly convergent towards the optimal solution of the problem constrained convex optimization problems.

Keywords: Convex optimization; Augmented Lagrangian; Alternating direction method of multi-pliers; Proximal point method.

***Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria. soueycatt55@hotmail.com**
****Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria. abbas.boushra@yahoo.com**
*****PhD student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria. layal91me@hotmail.com**

مقدّمة:

ليكن X, Y فضائي هلبرت حقيقيين؛ وليكن $f: X \to R \cup \{+\infty\}, g: Y \to R \cup \{+\infty\}$ تابعين محدبين نصف مستمرين من الأدنى وخاصين؛ وليكن $A: X \to Y$ مؤثراً خطياً ومستمراً. نهتم بإيجاد حل لمسألة أمثليات محدبة مقيدة من الشكل الآتي:

$$\min_{x\in X, y\in Y}\{f(x) + g(y) \ \ : \ \ Ax - y = 0\} \qquad (1.1)$$

يعرّف تابع لاغرانج الموسع the augmented Lagrangian function $L_\rho: \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ المرفق بالمسألة (1.1) بالشكل:

$$L_\rho(x, y, z) := f(x) + g(y) + \langle z, Ax - y\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - y\|^2 \ \ ; \ \ \rho > 0$$

حيث $z \in Z$ مضروب لاغرانج the Lagrange multiplier، و $\rho > 0$ وسيط الغرامة the penalty parameter ، ويؤول حل المسألة المحدبة المقيدة (1.1) إلى حل مسألة القيم السرجية saddle-valued problem غير المقيدة المكافئة لها، بمعنى إيجاد النقاط $(x, y, z) \in X \times Y \times Y$ التي تكون حلاً للمسألة الآتية:

$$(x, y, z) \in \underset{\xi\in X, \eta\in Y}{\operatorname{argmin}} \max_{v\in Z}\{L_\rho(\xi, \eta, v)\} \qquad (1.2)$$

من أجل حل (1.1) أو ما تكافئها (1.2)، تُستخدَم طريقة النقطة الأقرب proximal point method [15,4] وهي طريقة تكرارية تبدأ من عنصر كيفي $z^0 \in Y$، وتنتج متتالية $\{(x^k, y^k, z^k)\}$ في $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$ بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} (x^{k+1}, y^{k+1}) = \underset{x\in X, y\in Y}{\operatorname{argmin}}\left\{L_\rho(x, y, z^k) + \frac{1}{2\rho}\|x - x^k\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|y - y^k\|^2\right\} & (1.3) \\ z^{k+1} = \ z^k + \rho(Ax^{k+1} - y^{k+1}) & (1.4) \end{cases}$$

إذا تحقق شرط وجود نقاط سرجية للتابع L_ρ، فإن المتتالية الناتجة من $(1.3) - (1.4)$ تتقارب بضعف نحو نقطة سرجية للتابع L_ρ، أي نحو حل أمثل للمسألة (1.1) ومضروب لاغرانج أمثل. لكن العلاقة (1.3) غالباً ما تكون صعبة الحل وخاصة من الناحية البرمجية ويعود ذلك إلى وجود المتحولين x, y معاً والناتج من وجود الحد $\frac{\rho}{2}\|Ax - y\|^2$ في تابع لاغرانج الموسع. لذلك كان لا بد من البحث عن طريقة لحل (1.3) في كل خطوة بحيث يتم الحل بالنسبة لأحد x, y المتحولين ثم بالنسبة للآخر. طريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM هي الطريقة التي استخدمت من أجل الحفاظ على البنية القابلة للفصل في (1.3). اقتُرحت ADMM في [8]، واستُخدمت بشكل كبير لحل المسائل ذات البنية القابلة للفصل، وطبقت في العديد من المسائل العملية في مجالات مختلفة [6,7,17,19]. الفكرة الأساسية في تقنية الاتجاهات المتناوبة للمضاريب هي أن يتم إيجاد نقطة صغرى لتابع لاغرانج الموسع L_ρ بالنسبة لأحد المتحولين x أو y ومن ثم إيجاد نقطة صغرى لـ L_ρ بالنسبة للمتحول الآخر، بعد ذلك يتم إيجاد مضروب لاغرانج. بشكل عام، التقارب الضعيف هو تقارب بطيء نحو الحل، ومن المهم دراسة الحالات التي نحصل بها على تقارب أسرع نحو الحل، كالتقارب القوي أو نسب التقارب.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تطبيق طريقة الاتجاهات المتناوبة الأقرب للمضاريب لحل مسائل أمثليات محدبة مقيدة ذات متحولين في فضاءات هلبرت حقيقية غير منتهية الأبعاد، حيث يكون الاهتمام في إثبات أن المتتالية الناتجة تتقارب بقوة نحو حل أمثل لهذه المسائل. تكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته، حيث أن الدراسة في فضاءات هلبرت الحقيقية تشمل تطبيقات متنوعة في الميكانيك والتحكم الأمثل والمعادلات التفاضلية الجزئية، وسيكون له أهمية في دراسة وتقديم أبحاث جديدة.

طرائق البحث ومواده:

تُعطَى بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق المؤثرات المطردة الأعظمية وتستخدم طريقة النقطة الأقرب، وطريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب.

تعاريف ومفاهيم أساسية.

– يُقال عن مؤثر $T: X \to X$ معرف على فضاء هلبرت X إنه **مؤثر مطرد** إذا تحققت المتراجحة الآتية:

$$\forall y \in T(x),\ \acute{y} \in T(\acute{x}):\quad \langle x-\acute{x}, y-\acute{y}\rangle \geq 0 \qquad (2.1)$$

و يُقال عن المؤثر المطرد T إنه **مطرد أعظمي** maximal monotone operator إذا كان بيانه $G(T) := \{(x,y) \in X \times Y \ \mid y \in T(x)\}$ غير محتوى في بيان أي مؤثر مطرد آخر معرف على الفضاء X.

– يعرف مؤثر التفاضل الجزئي sub-differential operator لتابع محدب ونصف مستمر من الأدنى و خاص $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ ، بأنه المؤثر $\partial f: X \to X$ المعرف من أجل نقطة ما $x \in dom(f)$ بالشكل الآتي:

$$\eta \in \partial f(x) \iff \forall \xi \in X:\ \ f(\xi) \geq f(x) + \langle \eta, \xi - x\rangle \quad (2.2)$$

وهو مؤثر مطرد أعظمي. أهمية مؤثر التفاضل الجزئي تأتي من كون إيجاد أصفار المؤثر ∂f ، أي النقاط $x \in X$ التي تحقق: $0 \in \partial f(x)$ يكافئ إيجاد قيم $x \in X$ التي تكون حلاً لمسألة الأمثليات الآتية: $\min_{x\in X} f(x)$، إذ إن x نقطة صغرى للتابع المحدب ونصف المستمر من الأدنى والخاص إذا وفقط إذا كانت x صفر لمؤثر التفاضل الجزئي لهذا التابع. من أجل إيجاد أصفار مؤثر مطرد أعظمي، نستخدم طريقة النقطة الأقرب [15]، حيث إنه عندما يكون المؤثر المطرد الأعظمي T هو مؤثر التفاضل الجزئي، $T := \partial f$ ، عندئذ بدءاً من $x^0 \in X$ كيفية، تنتج متتالية $\{x^k\}$ في X من العلاقة الآتية:

$$x^{k+1} = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + \frac{1}{2c}\|x - x^k\|^2 \right\} \ \ ; c > 0 \qquad (2.3)$$

– إذا كان $T := \partial_{x,y} L = (\partial_{x,y} L, -\partial_z L)$ التفاضل الجزئي لتابع محدب– مقعر مغلق وخاص $L: X \times Y \to R \cup \{+\infty\}$، عندئذ العلاقة (2.3) تصبح بالشكل:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}\ \underset{y\in Y}{\max} \left\{ L(x,y) + \frac{1}{2c}\|x - x^k\|^2 - \frac{1}{2c}\|y - y^k\|^2 \right\}$$

بما أن حل المسألة (1.1) يكافئ حل مسألة القيم السرجية (1.2) أي إيجاد النقاط السرجية لتابع لاغرانج الموسع، وبما أن هذا التابع محدب– مقعر، فإن حل المسألة (1.2) يكافئ إيجاد أصفار المؤثر المطرد الأعظمي $\partial_{x,y} L_{\rho} = (\partial_{x,y} L, -\partial_z L)$ ، ومن أجل ذلك نقوم بتطبيق طريقة النقطة الأقرب على تابع لاغرانج الموسع نحصل على:

$$\min_{x\in X, y\in Y} \left\{ f(x) + g(y) + \langle z^k, Ax - y\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - y\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|x - x^k\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|y - y^k\|^2 \right\} \ \ (2.4)$$

ومن ثم إيجاد مضاريب لاغرانج الموافقة من العلاقة:

$$z^{k+1} = z^k + \rho(Ax^{k+1} - y^{k+1}) \qquad (2.5)$$

بكتابة الشروط الأمثلية للعلاقة (2.4) نحصل على:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}\{f(x) + \langle z^k, Ax\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - y^k\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|x - x^k\|^2\} & (2.6) \\ y^{k+1} = \underset{y\in Y}{\operatorname{argmin}}\{g(y) - \langle z^k, y\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax^{k+1} - y\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|y - y^k\|^2\} & (2.7) \\ z^{k+1} = z^k + \rho(Ax^{k+1} - y^{k+1}) & (2.8) \end{cases}$$

الجملة $(2.8) - (2.6)$ ما هي إلا طريقة النقطة الأقرب مطبقة على التابع $L_\rho(x, y, z^k)$ من أجل إيجاد التكرار التالي (x^{k+1}, y^{k+1}) ثم إيجاد مضروب لاغرانج التالي z^{k+1} بواسطة (2.8). وبتطبيق الاتجاهات المتناوبة للمضاريب نجد:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}\left\{f(x) + \langle z^k, Ax\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - y^k\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|x - x^k\|^2\right\} & (2.9) \\ y^{k+1} = \underset{y\in Y}{\operatorname{argmin}}\left\{g(y) - \langle z^k, y\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax^{k+1} - y\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|y - y^k\|^2\right\} & (2.10) \\ z^{k+1} = z^k + \rho(Ax^{k+1} - y^{k+1}) & (2.11) \end{cases}$$

إن وجود الحدين $\frac{1}{2\rho}\|x - x^k\|^2, \frac{1}{2\rho}\|y - y^k\|^2$ في كل من $(2.9), (2.10)$ على الترتيب، يعني أن حل كل من المسألتين $\min_{x\in X} L_\rho(x, y^k, z^k)\,, \min_{y\in Y} L_\rho(x^{k+1}, y, z^k)$ قد تم باستخدام طريقة تقريبية، أي أن الاتجاهات المتناوبة المعطاة بالعلاقات $(2.11) - (2.9)$ لا تعطي حلاً دقيقاً في كل خطوة إنما تعطي الحل بشكل تقريبي ، وهذا أمر ذو أهمية من عدة نواح، حيث إن وجود هذين الحدين يؤدي إلى أن كلاً من (2.10) و (2.9) يكون لها حل وحيد في كل خطوة، كما أن إيجاد الحل التقريبي له أهمية كبرى لأن الحصول على الحل الدقيق قد لا يكون ممكناً في كثير من الحالات. بما أن العلاقات $(2.11) - (2.9)$ تم الحصول عليها بدمج طريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب وطريقة النقطة الأقرب، لذلك يطلق على الجملة $(2.11) - (2.9)$ اسم طريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب الأقرب للمضاريب Proximal Alternating Direction Method of Multipliers، والتي يرمز لها بـ PADMM. في المرجع [1] درس الباحثون المسألة (2.1) في فضاءات هلبرت حقيقية غير منتهية الأبعاد، واقترحوا لحلها طريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب الأقرب PADMM المعطاة بالعلاقات $(2.9) - (2.11)$، بفرض أن مجموعة الحلول غير خالية، أثبتوا في [1] أن المتتالية الناتجة من $(2.11) - (2.9)$ تتقارب بضعف weakly converges نحو حل أمثل للمسألة (1.1) ومضروب لاغرانج أمثل.

– أول من اهتم بالحصول على تقارب قوي strong convergence لطريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب هو Glowinski في [10]، حيث درس المسألة (2.1) في فضاءات هلبرت وأثبت التقارب القوي وذلك بواسطة إدخال وسيط إلى (2.11) بحيث تصبح بالشكل $z^{k+1} = z^k + \gamma\lambda(Ax^{k+1} - y^{k+1})$ وأثبت أنه إذا كان $\gamma \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ فإن التقارب يكون بقوة نحو حل أمثل للمسألة (2.1). استمرت الأبحاث التي تهتم بطريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب وتطبيقاتها في العديد من المجالات، وكان هنالك اهتمام كبير في الحصول على نسب تقارب، ونشير إلى أن معظم هذه الدراسات كانت في حالة الفضاءات الإقليدية المنتهية الأبعاد. نذكر بعضاً منها:

في [5] درسوا المسألة (2.1) في الفضاءات المنتهية الأبعاد، وتحت فرض أن يكون تابع الهدف f محدباً بقوة وأثبتوا أن تقارب PADMM يكون بنسبة خطية.

في [11] أثبتت التجارب العددية أن $1 < \gamma < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ تؤدي إلى تقارب أسرع في عدة تطبيقات.

في [3] تم إثبات التقارب من الرتبة $O(1/k)$ في الفضاءات المنتهية الأبعاد وذلك بفرض أن f محدب بقوة. وتوجد نتائج أخرى حديثة في كل من [2,12,13,14,16,18].

النتائج والمناقشة:

الهدف من هذا البحث إثبات التقارب القوي لطريقة PADMM نحو حل أمثل للمسألة (1.1) . من أجل ذلك سوف نقوم بإجراء تعديل على العلاقات $(2.9) - (2.11)$ وذلك على النحو الآتي: نعيد الصياغة بحيث يتم حل المسألة (2.10) في البداية، أي سيتم الحل بالنسبة للمتحول y ومن ثم بالنسبة للمتحول x، كما نقوم بإدخال وسيط عددي إلى علاقة مضاريب لاغرانج، حيث نقوم بتحديد مجال هذا الوسيط لكي نحصل على تقارب قوي نحو حل أمثل للمسألة (1.1). وبناء على ذلك إذا كانت $(x^0, y^0, z^0) \in X \times Y \times Z$ نقطة بدء كيفية فإن طريقة الاتجاهات المتناوبة الأقرب للمضاريب بعد التعديل تكون بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} y^{k+1} = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \left\{ g(y) - \langle z^k, y \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax^k - y\|^2 + \frac{1}{2\rho} \|y - y^k\|^2 \right\} & (3.1) \\ x^{k+1} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + \langle z^k, Ax \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax - y^{k+1}\|^2 + \frac{1}{2\rho} \|x - x^k\|^2 \right\} & (3.2) \\ z^{k+1} = z^k + \gamma\rho(Ax^{k+1} - y^{k+1}) & (3.3) \end{cases}$$

سوف نستخدم العلاقتين الآتيتين في إثبات النتائج. أيا كان العنصران ξ, η في فضاء هلبرت X ما فإن:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} [\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2] \qquad (3.4)$$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} [\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\eta\|^2] \qquad (3.5)$$

لنرمز بـ F^k ,F^{k+1} إلى الكميتين الأتيتين:

$$F^{k+1} = \gamma\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 + \gamma\|y^{k+1} - \bar{y}\|^2 + \|z^{k+1} - \bar{z}\|^2$$
$$F^k = \gamma\|x^k - \bar{x}\|^2 + \gamma\|y^k - \bar{y}\|^2 + \|z^k - \bar{z}\|^2$$

<u>مبرهنة 3.1</u> بفرض أنه توجد $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ عندئذ لكل $k \geq 0$ ، فإن المتتالية الناتجة من $(3.1) - (3.3)$ تحقق المتراجحة الآتية:

$$F^k - F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(2-\gamma)\left\|Ax^{k+1} - y^{k+1}\right\|^2 + \gamma\left(\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 + \left\|y^{k+1} - y^k\right\|^2\right) +$$
$$+2\rho^2\gamma\langle y^{k+1} - \bar{y}, A(x^{k+1} - x^k)\rangle \qquad (3.6)$$

البرهان. بكتابة الشروط الأمثلية للمسألة (3.1) نحصل على:

$$z^k + \rho(Ax^k - y^{k+1}) + \frac{1}{\rho}(y^k - y^{k+1}) \in \partial g(y^{k+1})$$

ومن جهة ثانية لدينا $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ ومنه $\bar{z} \in \partial g(\bar{y})$. بما أن المؤثر ∂g مطرد فإن:

$$\langle y^{k+1} - \bar{y}, z^k - \bar{z} + \rho\left(Ax^{k+1} - y^{k+1}\right) + \rho A\left(x^k - x^{k+1}\right)\rangle \geq \frac{1}{\rho}\langle y^{k+1} - \bar{y}, y^{k+1} - y^k\rangle$$

باستخدام (3.4) نجد:

$$\langle y^{k+1}-\bar{y}, z^k-\bar{z}\rangle+\rho\langle y^{k+1}-\bar{y}, Ax^{k+1}-y^{k+1}\rangle+\rho\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-x^{k+1})\rangle \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\rho}[\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\|y^k-\bar{y}\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2] \qquad (3.7)$$

بشكل مشابه، بكتابة الشروط الأمثلية للمسألة (3.2) نحصل على:

$$-A^T z^k-\rho A^T(Ax^{k+1}-y^{k+1})+\frac{1}{\rho}(x^k-x^{k+1}) \in \partial f(x^{k+1})$$

وبما أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$ فإن $-A^T\bar{z} \in \partial f(\bar{x})$، وبسبب كون المؤثر ∂f مطرد نجد:

$$\langle A(x^{k+1}-\bar{x}), \bar{z}-z^k\rangle+\rho\langle A(x^{k+1}-\bar{x}), y^{k+1}-Ax^{k+1}\rangle \geq \frac{1}{\rho}\langle x^{k+1}-\bar{x}, x^{k+1}-x^k\rangle$$

باستخدام (3.4) نجد:

$$\langle A(x^{k+1}-\bar{x}), \bar{z}-z^k\rangle+\rho\langle A(x^{k+1}-\bar{x}), y^{k+1}-Ax^{k+1}\rangle \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\rho}[\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2+\|x^{k+1}-x^k\|^2] \qquad (3.8)$$

بجمع المتراجحتين (3.7), (3.8) وبما أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$ فإن $A\bar{x}-\bar{y}=0$ وبالتالي:

$$\langle Ax^{k+1}-y^{k+1}, \bar{z}-z^k\rangle \geq \rho\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2+\rho\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-x^k)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2\rho}\left[\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2+\|x^{k+1}-x^k\|^2+\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\|y^k-\bar{y}\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2\right] \quad (3.9)$$

نقوم بتقدير الحد $\langle Ax^{k+1}-y^{k+1}, \bar{z}-z^k\rangle$ من الطرف الأيسر من المتراجحة (3.9). من (3.3) نجد: $2\gamma\rho\langle Ax^{k+1}-y^{k+1}, \bar{z}-z^k\rangle = 2\langle z^{k+1}-z^k, \bar{z}-z^k\rangle$ و باستخدام (3.4) ثم (3.3) نجد:

$$2\gamma\rho\langle Ax^{k+1}-y^{k+1}, \bar{z}-z^k\rangle = \|z^k-\bar{z}\|^2-\|z^{k+1}-\bar{z}\|^2+\gamma^2\rho^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 \quad (3.10)$$

نضرب طرفي العلاقة (3.9) بـ $2\gamma\rho$ ونستخدم (3.10) نحصل على:

$$\|z^k-\bar{z}\|^2-\|z^{k+1}-\bar{z}\|^2 \geq \rho^2\gamma(2-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2+2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-x^k)\rangle+$$
$$+\gamma[\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2+\|x^{k+1}-x^k\|^2]+\gamma[\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\|y^k-\bar{y}\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2]$$

بإعادة ترتيب الحدود نحصل على المتراجحة المطلوبة. ■

مبرهنة 3.2 لتكن $\{(x^k,y^k,z^k)\}$ المتتالية الناتجة من $(3.1)-(3.3)$ عندئذ لكل $k \geq 0$ يكون:

$$F^k-F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(1-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2+\gamma\left(\|x^{k+1}-x^k\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2\right)+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2$$
$$+\rho^2\gamma\|A\|^2(-\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2)+\rho^2\gamma\,\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+2\rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^k-\bar{x})\rangle \quad (3.11)$$

برهان. بالنظر إلى المتراجحة (3.6) نلاحظ الآتي:

$$2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-x^k)\rangle = 2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-\bar{x})-A(x^k-\bar{x})\rangle$$

من (3.4) و من كون $A\bar{x}-\bar{y}=0$ نجد:

$$2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-x^k)\rangle = \quad -2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-\bar{x})\rangle+$$
$$+\rho^2\gamma[\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2-\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2] \quad (3.12)$$

باستبدال (3.12) في (3.6) نجد أن:

$$F^k-F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(1-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2+\gamma\left(\|x^{k+1}-x^k\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2\right)+$$
$$+\rho^2\gamma\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2-2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-\bar{x})\rangle \qquad (3.13)$$

باستخدام (3.3) وبما أن $A\bar{x}-\bar{y}=0$ ، عندئذ يمكننا تقدير الحد $-2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-\bar{x})\rangle$ في (3.13)على النحو الآتي: نلاحظ أن: $y^{k+1}-\bar{y}=A(x^{k+1}-\bar{x})+\frac{1}{\gamma\rho}(z^k-z^{k+1})$، ومنه:

$$-2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-\bar{x})\rangle = -2\rho^2\gamma\left\langle A(x^{k+1}-\bar{x})+\frac{1}{\gamma\rho}(z^k-z^{k+1}), A(x^k-\bar{x})\right\rangle =$$
$$= -2\rho^2\gamma\langle A(x^{k+1}-\bar{x}), A(x^k-\bar{x})\rangle + 2\rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^k-\bar{x})\rangle$$

باستخدام (3.4) نجد:

$$-2\rho^2\gamma\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^k-\bar{x})\rangle \geq -2\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2 - \rho^2\gamma\|A(x^k-\bar{x})\|^2 +$$
$$+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2 + 2\rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^k-\bar{x})\rangle \qquad (3.14)$$

نستبدل (3.14) في (3.13)، و بما أن A مؤثر خطي ومحدود فإن:

$$F^k - F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(1-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 + \gamma\|x^{k+1}-x^k\|^2 + \gamma\|y^{k+1}-y^k\|^2 +$$
$$+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2 + \rho^2\gamma\|A\|^2(-\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 - \|x^k-\bar{x}\|^2) +$$
$$+\rho^2\gamma\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2 + 2\rho\langle z^{k+1}-\bar{z}, A(x^k-\bar{x})\rangle$$

وهي المتراجحة المطلوب إثباتها.■

<u>مبرهنة 3.3</u> ليكن $c>0$ عدداً موجباً كيفياً، عندئذ المتتالية الناتجة من $(3.3)-(3.1)$ تحقق المتراجحة الآتية:

$$F^k - F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(1-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 + \gamma\|x^{k+1}-x^k\|^2 + \gamma\|y^{k+1}-y^k\|^2 +$$
$$+\rho^2\gamma\|A\|^2[\,(-1-2c)\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 - \|x^k-\bar{x}\|^2\,] + \rho^2\gamma\left[(1-2c)\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2 - \frac{4}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right]$$
$$+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2 + \langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \qquad (3.15)$$

البرهان. لنبدأ من المقدار الآتي $2\rho\langle z^{k+1}-z^k, y^k-\bar{y}\rangle$: من كون $A\bar{x}-\bar{y}=0$ ومن (3.3) لدينا:

$$2\rho\langle z^{k+1}-z^k, y^k-\bar{y}\rangle = 2\rho^2\gamma\langle A(x^{k+1}-\bar{x})-(y^{k+1}-\bar{y}), y^k-\bar{y}\rangle$$

بتطبيق متراجحة كوشي شوارتز على الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة، عندئذ من أجل كل $c>0$ نجد:

$$2\rho\langle z^{k+1}-z^k, y^k-\bar{y}\rangle \geq \rho^2\left[-2\gamma c\|A(x^{k+1}-\bar{x})-(y^{k+1}-\bar{y})\|^2 - \frac{2\gamma}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right]$$
$$\geq \rho^2\left[-2\gamma c(\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 + \|y^{k+1}-\bar{y}\|^2) - \frac{2\gamma}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right]$$

ومنه:

$$\mathbf{0} \geq 2\boldsymbol{\rho}\langle z^{k+1}-z^k, -(y^k-\bar{y})\rangle + 2\boldsymbol{\gamma\rho}^2\left[-c\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 - c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2 - \frac{4}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right] \quad (\mathbf{3.16})$$

نجمع (3.4) و(3.16) نجد:

$$F^k - F^{k+1} \geq \rho^2\gamma(1-\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 + \rho^2\gamma\|A\|^2[\,(-1-2c)\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 - \|x^k-\bar{x}\|^2\,] +$$
$$+\rho^2\gamma\left[(1-2c)\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2 - \frac{4}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right] + \gamma\|x^{k+1}-x^k\|^2 + \gamma\|y^{k+1}-y^k\|^2 +$$
$$+\rho^2\gamma\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2 + \langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle$$

وهي المتراجحة المطلوب إثباتها.■

<u>مبرهنة 3.4</u> من أجل كل $k\geq 0$ تكون المتراجحة الآتية صحيحة:

$$2\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \geq$$
$$\geq \rho[2\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 - 2\|Ax^k-y^k\|^2] + \rho\|z^{k+1}-z^k\|^2 \quad (3.17)$$

البرهان. نبدأ من معالجة المقدار الآتي $\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle$ حيث سنستخدم (3.5) نجد:

$$\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle = \frac{\rho}{2}[-\|z^{k+1}-z^k\|^2 - \|Ax^k-y^k\|^2 + \|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2] =$$
$$= \frac{\rho}{2}[-\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 - \|Ax^k-y^k\|^2 + \|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2] \geq$$
$$\geq \rho[-\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2 - 5\|Ax^k-y^k\|^2] + \frac{\rho}{2}\|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2$$

وهذا يعني:

$$\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \geq \rho[-\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-5\|Ax^k-y^k\|^2]+ \\ +\frac{\rho}{2}\|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2 \qquad (3.18)$$

ثانياً، لنأخذ المقدار $-\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle$ ونستخدم (3.4):

$$-\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle = -\frac{\rho}{2}[\|z^{k+1}-z^k\|^2+\|Ax^k-y^k\|^2-\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2]=$$

$$=-\frac{\rho}{2}[\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2+\|Ax^k-y^k\|^2-\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2]\geq$$

$$\geq\rho\left[-3\rho^2\gamma^2\left\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\right\|^2-2\left\|Ax^k-y^k\right\|^2\right]+\frac{\rho}{2}\left\|z^{k+1}-z^k-\left(Ax^k-y^k\right)\right\|^2\geq$$

$$\geq\rho[-3\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-2\|Ax^k-y^k\|^2]-\frac{\rho}{2}\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2$$

ومنه:

$$-\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \geq \rho[-3\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-2\|Ax^k-y^k\|^2]+ \\ -\frac{\rho}{2}\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2 \qquad (3.19)$$

بطرح (3.19) من (3.18) نحصل على

$$2\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \geq \rho[2\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-3\|Ax^k-y^k\|^2]+ \\ +\frac{\rho}{2}[\|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2+\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2]$$

نعلم أنه لكل $\eta,\xi\in X$ تتحقق العلاقة الآتية: $\|\xi\|^2+\|\eta\|^2=\frac{1}{2}\left(\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2\right)$ ومنه :

$$\frac{\rho}{2}[\|z^{k+1}-z^k+(Ax^k-y^k)\|^2+\|z^{k+1}-z^k-(Ax^k-y^k)\|^2]=\rho(\|z^{k+1}-z^k\|^2+\|Ax^k-y^k\|^2)$$

ينتج أن

$$2\rho\langle z^{k+1}-z^k, Ax^k-y^k\rangle \geq \rho[2\rho^2\gamma^2\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-2\|Ax^k-y^k\|^2]+\rho\|z^{k+1}-z^k\|^2$$

وهي المتراجحة المطلوب إثباتها.■

مبرهنة 3.5 بفرض أنه توجد $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in S$ ولتكن $\{(x^k,y^k,z^k)\}$ المتتالية الناتجة من (3.3) – (3.1) عندئذ إذا كان $\gamma\in\left(\frac{\sqrt{33}-1}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ فإن:

$$\lim_{k\to\infty}\|x^k-\bar{x}\|=0,\quad \lim_{k\to\infty}\|y^k-\bar{y}\|=0\quad,\ \lim_{k\to\infty}(z^{k+1}-z^k)=0$$

والمتتالية $\{z^k\}$ محدودة في Y، كما يكون:

$$\lim_{k\to\infty}\{\|x^{k+1}-x^k\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2+\|z^{k+1}-z^k\|^2+\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2\}=0$$

البرهان. باستبدال (3.17) في (3.15) نجد أن:

$$F^k-F^{k+1}\geq\rho^2\gamma(1-\gamma+2\rho\gamma)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-2\rho\|Ax^k-y^k\|^2+ \\ +\rho^2\gamma\|A\|^2[(-1-2c)\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2]+\rho^2\gamma\left[(1-2c)\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\frac{4}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right]+ \\ +\gamma\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2+\left\|y^{k+1}-y^k\right\|^2+\rho^2\left\|A\left(x^{k+1}-x^k\right)\right\|^2\right]+\rho\left\|z^{k+1}-z^k\right\|^2 \qquad (3.20)$$

من أجل الحصول على النتائج المطلوبة، نأخذ $\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle$، ومن (3.3) نجد:

$$\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle=\rho\left\langle-\gamma\rho\Big(A(x^{k+1}-\bar{x})-(y^{k+1}-\bar{y})\Big), A(x^{k+1}-\bar{x})\right\rangle \\ =-\gamma\rho^2\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2+\gamma\rho^2\langle y^{k+1}-\bar{y}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle$$

نطبق (3.4) على الطرف الأيمن:

$$\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle=-\frac{\gamma\rho^2}{2}\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2+\frac{\gamma\rho^2}{2}\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\frac{\gamma\rho^2}{2}\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2$$

$$\geq -\frac{\gamma\rho^2}{2}\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2+\frac{\gamma\rho^2}{2}\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\frac{\gamma\rho^2}{2}\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2$$

إذاً:

$$0 \geq \rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle-\frac{\gamma\rho^2}{2}\left\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\right\|^2+\frac{\gamma\rho^2}{2}\left\|y^{k+1}-\bar{y}\right\|^2-\frac{\gamma\rho^2}{2}\|A\|^2\left\|x^{k+1}-\bar{x}\right\|^2 \quad (3.21)$$

نضيف (3.21) إلى (3.20):

$$F^k-F^{k+1} \geq \rho^2\gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma+2\rho\gamma\right)\|Ax^{k+1}-y^{k+1}\|^2-2\rho\|Ax^k-y^k\|^2+$$
$$+\rho^2\gamma\|A\|^2\left[\left(-\frac{3}{2}-2c\right)\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2-\|x^k-\bar{x}\|^2\right]+\rho^2\gamma\left[\left(\frac{3}{2}-2c\right)\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\frac{4}{c}\|y^k-\bar{y}\|^2\right]+$$
$$+\gamma[\|x^{k+1}-x^k\|^2+\|y^{k+1}-y^k\|^2+\rho^2\|A(x^{k+1}-x^k)\|^2]+\rho\|z^{k+1}-z^k\|^2+$$
$$+\rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle \quad (3.22)$$

لدينا من (3.3):

$$\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle = \rho^2\gamma\langle (y^{k+1}-\bar{y})-A(x^{k+1}-\bar{x}), A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle =$$
$$= \rho^2\gamma\langle (\boldsymbol{y^{k+1}}-\bar{\boldsymbol{y}}), A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle+\rho\langle \gamma\rho A(x^{k+1}-\bar{x}), A(\bar{x}-x^{k+1})\rangle$$

بتطبيق كوشي شوارتز على الطرف الأيمن نحصل من أجل أي $c > 0$ على:

$$\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle \geq -\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2-\rho^2\gamma\frac{1}{c}\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2+$$
$$-\rho^3\gamma^2 c\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2-\rho\frac{1}{c}\|A(x^{k+1}-\bar{x})\|^2 \geq$$
$$\geq -\rho^2\gamma\rho\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-\frac{1}{c}-\rho\gamma c\right)-\frac{\rho}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 \geq$$
$$\geq -\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-\frac{3}{c}-\rho\gamma c\right)-\frac{\rho}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2$$

ومنه:

$$\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle \geq$$
$$\geq -\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-\frac{3}{c}-\rho\gamma c\right)-\frac{\rho}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 \quad (3.23)$$

من جهة ثانية، من أجل كل $c > 0$ لدينا:

$$2\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle =$$
$$= 2\rho^2\gamma\langle (y^{k+1}-\bar{y}), A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle+2\rho\langle \gamma\rho A(x^{k+1}-\bar{x}), A(\bar{x}-x^{k+1})\rangle \geq$$
$$\geq -2\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-2\frac{1}{c}-2\rho\gamma c\right)-2\rho\frac{1}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 \geq$$
$$\geq -6\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-2\frac{1}{c}-5\rho\gamma c\right)-2\rho\frac{1}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2$$

بالتالي:

$$2\rho\langle z^k-z^{k+1}, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle \geq$$
$$\geq -6\rho^2\gamma c\left\|y^{k+1}-\bar{y}\right\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-2\frac{1}{c}-5\rho\gamma c\right)-2\rho\frac{1}{c}\right]\|A\|^2\left\|x^{k+1}-\bar{x}\right\|^2 \quad (3.24)$$

بطرح (3.24) من (3.23):

$$\rho\langle z^{k+1}-z^k, A(x^{k+1}-\bar{x})\rangle \geq$$
$$\geq 5\rho^2\gamma c\|y^{k+1}-\bar{y}\|^2+\left[\rho^2\gamma\left(-\frac{1}{c}+4\rho\gamma c\right)+\rho\frac{1}{c}\right]\|A\|^2\|x^{k+1}-\bar{x}\|^2 \quad (3.25)$$

باستبدال (3.25) في (3.22) نجد أن:

$$F^k - F^{k+1} + 2\rho\|Ax^k - y^k\|^2 + \rho^2\gamma\|A\|^2\|x^k - \bar{x}\|^2 + \rho^2\gamma\frac{4}{c}\|y^k - \bar{y}\|^2 \geq$$
$$\geq \rho^2\gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma + 2\rho\gamma\right)\|Ax^{k+1} - y^{k+1}\|^2 + \rho^2\gamma\|A\|^2\left(-\frac{1}{c} - \frac{3}{2} - 2c + 4\gamma\rho c\right)\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2$$
$$+\frac{\rho}{c}\|A\|^2\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 + \rho^2\gamma\left(\frac{3}{2} + 3c\right)\|y^{k+1} - \bar{y}\|^2 +$$
$$+\gamma\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 + \left\|y^{k+1} - y^k\right\|^2 + \rho^2\left\|A\left(x^{k+1} - x^k\right)\right\|^2\right] + \rho\left\|z^{k+1} - z^k\right\|^2 \quad (3.26)$$

بما أن ρ, c كيفيان، لذلك بأخذ $\rho = \ c = 1$ نستنتج أن التقارب القوي لكل من $\{x^k\}$ و $\{\boldsymbol{y^k}\}$ و $\|Ax^{k+1} - y^{k+1}\|$ والذي يؤدي الى التقارب القوي لـ $\{z^{k+1} - z^k\}$ يتحقق عندما يكون $\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma - 2 > 0$، و $4\gamma^2 - \frac{11}{2}\gamma + 1 > 0$، و $\frac{1}{2}\gamma > 0$، وهذا يعني، على الترتيب، أن $\gamma > \frac{\sqrt{33}-1}{4} = 1.186$، و $\gamma > 1.159$، و $\gamma > 0$. مع الأخذ بعين الاعتبار الحد الأعلى الذي قدّمه Glowinski وهو $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ نستنتج أن التقارب القوي يحصل عندما $\gamma \in \left(\frac{\sqrt{33}-1}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$،
وبالنظر إلى المتراجحة (3.26) نجد أن الكمية:

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \|y^{k+1} - y^k\|^2 + \|z^{k+1} - z^k\|^2 + \|A(x^{k+1} - x^k)\|^2$$

تتناهى إلى الصفر عندما $k \to \infty$ وأن $\{z^k\}$ محدودة. وبذلك يتم المطلوب.■

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا البحث بإثبات التقارب القوي لطريقة الاتجاهات المتناوبة للمضاريب الأقرب، حيث أثبتنا أنه إذا كان $\gamma \in (1.186, 1.618)$ فإن المتتالية الناتجة من PADMM تتقارب بقوة نحو حل أمثل لمسألة أمثليات محدبة مقيدة من الشكل (1.1).

ونوصي بما يلي:

- دراسة تطبيقات لهذه المسألة في عدة مجالات وبخاصة التطبيقات في الفضاءات الغير منتهية الأبعاد كالمعادلات التفاضلية الجزئية، والتحكم الأمثل وغيرها...
- تعميم النتائج إلى حالة أعم وهي مسألة من الشكل $\min_{x\in X, y\in Y}\{f(x) + g(y): Ax - By = 0\}$ حيث $B: Y \to Z$ مؤثر خطي ومستمر، و Z فضاء هلبرت.

References:

[1] ATTOCH, H.; SOUEYCATT, M. *Augmented Lagrangian and Proximal Alternating Direction Methods of Multipliers in Hilbert Spaces: Applications to Games, PDE's and Control*. Pacific Journal of Optimization, vol. 5, 2009, 17-37.

[2] BARJAC, G.; GOULART, P.; STRLLATO, B.; BOYD, S. *Infeasibility Direction in the Alternating Direction Method of Multipliers for Convex Optimization*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 183, 2019, 490- 519.

[3] BOT, R.; CSETNEK, E. *ADMM for monotone operators: convergence analysis and rates*. Adv. Comput. Math., vol. 45, 2019, 327-359.

[4] CHIN, G.; TEBOULLE, M. *A proximal-based decomposition method for convex minimization problems*. Math. Program., vol. 64, 1994, 81-101.

[5] DENG, W.; YIN, W. *On the global and linear convergence of the generalized alternating direction method of multipliers*. Journal of Scienntific Computing, vol. 66, 2016, 889- 916.
[6] FIGUEIREDO, M.; BIOUCAS-DIAS, J. *Restoration of Poissonian Images Using Alternating Direction Optimization*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, 2010, 3133-3145.
[7] FORERO, P.; CANO, A.; GIANNAKIS, G. *Consensus-based distributed support vector machines*. J. Mach. Learn. Res., vol. 99, 2010, 1663-1707.
[8] GABAY, D.; MERCIER, B. *A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite elements approximations*. Computers and Mathematics with Applications, vol. 2, 1976, 17-40.
[9] GHADIMI, E.; TEIXEIRA, A.; SHAMES, I.; JOHANSSON, M. *Optimal sParameter Selection for the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM): Quadratic Problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, 2015, 644-658.
[10] GLOWINSKI, R. *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer Series in Computational Physics, Springer, Verlag, 1984.
[11] HE, B.; WANG, S.; YANG, H. *A Modified Variable-Penalty Alternating Directions method for Monotone Variational Inequalities*. J. Comput. Math., vol. 21, 2003, 495-504.
[12] HONG, M.; LUO, Z.; RAZAVIYAYN, M. *Convergence Analysis of Alternating Direction Method of Multipliers for a Family of Non convex Problems*. Society of Industrial and Applied Mathematics Journal of Osptimization, vol. 26, 2015, 337-364.
[13] HONG, M.; LUO, Z. *On the Linear Convergence of the Alternating Direction Method of Multipliers*. Mathematical Programming, vol. 162, 2016, 165-199.
[14] IATZELER, F.; BIANCHI, P.; CIBLAT, PH.; HACHEM, W.
Explicit Convergence Rate of a Distributed Alternating Direction Method of Multipliers. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 61, 2016, 892- 904.
[15] ROCKAFELLAR, R. *Monotone operators and the proximal point algorithm*. SIAM Journal of Control Optimization, vol. 14, 1976, 877-898.
[16] SUN, T.; JIANG, H.; CHENG, L.; ZHU, W. *Iteratively Linearized Reweighted Alternating Direction Method of Multipliers for a Class of Non convex Problems*.
IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 66, 2018, 5380-5391.
[17] WAHLBERG, B.; BOYD, S.; ANNERGREN, M; WANG, Y. *An ADMM Algorithm for a Class of Total Variational Regularized Estimation Problems*. IFAC Proceedings Volumes, vol. 45, 2012, 83-88.
[18] XU, M. *Proximal Alternating Directions Method for Structured Variational Inequalities*. J.Optim. Theory Appl., vol. 134, 2007, 107-117.
[19] YANG, J.; ZHANG, Y. *Alternating Direction Algorithms for l_1-Problems in Compresssive sensing*. SIAM J.Sci. Comput., vol.1, 2011, 250-278.