مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

إيجاد حلول تامة لمعادلة Fitzhug–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة

الدكتور رامز كروم*
الدكتور سامي انجرو**

(تاريخ الإيداع 15 / 9 / 2014. قُبِل للنشر في 29 / 10 /2014)

□ ملخّص □

لقد أوجدنا في هذه البحث مجموعة من الحلول التامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، باستخدام طريقة التكامل الأول، ووجدنا من خلال عملية إيجاد هذه الحلول أنّ هذه الطريقة فعّالة مع هذا النوع من المعادلات التفاضلية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية: معادلة Fitzhugh–Nagumo – الحلّ التام – طريقة التكامل الأول – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

*مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

Finding Exact Solutions for Generalized Fitzhug- Nagumo Equation with Constant Coefficients

Dr. Ramez Karoum *
Dr. Sami Injrou **

(Received 15 / 9 / 2014. Accepted 29 / 10 /2014)

□ ABSTRACT □

In this work, we have been obtained exact solutions for generalized Fitzhug-Nagumo equation with constant coefficients, by using the first integral method, and we have shown that this method is an efficient method to obtain exact solutions to this kind of nonlinear partial differential equations.

Keywords: Fitzhug-Nagumo equation - exact solution – first integral method - nonlinear partial differential equations.

*Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة:

ترجع معادلة Fitzhugh–Nagumo إلى كل من الباحثين Fitzhugh في [1] و Nagumo وأخرين في [2]. أولى العديد من الباحثين الفيزيائيين والرياضيين اهتماماً كبيراً لهذه المعادلة، نظراً لأهميتها الكبيرة في مجال الفيزياء الرياضية، حيث نرى لها العديد من التطبيقات الواسعة في مجالات كثيرة منها انتشار اللهب والنمو السكاني اللوجستي ، والفيزيولوجيا العصبية وعملية الحركة البراونية المتفرعة ، والتفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز ونظرية المفاعل النووي [3، 4،5، 6، 7، 8] ، ولهذه المعادلة الشكل الآتي:

$$u_t = u_{xx} - u(1-u)(\rho - u) \tag{1}$$

حيث $0 \le \rho \le 1$ ، و $u(x,t)$ دالّة مجهولة تمثل الجهد الكهربائي عبر غشاء الخليّة.

حصل كل من Kawahara و Tanaka، باستخدام طريقة هيروتا على حلّ تامّ لهذه المعادلة في [7]، وباستخدام طريقة اختزلات التناظر غير التقليدي، حصل Nucci و Clacson على حلول تامة جديدة [9]، كذلك استخدم كل من Huayin و Yucui طريقة التكامل الأول في ، وحصلا على حلول تامة أيضاً في حين استخدم Hajipour و Mahmoudi في [10] طريقة الدالة الأسية. من الجدير بالذكر أن معادلة Fitzhugh–Nagumo تتحول إلى معادلة Newell–Whitehead الحقيقية عندما $\rho = -1$، التي درسها كلّ من Conte في [11] و Cariello و Tabor في [12].

قدّم كل من Browne و Momoniat و Mohamed في [6] شكلاً آخر من معادلة Fitzhugh–Nagumo سمّوه معادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ، وحصلوا عليه بإيجاد بعض التحويلات، التي استطاعوا بواسطتها تحويل حلول معادلة Fitzhugh–Nagumo لتصبح حلولاً لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة. درس Bhrawy في [13] عددياً معادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال التابعة للزمن مع حد التشتت الخطي مستخدماً طريقة Jacobi–Gauss–Lobatto collocation ، مع شروط حديّة غير متجانسة.

سنقوم في هذا البحث بإيجاد حلول تامّة جديدة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة من الشكل:

$$u_t + \alpha u_x - u_{xx} + u(1-u)(\rho - u) = 0 \tag{2}$$

حيث $\alpha \neq 0$ وسيط ثابت، سنستخدم طريقة التكامل الأول التي تعود إلى الباحث Feg في [14، 15] والتي تعتمد على الجبر التبادلي، واستخدمها El–Ganaini في [16] للحصول على حلول تامة جديدة لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية و Raslan في [17] لحل معادلة Fisher، و Abbasbandy و Shirzadi في [18] في حل معادلة Benjamin–Bona–Mahony المعدّلة، و Tascan وآخرون في [19]، أوجدوا حلولاً تامّة لمعادلة Zakharov–Kuznetsov المعدّلة. لخص Hossieni وآخرون في [20] هذه الطريقة بعدة خطوات.

أهمية البحث وأهدافه:

يسلّط هذا البحث الضوء على طريقة التكامل الأول، لما لها من فعالية كبيرة في إيجاد الحلّ التامّ لمعادلات التطور التفاضلية الجزئية غير الخطية، وذلك لأنّ هدف هذا البحث هو إيجاد حلول تامّة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة ، اعتماداً على طريقة التكامل الأول.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حلّ المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

النتائج والمناقشة:

سنجري التحويل الموجي الآتي:

$$u(x,t)=u(\xi)\ ;\ \ \xi=x-kt\ \ ;\ k\in\mathbb{R} \tag{3}$$

حيث يكون لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-k\,\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}=-k\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على معادلة تفاضلية عادية للدالة u والمتحول ξ :

$$u''=(\alpha-k)u'-u(1-u)(\rho-u) \tag{4}$$

لنحوّل هذه المعادلة إلى جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى ، وذلك بفرض $x=u$ و $y=u'_{\xi}$:

$$x'=y \tag{5}$$

$$y'=\mu y-\rho x+(1+\rho)x^2-x^3 \tag{6}$$

حيث $\mu=\alpha-k$.

الحلول التامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة:

تبعاً لطريقة التكامل الأول، نفرض أن $x=x(\xi)$ و $y=y(\xi)$، حلّان غير تافهين لجملة المعادلتين (5) و (6)، وبحسب مبرهنة القسمة [21 ، 22 ، 23] ، لتكن $q(x,y)=\sum_{i=0}^{m}a_i(x)y^i$ كثيرة حدود غير قابلة للاختزال في المجال العقدي $C[x,y]$ التي تحقق أن:

$$q\left(x(\xi),y(\xi)\right)=\sum_{i=0}^{m}a_i(x)y^i=0 \tag{7}$$

حيث $a_i(x)\ (i=0,\ldots,m)$ كثيرات حدود بالنسبة للمتحول x و $a_m(x)\neq 0$. تدعى المعادلة (7) بالتكامل الأول للجملة (5) و (6)، عندئذ توجد كثيرة حدود $h(x)+g(x)y$ في $C[x,y]$ تحقق:

$$\frac{dq}{d\xi}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{d\xi}=h(x)+g(x)y \tag{8}$$

سنناقش في هذا البحث الحلول من أجل $m=1$ في المعادلة (7)، وبالتعويض في المعادلة (7) نحصل على:

$$\sum_{i=0}^{1}a'_i(x)y^{i+1}+\left(\sum_{i=0}^{1}ia_i(x)y^{i-1}\right)\left(-\mu y-\rho x+(1+\rho)x^2-x^3\right)$$

$$=\big(h(x)+g(x)y\big)\left(\sum_{i=0}^{1}a_i(x)y^i\right) \tag{9}$$

ومنه، بالمطابقة بين أمثال قوى y من الطرفين، نحصل على المعادلات الجبرية الآتية:

$$a_1(x)\left[-\rho x+(1+\rho)x^2-x^3\right]=h(x)a_0(x) \tag{10}$$

$$a_0'(x)-\mu a_1(x)=h(x)a_1(x)+a_0(x)g(x) \tag{11}$$

$$a_1'(x)=a_1(x)g(x) \tag{12}$$

بما أن $a_i(x)$، من أجل $(i=0,1)$، كثيرتا حدود، فإننا نجد من المعادلة (12) أن $a_1(x)$ ثابتة، ومنه فإن $g(x)=0$، وبغية تبسيط المسألة سنفرض أن $a_1(x)=1$، فتصبح المعادلة (11):

$$a_0'(x)=\mu+h(x) \tag{13}$$

بموازنة درجة $h(x)$ و $a_0(x)$ من المعادلتين (10) و(13)، نجد أن $\deg(h(x))=1$ فقط، بالتالي بفرض أن:

$$h(x)=Ax+B\ \ ;\ A\neq 0 \tag{14}$$

يكون:

$$a_0(x)=\left(\frac{\mu+A}{2}\right)x^2+Bx+D \tag{15}$$

حيث D ثابت المكاملة.

نعوض الآن كل من $h(x)$ و $a_0(x)$ و $a_1(x)$ في المعادلة (10)، فنحصل على:

$$\begin{aligned}-x^3+(1+\rho)x^2-\rho x&=\left(\frac{\mu+A}{2}\right)Ax^3\\&+\left(AB+B\left(\frac{\mu+A}{2}\right)\right)x^2+\left(AD+B^2\right)x+BD\end{aligned} \tag{16}$$

بالمطابقة بين أمثال قوى x من الطرفين نحصل على جملة من المعادلات الجبرية غير الخطية التالية:

$$BD=0 \tag{17}$$

$$AD+B^2=-\rho \tag{18}$$

$$B\left(\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}\mu\right)=1+\rho \tag{19}$$

$$\left(\frac{\mu+A}{2}\right)A=-1 \tag{20}$$

بحلّ هذه الجملة الجبرية غير الخطية، باستخدام برنامج Maple، نحصل على:

$$B=0\ ,\ A=\frac{-1}{2}\mu+\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2-8}\ ,\ D=\frac{2}{-\mu+\sqrt{\mu^2-8}} \tag{21}$$

$$B=0\ ,\ A=\frac{-1}{2}\mu-\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2-8}\ ,\ D=\frac{-2}{\mu+\sqrt{\mu^2-8}} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} D=0\ ,\ A&=\frac{-\mu}{2}+\frac{\sqrt{\mu^2-8}}{2} \\ B&=\frac{\mu}{8}-\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2-6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} D=0\ ,\ A&=\frac{-\mu}{2}+\frac{\sqrt{\mu^2-8}}{2} \\ B&=\frac{\mu}{8}-\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2-6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} D=0\ ,\ A&=\frac{-\mu}{2}-\frac{\sqrt{\mu^2-8}}{2} \\ B&=\frac{\mu}{8}+\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2+6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} D=0\ ,\ A&=\frac{-\mu}{2}-\frac{\sqrt{\mu^2-8}}{2} \\ B&=\frac{\mu}{8}+\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2+6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8} \end{aligned} \tag{26}$$

بتعويض (21) في (7)، نحصل على:

$$y=-\left(\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{4}\sqrt{\mu^2-8}\right)x^2-\frac{2}{-\mu+\sqrt{\mu^2-8}} \tag{27}$$

بتعويض المعادلة (27) في المعادلة (5)، نحصل على:

$$x'=-\left(\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{4}\sqrt{\mu^2-8}\right)x^2-\frac{2}{-\mu+\sqrt{\mu^2-8}} \tag{28}$$

وبحلّ هذه المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$x=-\tanh\left(\frac{2(\xi+C_1)}{-\mu+\sqrt{\mu^2-8}}\right) \tag{29}$$

حيث C_1 ثابت كيفي، ومنه نستنتج حلّ المعادلة (4):

$$u(\xi) = -\tanh\left(\frac{2(\xi + C_1)}{(k-\alpha) + \sqrt{(\alpha - k)^2 - 8}}\right) \qquad (30)$$

وبالعودة إلى المتحولات الأصلية نحصل على الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t) = -\tanh\left(\frac{2(x - k\,t + C_1)}{(k-\alpha) + \sqrt{(\alpha - k)^2 - 8}}\right) \qquad (31)$$

بشكل مشابه وبتعويض (22) في (7)، نحصل على:

$$y = \left(\frac{-1}{4}\mu + \frac{1}{4}\sqrt{\mu^2 - 8}\right)x^2 + \frac{2}{\mu + \sqrt{\mu^2 - 8}} \qquad (32)$$

ومنه يكون الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \tanh\left(\frac{2(x - k\,t + C_2)}{(\alpha - k) + \sqrt{(\alpha - k)^2 - 8}}\right) \qquad (33)$$

حيث C_2 ثابت كيفي.

بتعويض (23) في (7)، نحصل على:

$$y = -\left(\frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\sqrt{\mu^2 - 8}\right)x^2 - \left(\frac{\mu}{8} - \frac{3\sqrt{\mu^2 - 8}}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2 - 6\mu\sqrt{\mu^2 - 8} - 8}\right)x \qquad (34)$$

ومنه يكون الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{C_3 \exp\left(\left(\frac{\mu}{8} - \frac{3\sqrt{\mu^2 - 8}}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2 - 6\mu\sqrt{\mu^2 - 8} - 8}\right)(x - k\,t)\right) + 2\mu + 2\sqrt{\mu^2 - 8}} \qquad (35)$$

حيث C_3 ثابت كيفي.

بتعويض (24) في (7)، نحصل على:

$$y = -\left(\frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\sqrt{\mu^2 - 8}\right)x^2 - \left(\frac{\mu}{8} - \frac{3\sqrt{\mu^2 - 8}}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2 - 6\mu\sqrt{\mu^2 - 8} - 8}\right)x \qquad (36)$$

ومنه يكون الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{C_4 \exp\left(\left(\frac{\mu}{8} - \frac{3\sqrt{\mu^2 - 8}}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2 - 6\mu\sqrt{\mu^2 - 8} - 8}\right)(x - k\,t)\right) + 2\mu + 2\sqrt{\mu^2 - 8}} \qquad (37)$$

حيث C_4 ثابت كيفي.

بتعويض (25) في (7)، نحصل على:

$$y = -\left(\frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}\sqrt{\mu^2 - 8}\right)x^2 - \left(\frac{\mu}{8} + \frac{3\sqrt{\mu^2 - 8}}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2 + 6\mu\sqrt{\mu^2 - 8} - 8}\right)x \qquad (38)$$

ومنه يكون الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t)=\frac{1}{C_5\exp\left(\left(\frac{\mu}{8}+\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2+6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8}\right)(x-k\,t)\right)-2\mu+2\sqrt{\mu^2-8}} \tag{39}$$

حيث C_5 ثابت كيفي.

بتعويض (26) في (7)، نحصل على:

$$y=-\left(\frac{1}{4}\mu-\frac{1}{4}\sqrt{\mu^2-8}\right)x^2-\left(\frac{\mu}{8}+\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2+6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8}\right)x \tag{40}$$

ومنه يكون الحلّ التامّ للمعادلة (2):

$$u(x,t)=\frac{1}{C_6\exp\left(\left(\frac{\mu}{8}+\frac{3\sqrt{\mu^2-8}}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{10\mu^2+6\mu\sqrt{\mu^2-8}-8}\right)(x-k\,t)\right)+2\mu-2\sqrt{\mu^2-8}}, \tag{41}$$

حيث C_6 ثابت كيفي.

الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال تطبيق طريقة التكامل الأول، نجد أننا حصلنا على مجموعة من الحلول التامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، وهذا يدل على أن طريقة التكامل الأول هي إحدى الطرائق الأكثر عملية في إيجاد الحلول التامة لهذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

المراجع:

[1] R. FITZHUGH, *Impulse and physiological states in models of nerve membrane*, Biophys. J. 1 (1961) 445–466.

[2] J.S. NAGUMO, S. ARIMOTO, S. YOSHIZAWA, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE 50 (1962) 2061–2071.

[3] S. ABBASBANDY, *Soliton solutions for the Fitzhugh–Nagumo equation with the homotopy analysis method*, Appl. Math. Model. 32 (2008) 2706–2714.

[4] H.A. ABDUSALAM, *Analytic and approximate solutions for Nagumo telegraph reaction diffusion equation*, Appl. Math. Comput. 157 (2004) 515–522.

[5] D.G. ARONSON, H.F. WEINBERGER, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. 30 (1978) 33–76.

[6] P. BROWNE, E. MOMONIAT, F.M. MAHOMED, *A generalized Fitzhugh–Nagumo equation*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1006–1015.

[7] T. KAWAHARA, M. TANAKA, *Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation*, Phys. Lett. 97A (1983) 311–314.

[8] H. LI, Y. GUO, *New exact solutions to the Fitzhugh–Nagumo equation*, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 524–528.

[9] M.C. NUCCI, P.A. CLARKSON, *The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions: an example of the Fitzhugh–Nagumo equation*, Phys. Lett. A 164 (1992) 49–56.

[10] A. HAJIPOUR AND S. MOLLA MAHMOUDI, *Application of Exp-function Method to Fitzhugh-Nagumo Equation*, World Applied Sciences Journal 9 (1): 113-117, 2010
[11] R.CONTE, *Universal invariance properties of Painlev´e analysis and B¨acklund transformation in nonlinear differential equations*. Phys Lett A, 1988,134:100-104
[12] F. CARIELLO, M. TABOR, *Painlev´e expansions for nonintegrable evolution equations*. Physica D, 1989,39:77-94
[13] A.H. BHRAWY, *A Jacobi–Gauss–Lobatto collocation method for solving generalized Fitzhugh–Nagumo equation with time-dependent coefficients*, Applied Mathematics and Computation 222 (2013) 255–264.
[14] Z.S. FENG, *On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation*, Phys. Lett. A 293 (2002) 57–66.
[15] Z.S. FENG, X.H. WANG, *The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg-de Vries equation*, Phys. Lett. A 308 (2003) 173–178.
[16] S. I. A. EL-GANAINI, *New exact solutions of some nonlinear systems of partial differential equations using the first integral method*, Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, Article ID 693076, 13 pages, 2013.
[17] K. R. RASLAN , *The first integral method for solving some important nonlinear partial differential equations* , Nonlinear Dynam.53(2008)281-286.
[18] S.ABBASBANDY AND A. SHIRZADI, *The first integral method for modified Benjamin-Bona-Mahony equation*, Commun.Nonlinear Sci.Numer.Simul.15(2010),1759-1764.
[19] F. TASCAN, A.BEKIR AND M. KOPARAN, *Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral method*, Commun.Nonlinear &Sci.Numer.Simul.14(2009), 1810-1815.
[20] K. HOSSEINI, R. ANSARI, AND P. GHOLAMIN, *Exact solutions of some nonlinear systems of partial differential equations by using the first integral method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 387, no. 2, pp. 807–814, 2012.
[21] N. BOURBAKI, *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Paris, France, 1972.
[22] Z. FENG, *Algebraic curve solution for second-order polynomial autonomous systems*, Electronic Journal of Linear Algebra, vol.8, pp. 14–25, 2001.
[23] N. TAGHIZADEH, M. MIRZAZADEH , A. SAMIEI PAGHALEH, *Exact solutions of some nonlinear evolution equations via the first integral method*, Ain Shams Engineering Journal (2013) 4, 493–499.