

Studying Bound States of some Halo Nuclei

Dr. Amir TFIHA *

(Received 5 / 12 / 2017. Accepted 8 / 5 /2018)

□ ABSTRACT □

In this paper, we assumed the Halo nucleus consist of a nuclear core and two neutrons in the framework of the cluster model, and we wrote the Hamiltonian that expresses the relative motion of nucleons in the cluster model using Jacobi coordinates. The above radius was determined in supra-spherical polar coordinates. We get Fadeev's equations by switching the wave function in the Schrödinger equation. The calculations were carried out for the T-form of Borromean halo nuclei with the model (core + two neutrons). The values are in agreement to the experimental values.

Keywords: Halo nucleus – Borromean - Fadeev - cluster model.

* Associate Professor, Department of Physics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

دراسة سويات الارتباط في بعض النوى الهالية

الدكتور أمير تفيحة*

(تاريخ الإيداع 5 / 12 / 2017. قُبل للنشر في 8 / 5 / 2018)

□ ملخص □

افترضنا في هذا البحث النواة الهالية كجملة مؤلفة من لب نووي ونيوترونين في إطار الأنموذج العنقودي، وكتبنا الهاملتوني المعبر عن الحركة النسبية للنكليونات في أنموذج العناقيد باستخدام احداثيات جاكوبي . تم تحديد فوق نصف القطر في الاحداثيات القطبية فوق الكروية. نحصل على معادلات فاديف بتبديل التابع الموجي في معادلة شرودنغر و أجريت الحسابات للتشكيل T للنوى الهالية البورميونية بالنموذج لب+نيوترونين ، حسب كثافة النواة الهالية و نصف القطر للمادة النووية للنواة الهالية وحصلنا اعتماداً على النموذج المفترض على قيم تقترب من القيم التجريبية.

الكلمات المفتاحية: النواة الهالية- البورميونية- فاديف- أنموذج العناقيد.

* أستاذ مساعد - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

مقدمة:

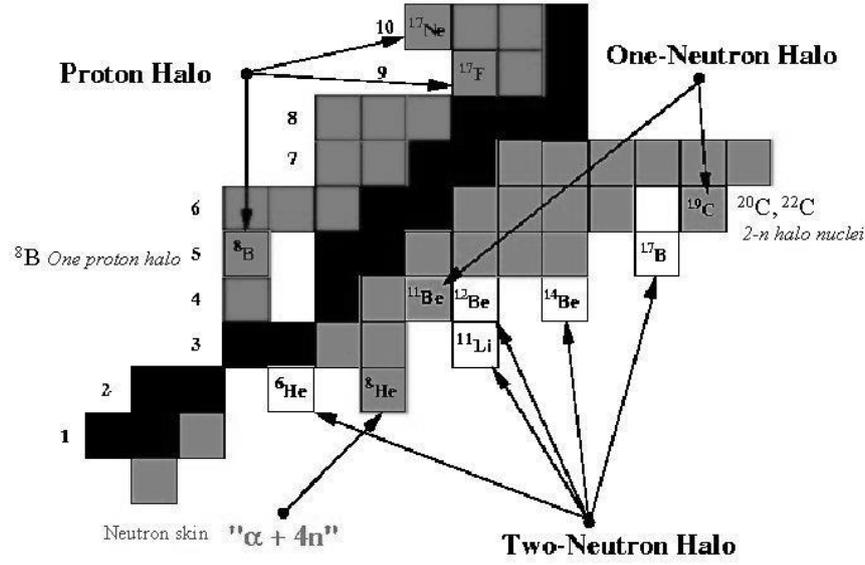
تبين عند اكتشاف نواة ^{11}Li في مخبر بركلي أن هذه النواة تملك مقطعاً عرضياً كبيراً [1]. فسر العلماء كبر المقطع العرضي لهذه النواة بوجود نيوترونين يتوضعان على مدار بعيد عن قلب النواة، وهو ما فسر فيما بعد بأن النيوترونين يشكلان هالة، وهذا الأمر كان غريباً لأن هذين النيوترونين يجب أن يبقياً داخل مدى القوة المركزية للنواة وقد فسر هذا الأمر بمفعول النفق. بما أن ظاهرة النفق هي ظاهرة كمومية، فإن الهالة ليس لها شبيهه كلاسيكي [2]. إن طاقة ارتباط النيوترونين الأخيرين لالتزيد عن 10% من متوسط طاقة ارتباط النيوكليون وهي تكون هالة تجعل حجم النواة ضعف حجم نواة لها الكتلة ذاتها. وسرعان ما تبين أنه إذا ما أزيل أحد نيوتروني الهالة لا يلبث أن يلحق به النيوترون الآخر، وكأن الجملة مؤلفة من ثلاثة أجسام تتفكك عند إزالة أحد النيوترونات، وهذا ما دفع زوكوف [3] بأن يدعوها نواة بوروميونية تشببها لها بشاره حكام إمارة بوروميو الإيطالية حيث الشارة تتألف من ثلاث حلقات متشابهة إذا أزيلت واحدة تنفصل الحلقتان الأخريان.

تبنى العلماء في دراستهم للنوى الهالية أنها جملة مؤلفة من عدة جسيمات فافترضوا أن نواة ^{11}Li مكونة من نواة ^9Li ونيوترونين هما الهالة، وقد واجهوا مشكلة عدم وجود تصور دقيق وقابل للحساب للقوة النووية، إضافة لصعوبة وصف التابع الموجي.

نحصل عند حل معادلة شرودنغر $H\psi = E\psi$ على القيم الخاصة، تطابق القيمة الخاصة أكثر من تابع خاص، إن أي تركيب خطي من التوابع الخاصة المطابقة لمستويات الطاقة المتولدة هو أيضاً تابع خاص لهذه القيمة، أي أن اختيار التوابع الخاصة للمستويات الطاقية المتولدة ليس وحيداً، وهو بشكل عام ليس متعامداً. باختيار مناسب لتراكيب خطية من هذه التوابع نستطيع الحصول على مجموعة توابع خاصة منظمة ومتعامدة (وهذا يمكن أن يتم بعدد لامتناه من الطرق)، مثلاً من أجل n من التوابع الخاصة لدينا n^2 من العوامل المستقلة، أما في حال تحقق شرطي التعامد والتنظيم فيكون $\frac{1}{2}n(n+1)$ من المعاملات أي أقل من n^2 .

بفرض لدينا هاملتوني لجملة بالشكل $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ بحيث يتضمن الأول الإحداثي q_1 والثاني q_2 وبالتالي يمكن أن نكتب التوابع الخاصة للهاملتوني \hat{H} الكلي كجاء للتوابع الخاصة للمؤثرين \hat{H}_1, \hat{H}_2 . تكون الطاقات الخاصة مكافئة لمجموع القيم الخاصة لهذين المؤثرين.

قد يكون طيف القيم الخاصة للطاقة مستمراً أو متقطعاً، والسوية المستقرة للطيف المنفصل تطابق الحركة المنتهية للجملة (قد يكون طيف القيم الخاصة للطاقة مستمراً أو متقطعاً، يكون التكامل $\int |\psi|^2 dq$ محدوداً وهذا يعني أن $|\psi|^2$ يتناقص بسرعة ليكون مساوياً للصفر عند اللانهاية، بمعنى أن احتمال القيم اللامتناهية للإحداثيات يساوي الصفر أي أن الجملة تنفذ حركة منتهية ونقول أنها بحالة حدية *Bound Stat*. الحالة المرتبطة يمكن أن توجد في أي وضع فيه نهاية محلية صغرى (أو نهاية صغرى غير محلية) لكن وجود النهاية الصغرى غير كاف لانشاء حالة الارتباط بالرغم من أن هناك حالات تجاوب ذات عمر طويل قد تتشكل عند طاقات معينة عند نهاية محلية صغرى، لكن مفعول النفق يسمح بتخامد هذه الحالات وسوف نقلت السويات من هذه النهايات الصغرى، لذا يكون وجود نهاية صغرى عالمية (غير محلية) هام للسماح بوجود سويات الارتباط. [4]



الشكل (1) يبين النوى الهالية [5]

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي حلولاً تقريبية للنموذج النووي المقترح للنوى الهالية ، ويهدف إلى وضع تصور قيد الاختبار حيث يفترض النواة الهالية كجملة مؤلفة من لب نووي ونيوترونين في إطار الأنموذج العنقودي .

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الفيزياء النووية النظرية وبشكل خاص في مجال النماذج النووية ، لذلك فإن التقنيات المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على الطرائق العددية لحل المعادلات الناتجة عن تطبيق الأنموذج المفترض، وتمت الحسابات باستخدام برنامج فورتران 95 .

الهاملتوني والتابع الموجي للنوى الهالية:

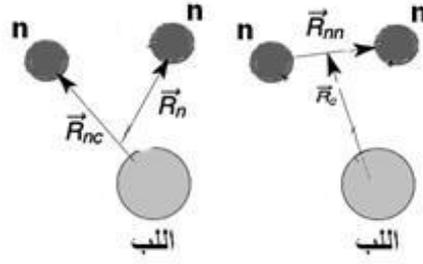
نكتب الهاملتوني المعبر عن الحركة النسبية للنكليونات في أنموذج العناقيد [6] بالشكل:

$$H = \frac{P_1^2}{2\mu_m} + \frac{P_2^2}{2\mu_{c,m}} + V_{cn}(\vec{r}_1) + V_{cn}(\vec{r}_2) + V_{nn}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + \Gamma \sum_{FS} |\psi_{FS}\rangle \langle \psi_{FS}| \quad (1)$$

P_1 عزم الدفع للنيوترونين، P_2 عزم الدفع لمركز الكتلة للنيوترونين بالنسبة لللب، A_c كتلة العنقود،

$$\mu_{nc,n} = \frac{(A_c + 1)m}{A_c + 2}, \quad \mu_{nc} = \frac{A_c m}{A_c + 1}, \quad \mu_{nn} = \frac{m}{2}, \quad \mu_{c,m} = \frac{2A_c m}{A_c + 2} \quad (2)$$

m ، كتلة النيوكليون. $\vec{r}_1 = \vec{R}_{nc}$ ، $\vec{r}_2 = \vec{R}_c$ ، $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{R}_{nn}$ ، تعبر $V_{nn}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ عن التفاعل نيوترون-نيوترون، ويعبر V_{cn} عن كمون عنقود-نيوترون، والحد الأخير يلعب دوراً في عزل السويات الممنوعة .



الشكل (2) يبين المواقع النسبية للنيوترونين واللب في النواة الهالية (التشكيل T والتشكيل Y)

يمكننا استخدام احداثيات جاكوبي التي تحدد بالعلاقات [7]:

$$\xi_1^i = \mu_{ij} r_{jk} \quad , \quad \xi_2^i = \mu_{(jk)i} r_{(jk)i} \quad (3)$$

$$\mu_{jk} = \left(\frac{1}{m} \frac{m_j m_k}{m_j + m_k} \right) \quad , \quad \mu_{(jk)i} = \left(\frac{1}{m} \frac{(m_j + m_k) m_i}{m_1 + m_2 + m_3} \right) \quad (4)$$

$$r_{jk} = \mu_{jk} (r_j - r_k) \quad \quad r_{(jk)i} = \frac{m_j r_j + m_k r_k}{m_j + m_k} - r_i \quad (5)$$

حيث (i,j,k) تبدل دورياً (1و2و3) و μ الكتلة المختزلة بوحدة m .

يتم تحديد فوق نصف القطر في الاحداثيات القطبية فوق الكروية من $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$

ومجموعة من خمسة متغيرات نرمز لها بـ Ω وهي ترمز لأربعة زوايا قطبية (θ_1, φ_1) و (θ_2, φ_2) و ξ_1^i و ξ_2^i الزوايا التي تصف اتجاه ξ_1^i, ξ_2^i و $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ أي $\Omega \equiv (\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \varphi)$ تحدد الزاوية φ

الطول النسبي لكل من ξ_1, ξ_2 بالعلاقتين $\xi_1 = \rho \sin(\varphi)$, $\xi_2 = \rho \cos(\varphi)$

ويعطى عنصر الحجم بالعلاقة:

$$dV = d^3 \xi_1 d^3 \xi_2 = \xi_1^2 d\xi_1 \sin(\theta_1) d\theta_1 d\varphi_1 \xi_2^2 d\xi_2 \sin(\theta_2) d\theta_2 d\varphi_2$$

$$dV = \rho^5 d\rho \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) d\varphi \sin(\theta_1) d\theta_1 d\varphi_1 \sin(\theta_2) d\theta_2 d\varphi_2$$

يكتب التابع الموجي للنوى الهالية بالشكل التالي [8]: $\phi_A = \varphi_{core}(\rho) \psi(\xi_1, \xi_2)$

يحتوي $\psi(\xi_1, \xi_2)$ على معلومات عن نصف القطر والزوايا والسين للنيوترونين، ويمكن كتابة التابع

$\psi(\xi_1, \xi_2)$ كمجموع لثلاثة توابع موجية بإحداثيات جاكوبي:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^3 \psi^{(i)}(\xi_1^i, \xi_2^i) \quad (6)$$

وبتبديل التابع الموجي في معادلة شرودنغر نحصل على معادلات فاديف [9] :

$$\begin{aligned}
& (T_i + h + \hat{V}_{core,n2}(\xi_1^1)) \psi^{(1)}(\xi_1^1, \xi_2^1) \\
& \quad = -\hat{V}_{core,n2}(\xi_1^1) [\psi^{(2)}(\xi_1^2, \xi_2^2) + \psi^{(3)}(\xi_1^3, \xi_2^3)] \\
& (T_i + h + \hat{V}_{core,n1}(\xi_1^2)) \psi^{(2)}(\xi_1^2, \xi_2^2) \\
& \quad = -\hat{V}_{core,n1}(\xi_1^2) [\psi^{(1)}(\xi_1^1, \xi_2^1) + \psi^{(3)}(\xi_1^3, \xi_2^3)] \\
& (T_i + h + \hat{V}_{n1,n2}(\xi_1^3)) \psi^{(3)}(\xi_1^3, \xi_2^3) \\
& \quad = -\hat{V}_{n1,n2}(\xi_1^3) [\psi^{(1)}(\xi_1^1, \xi_2^1) + \psi^{(2)}(\xi_1^2, \xi_2^2)]
\end{aligned} \tag{7}$$

يعطى مؤثر الطاقة الحركية $T_i = T_{\xi_1^i} + T_{\xi_2^i}$; $i = 1,2,3$

$$T_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\mu_1} \Delta_{\xi_1^i} + \frac{1}{\mu_2} \Delta_{\xi_2^i} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} [\Delta_{\xi_1} + \Delta_{\xi_2}]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(T_\rho - \frac{1}{\rho^2} \Lambda^2 + E \right) \psi^{(i)}(\xi_1^i, \xi_2^i) + \hat{V} \psi(\xi_1, \xi_2) = 0 \tag{8}$$

يمكن نشر التوابع الموجية $\psi^{(i)}$ من أجل عنصر ρ في مجموعة كاملة من التوابع الزاوية

$$\begin{aligned}
\psi^{(i)}(\xi_1^i, \xi_2^i) &= \frac{1}{\rho^{\frac{5}{2}}} \sum_n f_n(\rho) \varphi_n^{(i)}(\rho, \Omega) \\
f_n(\rho) &= \frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{\rho_0^3} \sqrt{\frac{n!}{(n+5)!}} L_n^5\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_0}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

$\rho^{-\frac{5}{2}}$ معامل الفراغ الطوري، L كثيرة حدود لاغير من المرتبة n ،

التوابع $\varphi_n^{(i)}$ يتم اختيارها كتوابع خاصة للجزء الزاوي من معادلات فاديف [7]

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \Lambda^2 \varphi_n^{(1)}(\rho, \Omega) + \hat{V}_{core,n2} [\varphi_n^{(2)}(\rho, \Omega) + \varphi_n^{(3)}(\rho, \Omega)] &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \lambda_n(\rho) \varphi_n^{(1)}(\rho, \Omega) \\
\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \Lambda^2 \varphi_n^{(2)}(\rho, \Omega) + \hat{V}_{core,n1} [\varphi_n^{(1)}(\rho, \Omega) + \varphi_n^{(3)}(\rho, \Omega)] &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \lambda_n(\rho) \varphi_n^{(2)}(\rho, \Omega) \\
\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \Lambda^2 \varphi_n^{(3)}(\rho, \Omega) + \hat{V}_{n1,n2} [\varphi_n^{(1)}(\rho, \Omega) + \varphi_n^{(2)}(\rho, \Omega)] &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \lambda_n(\rho) \varphi_n^{(3)}(\rho, \Omega)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\Lambda^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4 \cot 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\ell_{\xi_1}^2}{\hbar^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\ell_{\xi_2}^2}{\hbar^2 \cos^2 \varphi} \right] \tag{11}$$

الجزء القطري من معادلات فاديفيك يكتب بالشكل التالي:

$$T \equiv T_\rho + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} \Lambda^2 \quad (12)$$

$$T_\rho = -\frac{\hbar^2}{2m} \rho^{-\frac{5}{2}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^{\frac{5}{2}} + \frac{15}{4} \frac{\hbar^2}{2m \rho^2}$$

ξ_1, ξ_2 ترتبط بـ $\ell_{\xi_1}, \ell_{\xi_2}$

نستبدل (9) في المعادلات (7) وباستخدام (10 و 11 و 12) نحصل على مجموعة المعادلات التفاضلية القطرية

$$-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\lambda_n(\rho) + \frac{15}{4} \right) f_n + \sum_{\dot{n}} \left(-2P_{n\dot{n}} \frac{d}{d\rho} - Q_{n\dot{n}} \right) f_{\dot{n}} = 0 \quad (13)$$

حيث التوابع P و Q :

$$P_{n\dot{n}}(\rho) = \sum_{i,j=1}^3 \int d\Omega \varphi_n^{(i)*}(\rho, \Omega) \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi_{\dot{n}}^{(j)}(\rho, \Omega) \quad (14)$$

$$Q_{n\dot{n}}(\rho) = \sum_{i,j=1}^3 \int d\Omega \varphi_n^{(i)*}(\rho, \Omega) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \varphi_{\dot{n}}^{(j)}(\rho, \Omega)$$

ينشر التابع الموجي $\varphi_n^{(j)}(\rho, \Omega)$ في المعادلة (9) بالتوافقيات فوق الكروية والتي نحددها بالتوابع الخاصة $\chi(\Omega)$:

$$\Lambda^2 \chi_{[k]}(\Omega) = \lambda \chi_{[k]}(\Omega) \quad (15)$$

حيث λ قيمة خاصة.

إن حل معادلة لابلاس التي تتضمن مؤثر لابلاس في الاحداثيات فوق الكروية هي كثيرة حدود متجانسة من الدرجة K .

$$\Lambda^2 \chi_{[k]}(\Omega) = K(K+4) \chi_{[k]}(\Omega) \quad (16)$$

نجد من (11) أن المتحولات (θ_1, φ_1) و (θ_2, φ_2) منفصلة وبالتالي فإن توابعها الخاصة هي التوافقيات الكروية $y_{\ell_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1)$ ، $y_{\ell_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2)$ مع أعداد كوانتية ℓ_1, m_1, ℓ_2, m_2 أي أن:

$$y_{\ell_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2) ، \chi_{[k]}(\Omega) = P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi) y_{\ell_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1) \quad (17)$$

نبدل $\chi_{[k]}(\Omega)$ من المعادلة (17) في المعادلة (16) بعد تبديل قيمة Λ^2 من المعادلة (11) فنحصل على المعادلة:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 4 \cot 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\ell_{\xi_1}^2}{\hbar^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\ell_{\xi_2}^2}{\hbar^2 \cos^2 \varphi} \right] P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi) = K(K+4) P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi) \quad (18)$$

توضع $P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi)$ بالصيغة القياسية :

$$P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi) = \cos^{\ell_2}(\varphi) \sin^{\ell_1}(\varphi) g(\varphi) \quad (19)$$

نقوم الآن بتبديل المتحول φ إلى متحول جديد $x = \cos 2\varphi$ وبهذا فإن المعادلة (18) تأخذ شكل معادلة جاكوبي القياسية [10]:

$$(1 - x^2)g''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta 2)x]g'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)g(x) = 0 \quad (20)$$

$$\alpha = \ell_1 + \frac{1}{2}, \quad \beta = \ell_2 + \frac{1}{2}, \quad K = 2n + \ell_1 + \ell_2, \quad \text{حيث،}$$

$$\Rightarrow g(x) = P_n^{\alpha, \beta}(x)$$

$$P_K^{\ell_2 \ell_1}(\varphi) = N_K^{\ell_2 \ell_1} (\cos \varphi)^{\ell_2} (\sin \varphi)^{\ell_1} P_n^{\ell_1 + \frac{1}{2}, \ell_2 + \frac{1}{2}}(\cos 2\varphi) \quad (21)$$

$$N_K^{\ell_2 \ell_1} = \left[\frac{2(K+2)\Gamma(k+2-N)\Gamma(N+1)}{\Gamma(N+\ell_1+\frac{3}{2})\Gamma(N+\ell_2+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث $P_n^{\ell_1 + \frac{1}{2}, \ell_2 + \frac{1}{2}}(\cos 2\varphi)$ كثيرة حدود جاكوبي من المرتبة n و Γ تابع جاما.

النتائج والمناقشة:

تؤول مسألة الحسابات للنوى الهالوية البورميونية إلى النموذج لب+نيوترونين ، وقد اجريت الحسابات للتشكيل T . تعطى عبارة الكمون لتفاعل نيوتروني الهالة بالعلاقة [11, 12]

$$V_{nn}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = [V_c(r) + V_{ss}(r)S_{N1} \cdot S_{N2} + V_T(r)\hat{S}_{12} + V_{so}(r)I_{NN} \cdot S_{NN}] \exp\left[-\left(\frac{r}{b_{nn}}\right)^2\right] \quad (22)$$

S_{N1} و S_{N2} سبين كل من النكليونين ، $S_{NN} = S_{N1} + S_{N2}$ ، \hat{S}_{12} المؤثر التسنوري

$$\hat{S}_{12} = 3(\sigma_1 \cdot \hat{r})(\sigma_2 \cdot \hat{r}) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \quad (23)$$

σ_1, σ_2 مصفوفات باولي ، يتمتع كمون التفاعل بين النيوترونين بالخصائص التالية: غير متغير بعكس المحاور الاحداثية ، وغير متغير عند الانتقال من جملة لأخرى أو نتيجة عكس الزمن، وغير متغير نتيجة دوران فضاء الايزوسبين.

افترضنا هنا أن الكمونين للنكليون مع اللب $(\vec{r}_1) r_{cn}(\vec{r}_2)$ لهما الشكل الغوسي :

$$V_{nc}^{(s)} = V_s(1 + \gamma_s S_c S_n) \exp\left[-\left(\frac{r}{b_{nc}}\right)^2\right] \quad (24)$$

$$V_{nc}^{(\ell)} = (V_\ell + V_{so}^{(\ell)} S_n \ell_{nc}) \exp\left[-\left(\frac{r}{b_{nc}}\right)^2\right]$$

حيث فصلنا عبارة الكمون للسوية s عن السويتين الممكنين $\ell = p, d$ وقد تم اختيار قيم معاملات الكمون بحيث تعطى قيم طول التبعر a وقيم المدى الفعال للموجة s: [13,14,15]

$$a(^1S_0) = 18.8 \text{ fm}, r_e(^1S_0) = 2.76 \text{ fm}$$

$$a(^1P_0) = 3.6 \text{ fm}, a(^1P_0) = -2.0 \text{ fm}, a(^3P_2) = 0.30 \text{ fm}$$

$$b_{nc} = 2.55 fm, V_s = V_p = -7.8 MeV, V_{so} = 0, \gamma_s = 0$$

السوية المثارة الأولى لنواة الهيليوم 6He لها عزم زاوي كلي $J = 2$ ونوعية موجبة ($J^\pi = 2^+$) من أجل الحالة المفردة ($s = s_{23} = 0$) لها عزم زاوي كلي $L = 2$, تكون ℓ_1 زوجية كي يكون التابع الموجي متناظراً بالنسبة لتبديل النيوترونين لذا فإن ℓ_2 تكون زوجية ويمكنها أن تأخذ أي قيمة زوجية صحيحة $\ell_1 - 2, \ell_1, \ell_1 + 2$, $(\ell_1 = 0, \ell_2 = 2)$.

أما في الحالة الثلاثية ($s = s_{23} = 1$) العزم الزاوي الكلي L إما أن يأخذ القيمة 1 أو 2 أو 3 وفي كل الحالات الثلاثة يتطلب التناظر أن يكون ℓ_1 فردي كي يكون التابع الموجي غير متناظر بالتبديل P_{23} وحيث أن النوعية زوجية فإن ℓ_2 سوف يأخذ قيم مفردة فقط. من أجل $L = 1$ فإن $\ell_1 = \ell_2$ وعندما $L = 2$ أو 3 يمكن أن يأخذ القيم $\ell_1 - 2, \ell_1, \ell_1 + 2$ من أجل $\ell_1 > 3$ (من أجل $\ell_1 = 1$ يمكن لـ ℓ_2 أن يأخذ القيم $\ell_2 = 1, 3$ فقط و $\ell_2 = 3$ من أجل $L = 3$) يجب أن يكون عدداً صحيحاً زوجياً من أجل الحالتين الأحادية والثلاثية.

النواة ${}^{11}Li$ لها سبين $\frac{3}{2}$ ونوعية فردية $\frac{3}{2}^-$ والنيوترونات في الحالة الفردية وهذا يعني أن قيمة ℓ_1 زوجية بسبب متطلبات التناظر وحيث أن $L = 0$ فيكون (زوجي $\ell_1 = \ell_2$) ويكون K له قيم زوجية فقط.

يبين الجدول (1) القيم المستخدمة في الحساب.

جدول (1) قيم المتغيرات المستخدمة للحساب.

ℓ_1	ℓ_2	n	K	ρ	ρ_0	b_{nn} fm	b_{nc} fm	V_{ss} MeV	V_c MeV	V_s MeV	V_T MeV	V_{so} MeV	V_p MeV	V_s MeV
0	0	1	2	0.866	0.866	1.8	2.55	45	2.92	-7.8	26.85	-12.08	-7.8	-7.8
1	1	2	6	0.866	1.936	1.8	2.55	45	2.92	-7.8	26.85	-12.08	-7.8	-7.8
2	2	3	10	1.936	2.958	1.8	2.55	45	2.92	-7.8	26.85	-12.08	-7.8	-7.8

يمكننا أن نحسب كثافة التوزع للمادة النووية بعد حساب القيم الخاصة والتابع الخاصة وذلك من العلاقة:

$$\rho(r) = \sum_i a_i |\psi_i|^2 \quad (25)$$

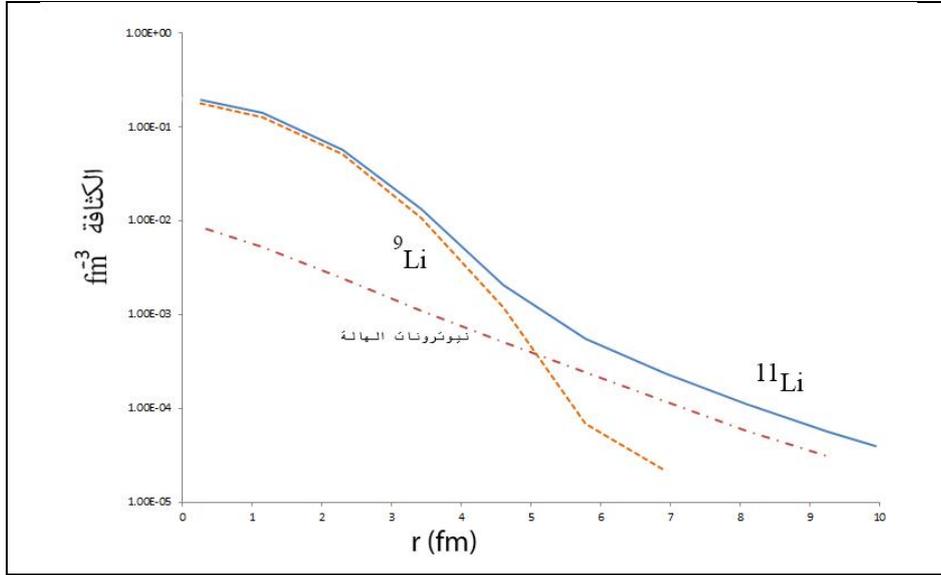
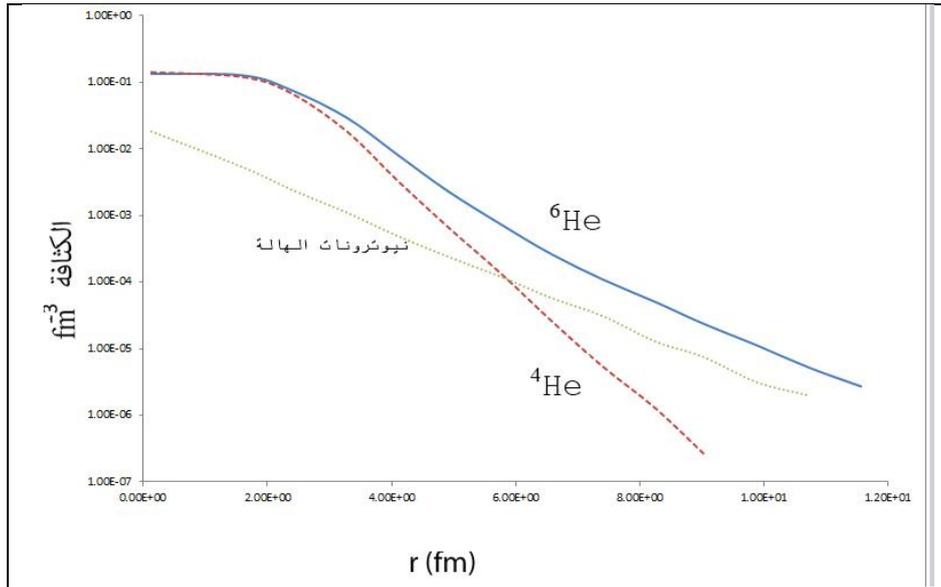
حيث a_i تمثل احتمال انشغال السوية i

تحسب كثافة النواة الهالية بالعلاقات [16]

$$\rho(Core) = \frac{A}{\frac{3}{\pi^2} r_0^3} e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} \quad (26)$$

$$\rho(nucleon) = \sum_i a_i |\psi_i|^2$$

$$\rho(Halo nucleus) = \rho(Core) + 2\rho(nucleon)$$

الشكل (3) توزيع الكثافة لنوى ${}^9\text{Li}$ و ${}^{11}\text{Li}$ الشكل (4) توزيع الكثافة لنوى ${}^6\text{He}$ و ${}^4\text{He}$

يتم حساب نصف القطر للمادة النووية للنواة الهالية $\langle r^2 \rangle$ بالعلاقة:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{A} ((A - 2)\langle r^2 \rangle_{\text{core}} + \langle \rho^2 \rangle) \quad (27)$$

جدول (2) القيم المحسوبة لنصف قطر النواة الهالية والزاوية بين النيوترونين

	${}^9\text{Li}$	ρ	${}^{11}\text{Li}$		θ_{nn}	
نصف القطر fm	2.49	9	3.53 المحسوب	3.16 التجريبي [17]	65.3 المحسوب	56.2 التجريبي [18]
	${}^4\text{He}$	ρ	${}^6\text{He}$		θ_{nn}	
نصف القطر fm	1.9	5.4	2.69 المحسوب	2.37 التجريبي [17]	66.4 المحسوب	51.6 التجريبي [18]

نلاحظ أن القيم المحسوبة اعتماداً على النموذج المفترض تقترب من القيم التجريبية ، وهناك فرق بسيط ويعود ذلك لعدم الأخذ بالاعتبار تشوه النواة (اتخاذ النواة شكل كرواني - مفلطح أو متطاوّل)، يلعب الازدواج دوراً هاماً في وجود النوى الهالية البورومية ، ومن اللافت للنظر أن الدراسات التي تعاملت مع نيوتروني الهالة مثلاً (لجسم واحد مترابط بشدة) أي نيوترون، وكذلك الدراسات التي تجاهلت قوى الازدواج بين النيوترونين قد أدت إلى نتائج قريبة من النتائج التجريبية (مثل حجم الهالة) وسبب ذلك أن هذه الدراسات استخدمت النتائج التجريبية لطاقة الارتباط للنيوترونين. أما في دراستنا هذه فقد تم إدخال قوة الترابط بين النيوترونين في الدراسة عبر دراسة النظام متعدد الجسيمات أو العناقيد [19]، وقد أظهرت هذه الحسابات أن النيوترونين يميلان للارتباط معاً.

الاستنتاجات والتوصيات:

حين يتحرك النيوترونان بالقرب من اللب فإنهما يكونان بعيدين عن بعضهما موضعياً، هذا التصور أكثر واقعية وقادر على تقديم استقراء داخلي بين الحالتين الحديتين لوجود ارتباط دي-نيوترون ونيوترونين منفصلين بحالة ارتباط مع اللب وحين يكون النيوترونين بعيدين في الهالة فإنهما يميلان للارتباط معاً. يتعين في الدراسات القادمة استخدام كمون نووي يأخذ بالاعتبار تشوه النواة مثل كمون نلسون ومقارنته مع النتائج التي تعطيها نماذج العناقيد.

المراجع:

- [1] Jim Al-Khalili, The Euroschool Lectures on Physics with Exotic Beams, Vol. I , Lecture Notes in Physics. 2004, 651:77.
- [2] TANIHATA, Isao. Neutron halo nuclei. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1996, 22.2: 157.
- [3] ZHUKOV, M. V., et al. properties of Borromean halo nuclei. *Physics reports*, 1993, 231.4: 151-199.
- [4] Landau L. D. , L. M. Lifshitz. Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory , Butterworth-Heinemann; 3rd edition (January 15, 1981), 689.
- [5] JONSON, B. Halo states in nuclei. *Nuclear Physics A*, 1998, 631: 376-384.
- [6] HANSEN, P. G.; JENSEN, A. S.; JONSON, B. Nuclear halos. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 1995, 45.1: 591-634.
- [7] DAS, T. K.; COELHO, H. T.; BRITO, V. P. Comparison of Born-Oppenheimer and hyperspherical adiabatic approximations in the trinucleon problem. *Physical Review C*, 1993, 48.5: 2201.
- [8] Pushkin A., Jonson B., Zhukov MV. E1 strength function for two-neutron halo nuclei in an analytical three-body approach. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. 1996 Aug;22(8):L95.
- [9] Bang JM, Russian-Nordic-British Theory RN, Danilin BV, Efros VD, Vaagen JS, Zhukov MV, Thompson IJ. Few-body aspects of Borromean halo nuclei. *Physics reports*. 1996 Jan 1;264(1-5):27-37
- [10] Das, T.K. Hyperspherical Harmonics Expansion Techniques, Springer,2016,170.
- [11] DOMA, S. B.; EL-NOHY, N. A.; GHARIB, K. K. The ground-state characteristics of deuteron using Gaussian potentials. *Helvetica Physica Acta*, 1996, 69.2: 90-104.
- [12] Greiner Walter, Müller Berndt . Quantum Mechanics Symmetries. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.1994
- [13] DUMBRAJS, O., et al. Compilation of coupling constants and low-energy parameters. 1982-edition. *Nucl. Phys. B;(Netherlands)*, 1983, 216.2.
- [14] JOHANNSEN, L.; JENSEN, A. S.; HANSEN, P. G. The ^{11}Li nucleus as a three-body system. *Physics Letters B*, 1990, 244.3-4: 357-362.
- [15] GARRIDO, E.; FEDOROV, D. V.; JENSEN, A. S. Phase equivalent potentials for three-body halos. *Nuclear Physics A*, 1999, 650.3: 247-266.
- [16] Zhongzhou, R., Carstoiu, F. Further Studies on Halo Nuclei, *High Energy Physics and Nuclear Physics*. 19(3), 313-319, 1995.
- [17] TANIHATA, I.; SAVAJOLS, H.; KANUNGO, R. Recent experimental progress in nuclear halo structure studies. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2013, 68: 215-313.
- [18] Sagawa H., Hagino K. Pairing Correlations in halo Nuclei, arXiv:0709.1310,2007.
- [19] VARGA, Kálmán. A combined Mathematica-Fortran program package for analytical calculation of the matrix elements of the microscopic cluster model. *Computer physics communications*, 1997, 104.1-3: 259-274.