دراسة التراص من النوع β وفق مفهوم المرشحات

د. عدنان ظريف*

(تاريخ الإيداع 21/ 6 / 2021. قُبِل للنشر في 6 /9 /2021)

□ ملخّص □

قدّمنا في هذا البحث مفهومين جديدين هما β – نقطة تقارب لمرشحة و β – نقطة لاصقة بمرشحة. ثم درسنا بالاستفادة من هذين المفهومين الفضاءات المتراصة من النوع β، كما تم تعريف مفهوم الفضاء العادي من النوع β والعلاقات بينه وبين الفضاء المنتظم من النوع β والمتراص من النوع β

الكلمات المفتاحية: الفضاء β _متراص، β – نقطة تراكم لمرشحة، β – نقطة لاصقة لمرشحة، الفضاء المنتظم من النوع β، الفضاء العادي من النوع β.

* أستاذ مساعد– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.adnank.zarif@gmail.com

Study of β -Compact Via the Concept of Filters

Dr. Adnan K.Zarif*

(Received 21 /6 / 2021. Accepted 6 / 9 /2021)

□ ABSTRACT □

In this paper, two new concepts are presented the first is β - accumulation point of filter and the second β -closure point of filter. After that, β -compact spaces are investigated corresponding to this two concepts. Moreover, the concept of β -normal space is defined and relationships between it and the β -regular space and the β -compact space.

Keywords: Compact Space, β -Accumulation Point of Filter, β -Closure Point of Filter, β -regular space, β -normal space.

***Associate Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.**
adnank.zarif@gmail.com

مقدمة:

تعد المجموعة المفتوحة حجر الزاوية الذي يرتكز عليه بناء الفضاء التبولوجي، وتلعب دورا محورياً في دراسة الخصائص التبولوجية للفضاء التبولوجي. لذلك دأب الباحثون في مجال التبولوجيا لاستنباط مجموعات مرادفة للمجموعات المفتوحة من أجل حل مسائل عالقة وتوسيع مجالات البحث والدراسة.

قدم الباحث(N. Levine) في [1] عام 1963 مفهوم المجموعة شبه المفتوحة ودرس التوابع المستمرة وفق هذا المفهوم. كما قدم الباحث (O. Njastad) في [2] عام 1965 مفهوم المجموعة α–مفتوحة. أما الباحث المصري محمد عزت عبد المنصف في [3] عام 1983 فقدم مفهوم المجموعة β–مفتوحة، ثم قدم بحثاً في [4] عام 1985 درس فيه الفضاء المنتظم من النوع β، وقدم أيضا بحث آخر في [5] عام 1987 درس فيه بعض الخواص الناتجة عن المجموعة β–مفتوحة. كما قدم الباحث المصري Mashhour وآخرون الفضاء المتراص بقوة عام 1984. قدم الباحثان (A. Zarrif and N. Al–Asly) في [6] عام 2015 دراسة حول المجموعات المفتوحة من النوع β و الفضاءات المتراصة من النوع β، وقدما أيضاً في [7] عام 2020 دراسة أخرى حول الفضاءات التبولوجية الملساء من النوع β.

إن عملنا هذا يقدم دراسة مختلفة للفضاء المتراص من النوع β حيث نستفيد من مفهوم المرشحات ونعرف نقطة التراكم لمرشحة من النوع β و النقطة اللاصقة بمرشحة من النوع β، وندرس بالاعتماد على هذين المفهومين الجديدين الفضاء المتراص من النوع β والفضاء العادي من النوع β.

أهمية البحث وأهدافه:

إن استخدام المرشحات في دراسة التراص من النوع β تعد خطوة متقدمة في دراسة التراص بطريقة غير تقليدية إذ إننا نعرّف مفهومين جديدين يمكن الاستفادة منهما في استنباط معايير وخصائص جديدة للفضاء β **–متراص**، وهذا سيساهم في إغناء الحلول بأفكار جديدة مسائل مرتبطة بهذا الفضاء.

طرائق البحث ومواده:

اعتمدت طرائق البحث على مفهوم المجموعات المفتوحة من النوع β والفضاء المتراص من النوع β وكذلك على مفهوم المرشحة والمرشحة الأعظمية بالإضافة إلى بعض المفاهيم الأساسية المرتبة بالمفاهيم المذكورة. **تم إجراء هذا البحث فيقسم الرياضيات–كلية العلوم– جامعة تشرين في الفترة الواقعة بين شهر تشرين أول 2020 وشهر حزيران 2021.**

مفاهيم أساسية

تعريف1: [3]

يقال عن مجموعة A إنها مجموعة β–مفتوحة في فضاء تبولوجي (E,τ) إذا حققت هذه المجموعة العلاقة الآتية: $A \subseteq CL[\text{int}(CLA)]$، أما متممة المجموعة A بالنسبة لـ E فيقال عنها إنها مجموعة β–مغلقة.

تعريف2: [9]

يقال عن فضاء تبولوجي (E,τ) إنه β–متراص إذا كان من كل تغطية β–مفتوحة لهذا الفضاء يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية.

تعريف3: [8]

لتكن $E \neq \phi$ مجموعة كيفية من العناصر و $P(E)$ مجموعة القوة لها ولتكن $\mathcal{F} \subseteq P(E)$ أسرة ما، يقال إن الأسرة $\mathcal{F}$ تشكل مرشحة على E إذا حققت الشروط الآتية:

- $\mathcal{F} \neq \{\}$، $\phi \notin \mathcal{F}$.
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$، أيا يكن F_1, F_2 من $\mathcal{F}$.
- إذا كان F عنصرا كيفيا من $\mathcal{F}$ و A عنصرا كيفيا من $P(E)$ بحيث أن $F \subseteq A$

فإن $A \in \mathcal{F}$.

تعريف4: [8]

لتكن $\mathcal{F}$ مرشحة على E. يقال عن $\mathcal{F}$إنها مرشحة أعظمية أو فوق مرشحة على E إذا لم تكن محتواة في أية مرشحة أخرى على E ويرمز للمرشحة الأعظمية بالرمز U بدلا من $\mathcal{F}$.

تعريف5: [3]

ليكن (E,τ)فضاء تبولوجيا كيفيا و xنقطة من نقاطه و $V \subseteq E$مجموعة ما. يقال إن V مجاورة من النوع β للنقطة x في (E,τ) إذا وجدت مجموعة β-مفتوحة مثل G_0 بحيث يكون $x \in G_0 \subseteq V$

ويرمز بالرمز $\beta - V(x)$ لأسرة جميع مجاورات النقطة x من النوع β في (E,τ).

تمهيدية 1: [8]

إذا كانت $\mathcal{F}$ مرشحة كيفية معرفة على مجموعة E وكانت $\{U_i \ ; \ i \in I\}$أسرة جميع المرشحات الأعظمية التي كل منها تحوي المرشحة $\mathcal{F}$ فإن العلاقة الآتية تتحقق:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} U_i$$

تمهيدية 2: [8]

لتكن $E \neq \phi$ مجموعة كيفية من العناصر ولتكن $S \subseteq P(E)$ أسرة ما. إن الشرط اللازم والكافي كي تحقق الأسرة S خاصة التقاطع المنتهي هو وجود مرشحة على E تحوي الأسرة S.

تعريف6: [4]

يقال عن فضاء تبولوجي (E,τ) إنه β - منتظم إذا كان من أجل كل مجموعة β - مغلقة F وكل نقطة x من E/F توجد مجاورتان β - مفتوحتان G_x, G_F بحيث يكون $G_x \cap G_F = \phi$.

النتائج والمناقشة:

نقدم في هذه الفقرة بعض المفاهيم والنتائج الجديدة التي تم التوصل إليها حول الفضاءات التبولوجية β - متراصة و β -منتظمة و β -عادية.

تعريف7:

ليكن (E,τ)فضاء تبولوجيا كيفيا و $\mathcal{F}$ مرشحة على E ولتكن x نقطة من E. نقول إن x نقطة تقارب من النوع β للمرشحة $\mathcal{F}$، إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\beta - V(x) \subseteq \mathcal{F}.$$

ونقول في هذه الحالة إن المرشحة $\mathcal{F}$ مرشحة β متقاربة في الفضاء (E,τ).

تعريف8:

ليكن (E,τ)فضاء تبولوجيا كيفيا و x نقطة من نقاطه ولتكن $\mathcal{F}$ مرشحة على E. نقول إن x نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathcal{F}$ في الفضاء (E,τ) إذا كانت x نقطة β−لاصقة بكل F من $\mathcal{F}$ أي إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$V \cap F \neq \phi, \quad \forall\ V \in \beta - V(x), \forall\ F \in \mathcal{F}$$

وتسمى مجموعة جميع النقاط اللاصقة من النوع β بالمرشحة $\mathcal{F}$ لـ β−لصاقة المرشحة $\mathcal{F}$ ويرمز لها بالرمز $\beta - CL\ \mathcal{F}$.

− بسهولة نجد أن :

$$\beta - CL\ \mathcal{F} = \cap_{F\epsilon\mathcal{F}}\, \beta - CLF$$

ملاحظة 1:

من تعريف β−نقطة تقارب لمرشحة و β−نقطة لاصقة بمرشحة ينتج أن كل β−نقطة تقارب هي β−نقطة لاصقة. ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال1

نعرف على المجموعة $E=\{a,b,c\}$ التبولوجيا τوالمرشحة $\mathcal{F}$ وفق الصيغتين الآتيتين:

$$\tau = \{\phi,\{a\},\{a,b\},E\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a,b\},E\}$$

عندئذ نجد أن:

$$\beta - V(x) = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},E\}$$

فنلاحظ أن النقطة a هي β−نقطة لاصقة بالمرشحة $\mathcal{F}$ لكن a ليست β−نقطة تقارب للمرشحة $\mathcal{F}$.

نتيجة 1:

ليكن (E,τ)فضاء تبولوجيا كيفياً و xنقطة من نقاطه ولتكن $\mathcal{F}$ مرشحة كيفية معرفة على E. عندئذ يلزم ويكفي كي تكون النقطة x، β−نقطة تقارب للمرشحة $\mathcal{F}$ في الفضاء (E,τ) أن تكون x فيها β−نقطة تقارب لكل مرشحة أعظمية تحوي $\mathcal{F}$. ويمكن إثبات ذلك بسهولة بالاعتماد على التمهيدية1.

تعريف9:

نقول عن فضاء تبولوجي (E,τ) إنه β− عادي إذا كان من أجل كل مجموعتين β− مغلقتين وغير متقاطعتين F_1, F_2 توجد مجاورتان β− مفتوحتان G_{F_1}, G_{F_2} بحيث يكون $G_{F_2} \cap G_{F_1} = \phi$.

مبرهنة 1:

ليكن (E,τ)فضاء تبولوجيا كيفياً عندئذ تكون الشروط الآتية متكافئة:

1) الفضاء (E,τ) فضاء β−متراص.

2) إذا كانت $\{F_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة كيفية من مجموعات β−مغلقة في الفضاء (E,τ) بحيث أن أي تقاطع منته لعناصر من هذه الأسرة غير خالٍ فإن $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$.

3) إذا كانت $\{F_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة كيفية من مجموعة β−مغلقة في الفضاء (E,τ) بحيث أن أي $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$ فإنه توجد أسرة جزئية منتهية منها مثل $\{F_1,F_2,\dots,F_n\}$ بحيث يكون $\cap_{i=1}^{n} F_i = \phi$.

4) إذا كانت $\mathcal{F}$ مرشحة كيفية معرفة على E فإن

$\beta - CL\ \mathcal{F} \neq \phi$

5) إذا كانت U مرشحة كيفية أعظمية على E فإن U تكون β−متقاربة في الفضاء (E,τ).

البرهان:

1)$\Leftarrow$2): لنفرض أن $\{F_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة كيفية من مجموعات β−مغلقة في (E,τ) تحقق خاصة التقاطع المنتهي ولنفرض جدلا أن $\cap_{i=1}^{n} F_i = \phi$ عندئذ نجد أن $E / \underset{i\in I}{\cap} F_i = E$ وبالتالي فإن $\underset{i\in I}{\cup}(E/F_i) = E$ وهذا يعني أن الأسرة $\{E/F_i\ ;\ i \in I\}$ تشكل تغطية β−مفتوحة للفضاء E ولكن بحسب الفرض فإن (E,τ) فضاء β−متراص لذلك يوجد عدد طبيعي منهي مثل n_0 بحيث يكون $\cap_{i=1}^{n_0}(E/F_i) = E$ لهذا فإن $E \cap_{i=1}^{n_0} F_i = E$ وبالتالي فإن $\cap_{i=1}^{n_0} F_i = \phi$ وهذا يتناقض مع كون الأسرة $\{F_i\ ;\ i \in I\}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي لذلك يجب أن يكون $\underset{i\in I}{\cap} F_i \neq \phi$.

2)$\Leftarrow$3): لتكن$\{F_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة مجموعات β−مغلقة في (E,τ) بحيث أن $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \phi$ عندئذ لا يمكن أن تكون $\cap_{i=1}^{n} F_i \neq \phi$ من أجل أي عدد طبيعي منتهي n لأنه في هذه الحالة تصبح الأسرة $\{F_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة مجموعات β−مغلقة تحقق خاصة التقاطع المنتهي لذا يجب أن يكون $\underset{i\in I}{\cap} F_i \neq \phi$ وهذا تناقض مع الفرض لهذا السبب ينبغي وجود n_0 من N بحيث يكون $\cap_{i=1}^{n_0} F_i = \phi$.

3)$\Leftarrow$4): لنفرض جدلا أنه توجد مرشحة $\mathcal{F}_0$ على E بحيث يكون $\beta - CL\ \mathcal{F}_0 = \phi$ هذا يعني أن $\cap\, \beta - CLF = \phi$ وبالتالي فإن الأسرة $\{\beta - CLF, F \in \mathcal{F}_0\}$ أسرة مجموعات β−مغلقة في (E,τ) بحيث أن $\cap_{F_i \in \mathcal{F}} \beta - CL\mathcal{F}_i = \phi$ لذلك يجب أن توجد أسرة جزئية منتهية منها مثل $\{\beta - CLF_1, \beta - CLF_2, ..., \beta - CLF_n\}$ بحيث يكون $\cap_{i=1}^{n} \beta - CLF_i = \phi$ لذلك تتحقق العلاقة $\cap_{i=1}^{n} F_i = \phi$ وهذا تناقض مع كون $\mathcal{F}$ مرشحة وسبب التناقض هو الفرض الجدلي أن $\beta - CL\ \mathcal{F}_0 = \phi$ لذا يجب أن يكون $\beta - CL\ \mathcal{F} \neq \phi$.

4)$\Leftarrow$5): لتكن U مرشحة أعظمية كيفية معرفة على E عندئذ وبحسب كون U مرشحة نجد أن $\beta - CLU \neq \phi$ لذلك توجد نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 بحيث يكون $x_0 \in \beta - CLU$ وبالتالي فإن:

$$V \cap u \neq \phi, \forall\ V \in \beta - V(x_0),\ \forall\, u \in U$$

وهذا يعني أن الأسرة $S = \beta - V(x_0) \cup U$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي لذلك فبحسب التمهيدية(2) فإنه توجد مرشحة $\mathcal{F}_0$ على E تحويS وبالتالي فإن $\beta - V(x_0) \subseteq \mathcal{F}_0$ وهذا يعني أن x_0 هي β−تقارب للمرشحة $\mathcal{F}_0$ ثم إن$U \subseteq \mathcal{F}_0$ لذا نجد أن $U = \mathcal{F}_0$ لأنU مرشحة أعظمية وبذلك تكون المرشحة الأعظمية β−متقاربة إلى x_0 في (E,τ).

5)$\Leftarrow$1): لتكن $\{G_i\ ;\ i \in I\}$ تغطية كيفية من مجموعات β − مفتوحة للفضاء (E,τ) ولنفرض جدلا أن هذه التغطية لا تحتوي على أية تغطية جزئية منتهية، أي أن $\cap_{i=1}^{n} G_i \neq E$ من أجل أي عدد طبيعي منتهي n وبالتالي فإن $E / \cap_{i=1}^{n} G_i \neq \phi$ من أجل أي عدد طبيعي منتهي n لذلك فإن $\cap_{i=1}^{n}(E/G_i) \neq \phi$ من أجل أي عدد

طبيعي منتهي n وبذلك نجد أن الأسرة $\{E/G_i\ ;i \in I\}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي وبالتالي بحسب التمهيدية(2) فإنه توجد مرشحة $\mathcal{F}_1$ تحوي الأسرة $\{E/G_i\ ;i \in I\}$ لتكن U مرشحة أعظمية تحوي $\mathcal{F}_1$ وبالتالي تحوي الأسرة $\{E/G_i\ ;i \in I\}$ لذلك تكون U فوق مرشحة β–متقاربة في (E,τ) أي أنه توجد نقطة مثل x_1 بحيث تكون x_1 هي $\beta-$ نقطه تقارب للمرشحة الأعظمية U وبالتالي فهي $\beta-$ نقطة لاصقة بها لذلك نجد أن $x_1 \in \beta-CL(E/G_i)$ من أجل كل i من I وبالتالي فإن $x_1 \in (E/G_i), \forall i \in I$ لذا نجد أن $x_1 \in \cap_{i\in I}(E/G_i)$ ولكن $\cap_{i\in I}(E/G_i) = E/\cup_{i\in I} G_i$ لذلك نجد أن $x_1 \in E/\cup_{i\in I} G_i$ وبالتالي $\cup_{i\in I} G_i \neq E$ وهذا تناقض مع الفرض أن الأسرة $\{G_i\ ;\ i \in I\}$ تغطية لـ E لذا فهذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية وبالتالي الفضاء (E,τ) $\beta-$ متراص .

مبرهنة 2:

ليكن (E,τ) فضاء تبولوجيا $\beta-$ متراص ولتكن $\mathcal{F}$ مرشحة كيفية على E بحيث أن $\mathcal{F}\beta-CL = \{x_0\}$ عندئذ تكون x_0 هي $\beta-$ نقطة تقارب للمرشحة $\mathcal{F}$ في الفضاء (E,τ).

البرهان:

لتكن U مرشحة أعظمية كيفية معرفة على E بحيث أن $\mathcal{F} \subseteq U$ ولنبرهن أن x_0 هي $\beta-$ نقطة تقارب للمرشحة الأعظمية U.

بحسب المبرهنة(1) تكون المرشحة الأعظمية متقاربة في (E,τ) إلى نقطة مثل x_1 وبما أن كل $\beta-$ نقطه تقارب لمرشحة هي $\beta-$ نقطه لاصقة بها نجد أن x_1 هي $\beta-$ نقطه لاصقة بالمرشحة الأعظمية U لذلك نجد أن $x_1 \in \beta-CL(u), \forall\ u \in U$ وبما أن $\mathcal{F} \subseteq U$ فإن

$$x_1 \in \beta-CL(F), \forall\ F \in \mathcal{F}$$

وبالتالي فإن $x_1 \in \beta-CL(F) = \{x_0\}$ ينتج لدينا أن $x_1 = x_0$ ومنه فالنقطة x_0 هي $\beta-$ نقطة تقارب للمرشحة الأعظمية U لذلك فبحسب النتيجة(1) تكون المرشحة $\mathcal{F}$ هي β–متقاربة إلى x_0 في (E,τ).

مبرهنة 3:

ليكن (E,τ) فضاء تبولوجيا $\beta-$ متراص ولتكن A مجموعة كيفية $\beta-$ مغلقة في الفضاء (E,τ) عندئذ تكون المجموعة A مجموعة $\beta-$ متراصة.

البرهان:

لتكن $\{G_i\ ;\ i \in I\}$ تغطية كيفية $\beta-$ مفتوحة للمجموعة A في الفضاء (E,τ) عندئذ نجد أن $A \subseteq \cup_{i\in I} G_i$ وبالتالي فإن $(E/A)\cup A \subseteq (E/A)\cup(\cup_{i\in I} G_i)$ لذلك فإن $E = (E/A)\cup(\cup_{i\in I} G_i)$ إذا الأسرة $S = \{E/A\}\cup\{G_i\ ;\ i \in I\}$ تشكل تغطية $\beta-$ مفتوحة في الفضاء (E,τ) وبما أنه $\beta-$ متراص فإنه توجد أسرة جزئية منتهية منها مثل $\{G_1,G_2,...,G_n\}$ بحيث يكون $E = \cup_{i=1}^{n} G_i$ وبالتالي فإن $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} G_i$ وهذه تغطية منتهية للمجموعة A من التغطية S، فإذا كانت المجموعة E/A إحدى المجموعات $G_1,G_2,...,G_n$ فنأخذ التغطية المنتهية $\{G_1,G_2,...,G_n\}/\{E/A\}$ وبذلك نكون قد حصلنا على المطلوب وبالتالي تكون المجموعة A مجموعة $\beta-$ متراصة.

مبرهنة 4:

ليكن (E,τ) فضاء تبولوجيا β− متراص و β− منتظم عندئذ يكون (E,τ) فضاء β−عادي.

البرهان:

لتكن F_2, F_1 مجموعتين β− مغلقتين في الفضاء (E,τ) عندئذ بحسب المبرهنة (3) تكون المجموعتان F_2, F_1مجموعتين β− متراصتين، بما أن الفضاء (E,τ) فضاء β− منتظم فإنه من أجل المجموعة المغلقة F_1 وكل نقطة xمن E/F_2 وبالتالي كل x_i منF_2 توجد مجاورتان β− مفتوحتان G_{x_i}, G_{iF_1} بحيث يكون $G_{x_i} \cap G_{iF_1} = \phi$.

نلاحظ أن الأسرة $\{G_{x_i}, x_i \in F_1\}$ تشكل تغطية β− مفتوحة للمجموعةF_2 وبما أن F_2 مجموعة β− متراصة فإن هذه التغطية تحتوي على تغطية جزئية منتهية مثل $\{G_{x_1}, G_{x_2} G_{x_n}\}$ يقابل هذه الأسرة أسرة منتهية من مجاورات المجموعة F_1 وهذه الأسرة هي $\{G_{1F_1}, G_{2F_1} G_{nF_1}\}$ بحيث يكون $G_{kF_1} \cap G_{x_k} = \phi$أيا يكن $1 \le k \le n$.

نضع $G_{F_1} = \cap_{i=1}^{n} G_{kF_1}$، $G_{F_2} = \cup_{i=1}^{n} G_{x_k}$ يكون واضح أن G_{F_1} مجاورة β− مفتوحة للمجموعة F_1 و G_{F_2} مجاورة β− مفتوحة للمجموعة F_2 ثم إن $G_{F_1} \cap G_{F_2} = \phi$ وهذا يعني أن الفضاء (E,τ) فضاء β− عادي.

الاستنتاجات والتوصيات:

إن تعريف β− نقطة تقارب لمرشحة و β− نقطة لاصقة بمرشحة كمفهومين جديدين تم تقديمهما في هذه الدراسة ساهم بتقديم دراسة الفضاءات β− متراصة و β− منتظمة و β− عادية بطريقة غير تقليدية واغناء دراسة العلاقات فيما بينها وتزويدها بأفكار جديدة .

نوصي بالاستفادة من المفاهيم المقترحة في تطوير العلاقات بين الفضاءات أنفة الذكر كما ونوصي بدراسة فضاء β_g − للتراص وفق مفهوم المرشحات.

References:

1. LEVINE, N., *Semi-open sets and semi-open continuous topological spaces*, Amer. Math. Monthly, Vol. 70, 1963, pp.36-41.
2. NJASTED, O. *On some classes of nearly open sets*. Pacific Journal of Math. Vol.15, No. 3, 1965, pp.961-970.
3. ABD EL-MOSEF. M. E.; EL-DEEB, S.N. and MAHMOUD, R. A. *β-open sets and β-continuous mapping*. Bull. Fac. Sci. Assiut., Vol. 12, No. 1, 1983, pp.77-90.
4. ABD EL-MOSEF. M. E.; EL-DEEB, S.N. and MAHMOUD, R. A. *β-regular space*. Proc. Math.. Phys. Soc.., Egypt, Vol. 60, 1985, pp.47-52.
5. ABD EL-MOSEF. M. E.; EL-DEEB, S.N. and MAHMOUD, R. A. *Some concepts based on β-open sets*. Delta J. Sci., Vol. 11, No. 1, 1987, pp.71-78.
6. ZARIF, K. A.; AL-ASLY, K. N., Studding on β open sets and compact spaces.. Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 37, N0. 2, 2015.

7. ZARIF, K. A.; AL-ASLY, K. N., *Soft β-compactness in soft topological spaces.* Tishreen University journal for Studies and Scientific Research, Vol. 42, N0. 3, 2020.
8. Engelking, R. *General topological*. Warsaw Press, Monographic Mathematics Tom 60, Warsaw, . 1977, 752pages.
9. Mashhour, A. S.; ABD EL-MOSEF. M. E. Hasanein, I. A. and Nouri, T. *Strongly compact spaces*. Delta J. Sci., Vol. 8, No. 1, 1984, pp. 30-46.