The Combined Sumudu Transform and New Homotopy Perturbation Method for Stiff Systems of Differential Equations

Dr. Suliman M. Mahmood*
Kenan Ali **

(Received 20 / 2 / 2022. Accepted 3 / 7 /2022)

□ ABSTRACT □

In this paper, We apply an approximation technique for solving stiff systems of ordinary differential equations. The proposed technique, which has been applied in other issues [11], is based on the use of the Sumudu transformation and the new Homotopy perturbation method (NHPM). The modified technique is transformed the stiff differential equations problem into a systems of algebraic equations to make it easy to solve. The proposed technique has been tested by applying it to solve two stiff -type problems. The numerical results show the accuracy and effectiveness of the proposed method compared with the results of some other methods.

Keywords: Sumudu Transform, New Homotopy Perturbation Methods, Stiff Differential Equations, Approximate Solutions.

***Professor, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com.**
****Postgraduate student, Department of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria. kinanali@gmail.com**

دمج تحويل سومودو مع تقنية اضطراب هوموتوي جديدة لحل جمل المعادلات التفاضلية القاسية

د. سليمان محمود*

كنان علي**

(تاريخ الإيداع 20 / 2 / 2022. قُبِل للنشر في 3 / 7 /2022)

□ ملخّص □

في هذا البحث نقوم بتطبيق تقنية تقريبية لحل جمل من المعادلات التفاضلية القاسية. تعتمد التقنية المقترحة التي تم تطبيقها في مسائل أخرى [11] على استخدام تحويل سومودو وطريقة اضطراب هوموتوبي الجديدة (NHPM). حيث استطاعت التقنية المعدلة تحويل مسألة المعادلات التفاضلية القاسية إلى جملة معادلات جبرية سهلة الحل. تم اختبار التقنية المقترحة بتطبيقها لحل مسألتين من النمط القاسي. وقد أظهرت النتائج العددية دقة و فعالية الطريقة المقترحة مقارنة مع نتائج بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: طريقة تحويل سومودو ، طريقة اضطراب هوموتوبي الجديدة (NHPM)، معادلات تفاضلية قاسية، حلول تقريبية.

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.. **E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com**

طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية – سورية. **kinanali@gmail.com

مقدمة:

تظهر أهمية المعادلات التفاضلية القاسية في فروع علمية مختلفة نذكر منها ميكانيك الموائع والمرونة وفي نمذجة الشبكات الكهربائية ونمذجة التفاعلات الكيميائية ونمذجة الكثير من الظواهر الفيزيائية [2] .و تعد مجالات الهندسة الكيميائية والكيمياء الحيوية وعلوم الحياة مصادر لمسائل المعادلات التفاضلية القاسيةوقد امتدت أهميتها مؤخرا إلى حقول العلوم الاقتصادية وظهر ما يسمى بالنمذجة الرياضية والعديد من النماذج الرياضية يؤول إلى منظومات من المعادلات التفاضلية القاسية التي سوف نعرفها بالشكل التالي [13] :

$$\begin{cases} x' = F(t, x(t)), & t \in [a,b] \\ x(a) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

حيث $x \in R^n$, $F: R^n \to R^n$.

يقال عن النظام الخطي (1) إنه قاسي في R^n إذا حقق الشرطين [3]:

1) $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$, $\lambda_i \in C$ (2)

2) $s = \frac{\max|\mathrm{Re}(\lambda_i)|}{\min|\mathrm{Re}(\lambda_i)|} > 1$ (3)

حيث إن ($\lambda_i, i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$) هي القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي $J(t)$للدالة F التي تعطى كالآتي:

$$J(t) = [J_{i,j}] = [\frac{\partial F_i}{\partial x_j}], i, j = 1,2,\ldots,n \ .$$

ويعطى مؤشر القساوةLبالشكل:

$$L = \max|\mathrm{Re}(\lambda_i)|$$

إن النسبةs المعطاة في العلاقة (3)تحدد درجة القساوة وتزداد هذه القساوة كلما كانت النسبة أكبر من الواحد .

مثال :

لنأخذ جملة المعادلات التفاضلية القاسية الآتية:

$$x_1'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + 2\sin(t)$$
$$x_2'(t) = -\left(\varepsilon^{-1} + 2\right)x_1(t) + \left(\varepsilon^{-1} + 1\right)(x_2(t) - \cos(t) + \sin(t))$$

حيث

(ε) مقدار صغير موجب ومصفوفة جاكوبي لجملة المعادلات التفاضلية القاسية

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\left(\varepsilon^{-1} + 2\right) & \left(\varepsilon^{-1} + 1\right) \end{pmatrix}$$

نجد أن القيم الذاتية للمصفوفة (J) و $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = \varepsilon^{-1}$ وبالتالي درجة القساوة $s = \frac{\max|\mathrm{Re}(\lambda_2)|}{\min|\mathrm{Re}(\lambda_1)|} = \frac{\varepsilon^{-1}}{1} > 1$.

أهمية البحث وأهدافه:

مشكلة البحث :

تعد مسألة المعادلات وجمل المعادلات التفاضلية القاسية من المسائل الصعبة والمعقدة[3] لأن معظم الطرائق العددية التقليدية التي تحل منظومات من المعادلات التفاضلية العادية تفشل في إيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية القاسية وذلك بسبب انخفاض الدقة وضعف الاستقرار لمثل هذه الطرائق [5,9].

طرائق البحث ومواده:

يعتمد البحث على طريقة اضطراب الهوموتوبي الجديدة واستخدام تحويل سومودو (Sumudu) وكذلك يعتمد على الخوارزميات والبرمجة العددية، إذ إننا سنستخدم لغة البرمجة (Mathmatica-9)لإنجاز النتائج العددية والرسوم البيانية اللازمة للبحث. كما تم الاطلاع على عدد من المراجع البحثية المتعلقة بإيجاد الحلول لمثل هذه المعادلات .

الدراسة المرجعية :

طبقDarvishiوآخرون في عام (2007) طريقة تكرار المتغير على جملة المعادلات التفاضلية غير الخطية القاسية و ذلك بإنشاء توابع التصحيح لمتجه الحل مع مضاريب لاغرانج وفقا لطريقة التكرار المتغير، ثم تتحول المسألة بعد ذلك لحل جملة معادلات خطية[2].

قام كل من (Aminikhah) و(Hemmatnezhad) في عام (2011) بتطبيق الصيغة التكاملية على طرفي علاقة الهوموتوبي التي تم إنشائها وافتراض تقريب حل المسألة على شكل سلسلة من كثيرات حدود، وبالمطابقة مع منشور تايلور تم تعيين المعاملات المجهولة للتقريب [4].

عدل (Aminikhah) في عام (2012) طريقة اضطراب الهوموتوبي باستخدام تحويل لابلاس مستفيدا من خاصة التفاضل لتحويل لابلاس ثم تطبيق تحويل لابلاس المعاكس والمقارنة بحسب قوى مقياس الهوموتوبي للحصول على تقريب للحل الدقيق[6].

قام (Asadi)وآخرون في عام (2012) بتعديل طريقة اضطراب الهوموتوبي بتطبيق معامل معاكس على طرفي علاقة الهوموتوبي التي تم إنشائها ثم استخدام تقريب بادي وافتراض تقريب حل المسألة على شكل سلسلة قوى وبالمطابقة مع منشور تايلور تم الحصول على تقريب للمسألة[7].

قام Biazarوآخرون في عام (2015) بالتعديل على طريقة اضطراب الهوموتوبي مع تقريب بادي ثم المقارنة بحسب قوى مقياس الهوموتوبي لإيجاد حل تقريبي[8].

عدل كل من (Nemrat) و(Zarita) في عام (2018) طريقة اضطراب الهوموتوبي باستخدام تحويل سومودو مستفيدا من خواص التحويل ثم تطبيق تحويل سومودو المعاكس لحل المسألة المطروحة[11].

في عام (2018) قدم (Öztürk) خوارزمية عددية تعتمد على كثيرات حدود تشيبتشيف وتؤول المسألة بعد ذلك إلى جملة معادلات جبرية بحلها نحصل على تقريب للمسألة المطروحة [12].

قام Malo وآخرون في عام (2021) بالتعديل على طريقة اضطراب الهوموتوبي مع تحويل لابلاس التكاملي لحل جمل المعادلات التفاضلية الكسرية القاسية ثم المقارنة بحسب قوى مقياس الهوموتوبي لإيجاد حل تقريبي[14].

3)تحويل سومودو(Sumudu) [1,3,11]

هو تحويل رياضي خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة في متغير مركب يدعى متغير سومودو . كما يمكن باستخدامه تحويل جملة المعادلات التفاضلية إلى جملة معادلات جبرية ويمكن بعدئذ حلها بطرائق سهلة ومختصرة.

يعطى تحويل سومودو الذي يرمز له بالرمز S للدالة $g: R \to R$ بالشكل التالي :[9]

$$G(u) = S\{g(\mathrm{t})\} = \int_0^\infty \frac{1}{u} g(\mathrm{t}) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{u}} \, \mathrm{dt} \, ,$$

حيث أن$G(u)$ هي الدالة المحولة بواسطة المتغير المركب $(u = \boldsymbol{\sigma} + i\omega)$

خصائص تحويل سومودو:

يوجد الكثير من الخصائص لتحويل سومودو نذكر منها:

ليكن لدينا c ثابت عددي عندئذ: $S\{c\}=c$

من أجل كل متغير حقيقي t فإن :

$$S\left\{\frac{t^{\mathrm{n}-1}}{(\mathrm{n}-1)!}\right\}=u^{\mathrm{n}-1},\quad \mathrm{n}=1,2....$$

من أجل المشتق $g^{n}(t)$ من المرتبة n للدالة $g(t)$ يكون:

$$S\{g^{(\mathrm{n}+1)}(t)\}=\frac{G(u)}{u^{\mathrm{n}+1}}-\sum_{k=0}^{\mathrm{n}}\frac{g^{(k)}(0)}{u^{\mathrm{n}+1-k}}$$

وفي الحالة n=0 فإن :

$$S\{g'(t)\}=\frac{G(u)}{u}-\frac{g(0)}{u}$$

حيث إن $g(0)$ هي القيمة الابتدائية للدالة g.

وفي الحالة n=1 فإن :

$$S\{g''(t)\}=\frac{G(u)}{u^{2}}-\frac{g(0)}{u^{2}}-\frac{g'(0)}{u}$$

ليكن لدينا الدالة g التي يمكن التعبير عنها بالشكل الأسي $g(t)=\exp[ct]$ حيث c عدد ثابت فإن :

$G(u)=S\{g(t)\}=\frac{1}{1-cu}$

ليكن لدينا الدالتان المثلثيتان: $g_1(t)=\sin(t)$ و $g_1(t)=\sin(t)$ فإن :

$G_2(u)=S\{g_2(t)\}=\frac{1}{1+u^2}$ و $G_1(u)=S\{g_1(t)\}=\frac{u}{1+u^2}$

- **الخاصة الخطية :**

ليكن لدينا الدالتان h و g عندئذ :

$$S\{c_1h(t)+c_2g(t)\}=c_1S\{h(t)\}+c_2S\{g(t)\}$$

- **خاصة جداء الالتفاف:**

$$S\{(h*g)(t)\}=uS\{h(t)\}*S\{g(t)\}$$

- **خاصة التحويل العكسي :**

يوجد تحويل **سومودو** معاكس ويُرمز له بالرمز S^{-1} وهو يقوم بالتحويل العكسي لتحويل سومودو، ويمكن حساب هذه العملية على النحو الآتي:

$$S^{-1}\{u^2\}=\frac{t^2}{2},S^{-1}\{u^3\}=\frac{t^3}{6},\ldots\ldots\ldots\ldots,S^{-1}\{u^{\mathrm{n}}\}=\frac{t^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

4) توصيف الطريقة :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية الآتية:

$$\mathrm{A}(\mathrm{U})-f(t)=0\ ,\mathrm{U}\in R^{\mathrm{n}},\quad t\in\Omega \qquad (4)$$

مع شروط ابتدائية :

$$\mathrm{U}(0)=\alpha_0\ ,\mathrm{U}'(0)=\alpha_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}(0)=\alpha_{\mathrm{n}-1} \qquad (5)$$

حيث A مؤثر تفاضلي عام و $f(t)$ تابع تحليلي معلوم في المجال Ω .

يمكن تقسيم المؤثر A إلى مؤثر Lخطي وN غير خطي[12]،لذلك المعادلة (4) تكتب بالشكل :

$$L(U) + N(U) - f(t) = 0 \qquad (6)$$

باستخدام تقنية اضطراب الهوموتوبي الجديدة NHPM [9]، ننشئ الهوموتوبي $V(t,p):\Omega X[0,1]\rightarrow R^n$ الذي يحقق المعادلة :

$$H(V,p)=(1-p)[L(V)-v_0] + p[A(V) - f(t)]=0 \qquad (7)$$

حيث v_0 تقريب ابتدائي للمعادلة (4) وp وسيط ينتمي إلى المجال[0,1]و $U=\lim_{P\to 1} V$

بوضوح لدينا من المعادلة (7):

$$H(V,0)= L(V) - v_0 = 0, \ H(V,1)=A(V)-f(t)=0 \qquad (8)$$

وباستخدام التجزيء$A(V)=L(V)+N(V)$يمكن إعادة كتابة المعادلة (7) بالشكل:

$$L(V) - v_0 + p[v_0 + N(V) - f(t)]=0 \qquad (9)$$

بتطبيق تحويل سومودو على طرفي المعادلة (9)

$$S\{L(V)-v_0+pv_0+ p[N(V)-f(t)]\}=0 \qquad (10)$$

بما أن Lعامل تفاضلي خطي يكون لدينا :

$$\frac{S\{V\}}{u^n}-\frac{V(0)}{u^n}-\frac{V'(0)}{u^{n-1}}-\frac{V''(0)}{u^{n-2}}-\cdots-\frac{V^{(n-1)}(0)}{u}+S\{-v_0+pv_0+p[N(V)-f(t)]\}=0 \qquad (11)$$

$$S\{V\}=u^n(\frac{V(0)}{u^n}+\frac{V'(0)}{u^{n-1}}+\frac{V''(0)}{u^{n-2}}+\cdots+\frac{V^{(n-1)}(0)}{u}-S\{-v_0+pv_0+p[N(V)-f(t)]\}) \qquad (12)$$

و بأخذ تحويل **سومودو** العكسي

$$V(t)=S^{-1}\{u^n(\frac{V(0)}{u^n}+\frac{V'(0)}{u^{n-1}}+\frac{V''(0)}{u^{n-2}}+\cdots+\frac{V^{(n-1)}(0)}{u}-S\{-v_0+pv_0+p[N(V)-f(t)]\})\} \qquad (13)$$

وفقا لطريقة اضطراب الهوموتوبي يمكننا استخدام مقياس الهوموتوبي وافتراض أن الحل التقريبي للمعادلة (13)يمكن أن يكتب كسلسلة قوى لـpبعد الاكتفاء ب m حد منها كالآتي:

$$V(t)=\sum_{k=0}^{m} p^k V_k = V_0(t)+pV_1(t)+p^2V_2(t)+p^3V_3(t)+\cdots p^m V_m(t) \qquad (14)$$

نعوض(14)في (13)

$$\sum_{k=0}^{m} p^k V_k = S^{-1}\{u^n(\frac{V(0)}{u^n}+\frac{V'(0)}{u^{n-1}}+\frac{V''(0)}{u^{n-2}}+\cdots+\frac{V^{(n-1)}(0)}{u}-S\{-v_0+pv_0+ p\left[N\left(\sum_{k=0}^{m} p^k V_k\right)-f(t)\right]\})\} \qquad (15)$$

ولإيجاد الحل نطابق مع قوى p :

$$p^0: V_0 = S^{-1}\left\{u^n(\frac{V(0)}{u^n}+\frac{V'(0)}{u^{n-1}}+\frac{V''(0)}{u^{n-2}}+\cdots+\frac{V^{(n-1)}(0)}{u}-S\{-v_0\}\right\}$$

$$p^1: V_1 = S^{-1}\{-u^n S\{v_0+N(V_0)-f(t)\}\}$$

$$\vdots$$

$$\vdots \qquad (16)$$

$$p^{m}: V_{m} = S^{-1}\{-u^{n} S\{N(V_0, V_1, V_2 \ldots\ldots V_{m-1})\}\}$$

لدينا الشروط الابتدائية كالآتي:

$$V(0)= v_0=\alpha_0, V'(0) = \alpha_1, V''(0) = \alpha_2 \ldots\ldots\ldots V^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$$

وهكذا نحصل على الحل التقريبيبالشكل التالي :

$$U(t) = \lim_{P \to 1} V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t) + \cdots V_m(t) \quad (17)$$

تطبيق التقنية المقترحة :

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية لبعض منظومات المعادلات التفاضلية القاسية :

$$x'(t) + Bx(t) - \varepsilon F(x(t), t) = 0, \; x(0) = x_0 \quad (18)$$

حيثB مصفوفة مربعة من القياسn و ε مقياس اضطراب صغير و

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ و } F(x(t), t) = \begin{pmatrix} F_1(x(t),t) \\ F_2(x(t),t) \\ \vdots \\ F_n(x(t),t) \end{pmatrix}$$

لحل مسألة المعادلات (18) نطبق أولا تقنية اضطراب الهوموتوبيولهذا ننشئ الهوموتوبي

$$X(t,p): \Omega X[0,1] \to R^{n}$$

الذي يحقق المعادلة :

$$H(X(t,p),p)=X'(t) - x_0+p[x_0+BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]=0 \quad (19)$$

حيث x_0 الشرط الابتدائي للمعادلة (18) وp وسيط ينتمي إلى المجال[0,1] يحقق الشروط الابتدائية .

واضح من المعادلة (19) :

$$H(X,0)= X'(t) - x_0 = 0$$

$$H(X,1) = X'(t) + BX(t) - \varepsilon F(X(t), t) = 0$$

للاختصار سنستخدم في كل مكان $X(t)$ بدلا من$X(t,p)$

نقوم بتطبيق تحويل **سومودو** على طرفي المعادلة (19)

$$S\{X'(t) - x_0+px_0+p[BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]=0 \quad (20)$$

باستخدام خاصية التفاضل لتحويل **سومودو** يكون لدينا :

$$\frac{S\{X(t)\}-X(0)}{u} + S\{-x_0 + px_0 + p[BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]\} = 0 \quad (21)$$

$$S\{X(t)\} - X(0) = -uS\{-x_0 + px_0 + p[BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]\} \quad (22)$$

$$S\{X(t)\} = X(0) - uS\{-x_0 + p[x_0 + BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]\} \quad (23)$$

بتطبيق تحويل **سومودو** المعاكس على طرفي المعادلة (23) :

$$X(t) = S^{-1}\{X(0) - uS\{-x_0 + px_0 + p[BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)]\}\} \quad (24)$$

وفقا" لطريقة اضطراب هوموتوبي الجديدة NHPM يمكننا استخدام مقياس الهوموتوبي p وافتراض أن حل المعادلة (24) يمكن أن يكتب كسلسلة قوى ل p بالشكل:

$$X(t)= \sum_{k=0}^{n} p^{k} X_k = X_0 + pX_1 + p^2X_2 + p^3X_3 + \cdots p^{m}X_m \quad (25)$$

نعوض (25) في المعادلة (24)

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{p}^k \mathrm{X}_k = S^{-1}\ \{\mathrm{X}(0) - uS\left\{-x_0 + \mathrm{p}x_0 + \mathrm{p}\left[B\sum_{k=0}^{m} \mathrm{p}^k \mathrm{X}_k - \varepsilon F\left(\sum_{k=0}^{m} \mathrm{p}^k \mathrm{X}_k\,, t\right)\right]\right\}\} \tag{26}$$

لإيجاد الحل نطابق مع قوى pفي المعادلة (26) فنحصل على الآتي :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}^0: \mathrm{X}_0\ (t) = S^{-1}\{\mathrm{X}(0) - \mathrm{u}S\{-x_0\}\\
&\mathrm{p}^1: \mathrm{X}_1(\mathrm{t}) = S^{-1}\left\{-uS\{x_0 + B\mathrm{X}_0\ (t) - \varepsilon F(\mathrm{X}_0\ (t), t)\}\right\}\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad (27)\\
&\mathrm{p}^m: \mathrm{X}_m(t) = S^{-1}\left\{-uS\{B(\mathrm{X}_0\ (t), \mathrm{X}_1\ (t), \mathrm{X}_2\ (t) \dots\dots \mathrm{X}_{m-1}\ (t))\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \varepsilon F(\mathrm{X}_0\ (t), \mathrm{X}_1\ (t), \mathrm{X}_2\ (t) \dots\dots \mathrm{X}_{m-1}\ (t), t)\}\right\}
\end{aligned}$$

لدينا التقريب الابتدائي من الشكل $x(0)=x_0=\mathrm{X}(0)$

وبالتالي الحل التقريبي كالآتي :

$$x(t)=\lim_{P\to 1}\mathrm{X}\,(t) = \mathrm{X}_0\ (t) + \mathrm{X}_1\ (t) + \mathrm{X}_2\ (t) + \cdots \mathrm{X}_m(t) \tag{28}$$

خوارزمية الطريقة:

1-المدخلات: شروط البدء للمسألة $\mathrm{X}(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,\mathrm{n}} \end{bmatrix}$ وm**درجة التقريب.**

2- ننشئ المتجهات:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_\mathrm{n}(t) \end{bmatrix}, \mathrm{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_\mathrm{n}(t) \end{bmatrix}, \mathrm{X}'(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{X'}_1(t) \\ \mathrm{X}'_2\ (t) \\ \vdots \\ \mathrm{X}'_\mathrm{n}\ (t) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon\varepsilon F(x(t), t) = \begin{bmatrix} F_1(\mathrm{X}_0\ (t), \mathrm{X}_1\ (t), \mathrm{X}_2\ (t) \dots\dots \mathrm{X}_\mathrm{n}\ (t), t) \\ F_2(\mathrm{X}_0\ (t), \mathrm{X}_1\ (t), \mathrm{X}_2\ (t) \dots\dots \mathrm{X}_\mathrm{n}\ (t), t) \\ \vdots \\ F_3(\mathrm{X}_0\ (t), \mathrm{X}_1\ (t), \mathrm{X}_2\ (t) \dots\dots \mathrm{X}_\mathrm{n}\ (t), t) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots\dots & b_{1,\mathrm{n}} \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ b_{\mathrm{n},1} & b_{1,2} & \dots\dots & b_{\mathrm{n},\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

3-ننشئ معادلة الهوموتوبي الآتية:

$$\mathrm{X}'(t)\ -x_0+\mathrm{p}[x_0+B\mathrm{X}(t)-\ \varepsilon F(\mathrm{X}(t), t)\ ]=0$$

4- نطبق تحويل سومودو :

$$S\{\mathrm{X}(t)\} = \mathrm{X}(0) - uS\{-x_0 + \mathrm{p}[x_0 + B\mathrm{X}(t) - \varepsilon F(\mathrm{X}(t), t)]\}$$

5- نطبق تحويل سومودو المعاكس :

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{S}^{-1}\ \left\{\mathrm{X}(0) - uS\{-x_0 + \mathrm{p}x_0 + \mathrm{p}[B\mathrm{X}(t) - \varepsilon F(\mathrm{X}(t), t)]\}\right\} \qquad (*)$$

6- ننشر $\mathrm{X}(t)$ **المعرفة في العلاقة (5) كسلسلة قوى لـ** p **بالشكل :**

$$\mathrm{X}(t)= \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}^k \mathrm{X}_k = \mathrm{X}_0 + \mathrm{p}\mathrm{X}_1 + \mathrm{p}^2\mathrm{X}_2 + \mathrm{p}^3\mathrm{X}_3 + \cdots \mathrm{p}^m\mathrm{X}_m \qquad (**)$$

7- نعوض منشور $X(t)$ التقريبي (**) في المعادلة (*) :

$$\sum_{k=0}^{m} p^k X_k = S^{-1}\left\{X(0) - uS\left\{-x_0 + px_0 + p\left[B\sum_{k=0}^{m} p^k X_k - \varepsilon F\left(\sum_{k=0}^{m} p^k X_k, t\right)\right]\right\}\right\} \quad (***)$$

8- نقارن طرفي المعادلة (***) وفق قوى p كالآتي :

$$X_0\ (t) = S^{-1}\{X(0) - uS\{-x_0\}\ V_1 = S^{-1}\{-uS\{v_0 + N(V) - f(t)\}\}$$

$$X_1(t) = S^{-1}\left\{-uS\{x_0 + BX_0\ (t) - \varepsilon F(X_0\ (t), t)\}\right\}$$

$$\vdots$$

$$X_m(t) = S^{-1}\left\{-uS\{B\big(X_0\ (t), X_1\ (t), X_2\ (t) \dots \dots X_{m-1}\ (t)\big) - \varepsilon F(X_0\ (t), X_1\ (t), X_2\ (t) \dots \dots X_{m-1}\ (t), t)\}\right\}$$

9-المخرجات:

نطبع الحل التقريبي :

$$x(t) = X_0\ (t) + X_1(t) + \cdots + X_m(t)$$

مسألة (1):

لنأخذ أولا مسألة الاختبار وهي معادلة تفاضلية عادية قاسية [Kaps[2,8,12,13تعطى بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1002x_1(t) + 1000x_2^2(t) \\ x_1(t) - x_2(t)\big(1 + x_2(t)\big) \end{bmatrix}$$

وفق الشروط الابتدائية

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والحل التحليلي

$$\begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-2t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix}$$

ننشئ الهوموتوبي بالتعويض بالعلاقة:

$$X'(t) - x_0 + p[x_0 + BX(t) - \varepsilon F(X(t), t)] = 0$$

حيث :

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} X'_1(t) \\ X'_2\ (t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon\, F(x(t), t) = \begin{bmatrix} 1000X_2^2(t) \\ -X_2^2(t) \end{bmatrix}, \quad B_{2,2} = \begin{bmatrix} 1002 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بعلاقة الهوموتوبي نحصل على جملة المعادلتين:

$$X'_1(t) - x_{1,0}(t) + p\,[x_{1,0}(t) + 1002\,X_1(t) - 1000X_2^2(t)] = 0 \qquad (29)$$

$$X_2{}'(t) - x_{2,0}(t) + p\,\big[x_{2,0}(t) - X_1(t) + X_2(t)[1 + X_2(t)]\big] = 0 \qquad (30)$$

لدينا من المسألة :

$$x_{1,0}(t) = X_1\ (0) = x_1(0) = 1 \quad , \quad x_{2,0}(t) = X_2\ (0) = x_2(0) = 1$$

نطبق تحويل سومودو على طرفي جملة المعادلتين(29)−(30) :

$$\frac{S\{X_1(t)\}-X_1(0)}{u}=S\{x_{1,0}(t)-P[x_{1,0}(t)+1002X_1(t)-1000\,X_2^2(t)]\}$$

$$\frac{S\{X_2(t)\}-X_2(0)}{u}=S\{x_{2,0}(t)-p[x_{2,0}(t)-X_1(t)+X_2(t)+X_2^2(t)]\}$$

$$S\{X_1(t)\}-1=uS\{1-p[1+1002X_1(t)-1000X_2^2(t)]\} \qquad (31a)$$

$$S\{X_2(t)\}-1=uS\{1-p[1-X_1(t)+X_2(t)+X_2^2(t)]\} \qquad (31b)$$

بتطبيق تحويل سومودو المعاكس على طرفي المعادلتين $(31b)$و $(31a)$ فينتج لدينا:

$$X_1(t)=S^{-1}\{1+uS\{1-p[1+1002X_1(t)-1000X_2^2(t)]\}\} \qquad (32)$$

$$X_2(t)=S^{-1}\{1+uS\{1-p[1-X_1(t)+X_2(t)+X_2^2(t)]\}\} \qquad (33)$$

وفقا لتقنية اضطراب الهوموتوبي وكما ذكرنا في العلاقة (14) في توصيف الطريقة يمكن استخدام المقياس p كمقياس صغير وافتراض أن حل المعادلتين (32) و(33) يمكن تمثيله بسلسلة قوىp بالشكل :

$$X_1(t)=X_{1,0}+p^1X_{1,1}+p^2X_{1,2}+p^3X_{1,3}+\cdots p^mX_{1,m} \qquad (34)$$

$$X_2(t)=X_{2,0}+p^1X_{2,1}+p^2X_{2,2}+p^3X_{2,3}+\cdots p^m\,X_{2,m} \qquad (35)$$

وبتعويض(34) و(35) في (32) و(33) نجد الحل بالمطابقة مع قوى p:

$$p^0: X_{1,0}(t)=S^{-1}\{1+uS\{1\}\}=S^{-1}\{1\}+S^{-1}\{u\}=1+t \qquad X_{2,0}(t)=1+t$$

$$P^1: X_{1,1}(t)=S^{-1}\{-uS\{1+1002X_{1,0}(t)-1000X_{2,0}^2(t)\}\}$$

$$=S^{-1}\{-uS\{1+1002+1002t-1000(1+2t+t^2)\}\}$$

$$=-3t+999t^2+\frac{1000}{3}t^3$$

$$X_{2,1}(t)=S^{-1}\{-uS\{1+t^2+2t+1\}\}=-2t-t^2-\frac{1}{3}t^3$$

$$p^2: X_{1,2}(t)=S^{-1}\left\{-uS\left\{1002X_{1,1}(t)-1000\left(X_{2,0}(t)X_{2,1}(t)+X_{2,1}(t)X_{2,0}(t)\right)\right\}\right\}$$

$$=\left(-\frac{1000}{2}+3\right)t^2+\left(-\frac{1000000}{6}+\frac{2}{3}-2000\right)t^3+\left(-\frac{1000000}{12}-\frac{5000}{6}\right)t^4-\frac{2}{15}t^5$$

$$X_{2,2}(t)=S^{-1}\{-uS\{-X_{1,1}(t)+X_{2,1}(t)+2\,X_{2,0}(t)X_{2,1}(t)\}\}$$

$$=\frac{3}{2}t^2+\left(\frac{1000}{6}+2\right)t^3+\left(\frac{1000}{12}+\frac{3}{4}\right)t^4+\frac{2}{15}t^5$$

p^3:

$$X_{1,3}(t)=\left(\frac{1000000}{6}+\frac{5000}{3}-2\right)t^3+\left(\frac{1000000000}{24}+\frac{2000000}{3}+\frac{43000}{12}-\frac{1}{3}\right)t^4+\cdots+\frac{17000}{315}t^7$$

$$X_{2,3}(t)=-\left(\frac{1000}{6}+\frac{11}{3}\right)t^3-\left(\frac{1000000}{24}+\frac{5000}{8}+\frac{37}{12}\right)t^4+\cdots-\frac{17000}{315}t^7$$

$$X_{1,4}(t)=\frac{1}{2835}(-119786543415t^4-24101579186622t^5-8089989736500t^6-34358715000t^7-74901375t^8-62000t^9)$$

$$X_{2,4}(t)=\frac{1}{22680}(957338865t^4+192620401974t^5+64655713017t^6+274706190t^7+599058t^8+496t^9)$$

$$X_{1,5}(t)=\frac{1}{124740}(1058352841804104t^5+177456831145549956t^6+51360586975368000t^7+280043916805125t^8+960049461250t^9+1633253600t^{10}+1105600t^{11})$$

$$\mathrm{X}_{2,5}(t) = \frac{1}{2494800}(-21145953427830t^5 - 3545598200385780t^6 - 1026193703292450t^7 - 5597096628915t^8 - 19193663665t^9 - 32659616t^{10} - 22112t^{11})$$

$$\mathrm{X}_{1,6}(t) = \frac{1}{2432430}(-3453467118860184426t^6 - 4963382087503527951\,12t^7 - 1265691903875223288\,75t^8 - 838082207135905875t^9 - 4139521173323250t^{10} - 10985574756000t^{11} - 15254709600t^{12} - 8737600t^{13})$$

$$\mathrm{X}_{2,6}(t) = \frac{1}{389188800}(552003846851276820t^6 + 79334939499043868640t^7 + 20231019981376988355t^8 + 133996005700994580t^9 + 662023738021074t^{10} + 1757228633472t^{11} + 2440466080t^{12} + 1398016t^{13})$$

$$\mathrm{X}_{1,7}(t) = \frac{1}{204324120}(41608283369854257280224t^7 + 523260645924108043374\,1227t^8 + 119549924759756327811\,9750t^9 + 9306779850546542439075t^{10} + 64145237072134409100t^{11} + 237829465094914875t^{12} + 511340482377900t^{13} + 599212861200t^{14} + 297462080t^{15})$$

$$\mathrm{X}_{2,7}(t) = \frac{1}{40864824000}(-831336008950309172310\,0t^7 - 104547794245238955578\,4675t^8 - 238863353108515303793625t^9 - 1859946971953192287165t^{10} - 12822722376342204690t^{11} - 47550509160209055t^{12} - 102248380375260t^{13} - 119832087120t^{14} - 59492416t^{15})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

p^m:

$$\mathrm{X}_{1,m}(t)=S^{-1}\left\{-uS\{1002\mathrm{X}_{1,m-1}(t) - 1000\ \sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{X}_{2,k}(t)\,\mathrm{X}_{2,m-k-1}(t)\}\right\}$$

$$\mathrm{X}_{2,m}(t)=S^{-1}\left\{-uS\{-\mathrm{X}_{1,m-1}(t) + \mathrm{X}_{2,\mathrm{m}-1}(t) + \sum_{k=0}^{\mathrm{m}-1}\mathrm{X}_{2,k}(t)\,\mathrm{X}_{2,m-k-1}(t)\}\right\}$$

مع الاكتفاء بالتقريب حتى المرتبة $m = 7$ فإن الحل التقريبي وفق خوارزميتنا وباستخدام برنامج Mathematica يمكن الحصول عليه بالشكل:

$$x_1(t) = \mathrm{X}_{1,0}(t) + \mathrm{X}_{1,1}(t) + \mathrm{X}_{1,2}(t) + \mathrm{X}_{1,3}(t) + \mathrm{X}_{1,4}(t) + \mathrm{X}_{1,5}(t) + \mathrm{X}_{1,6}(t) + \mathrm{X}_{1,7}(t)$$

$$x_2(t) = \mathrm{X}_{2,0}(t) + \mathrm{X}_{2,1}(t) + \mathrm{X}_{2,2}(t) + \mathrm{X}_{2,3}(t) + \mathrm{X}_{2,4}(t) + \mathrm{X}_{2,5}(t) + \mathrm{X}_{2,6}(t) + \mathrm{X}_{2,7}(t)$$

ومنه:

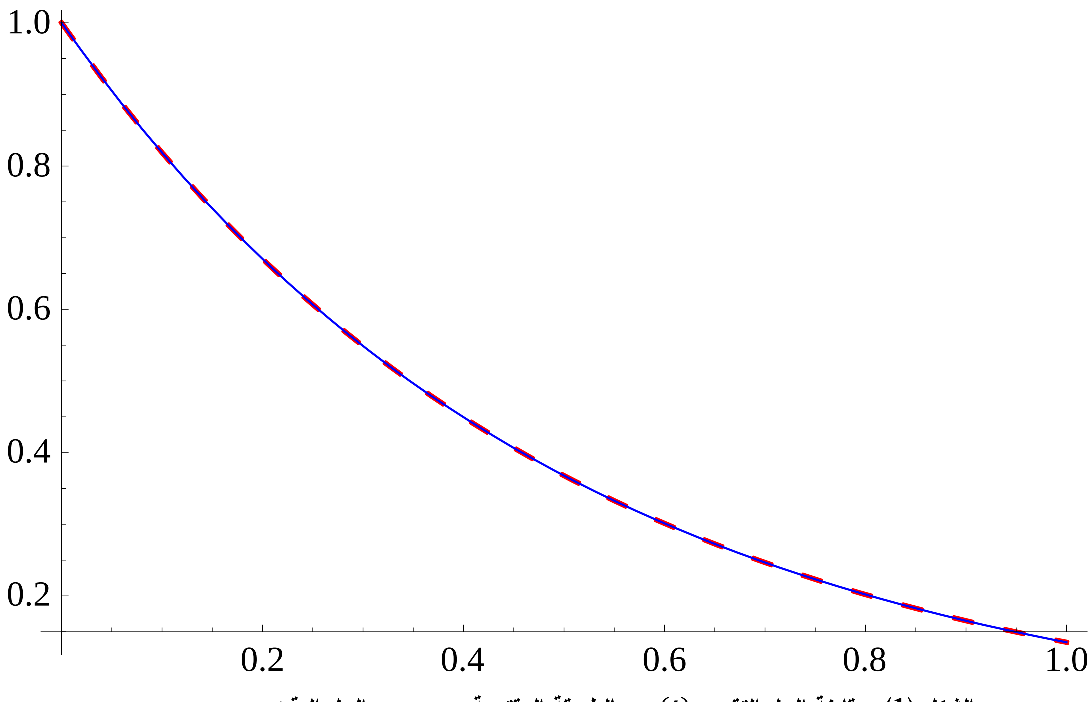
$$x_1(t) = 1 - 2t + 2t^2 - \frac{4t^3}{3} + \frac{2t^4}{3} - \frac{4t^5}{15} + \frac{4t^6}{45} - \frac{8t^7}{315} + \frac{2t^8}{315} - \frac{4t^9}{2835} + \frac{4t^{10}}{14175} - \frac{8t^{11}}{155925} + \frac{4t^{12}}{467775} - \frac{8t^{13}}{6081075} + \frac{8t^{14}}{42567525} - \frac{16t^{15}}{638512875}$$

$$x_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^7}{5040} + \frac{t^8}{40320} - \frac{t^9}{362880} + \frac{t^{10}}{3628800} - \frac{t^{11}}{39916800} + \frac{t^{12}}{479001600} - \frac{t^{13}}{6227020800} + \frac{t^{14}}{87178291200} - \frac{t^{15}}{1307674368000}$$

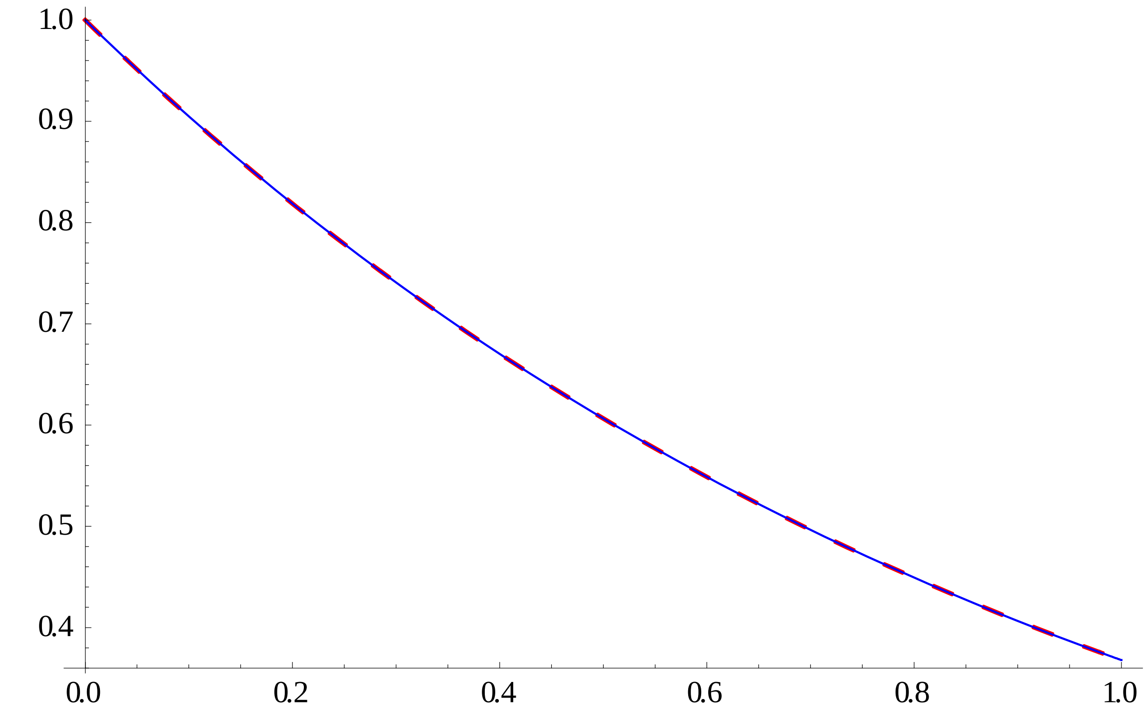
ندرج في الجدول (1) مقارنة نتائج طريقتنا المقترحة مع طريقة **كثيرات حدود هرميت بأربعة وسطاء تجميع[13]**وطريقة **تقريب تشيبتشيف**[12].

الجدول (1):مقارنة نتائج طريقتنا مع طرائق أخرى

t	طريقة تقريب تشيبتشيف [12]		طريقة كثيرات حدود هرميت مع أربعة وسطاء تجميع [13]		طريقتنا المقترحة	
	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$
0.2	0.312 E−8	0.143 E−10	0.206254 E-12	0.138811 E-12	0.	1.1102E−16
0.4	0.326 E−8	0.214 E−10	0.078463 E-12	0.665406E-12	1.276E−15	0.
0.6	0.223 E−8	0.221 E−10	0.108528 E-11	0.997659E-12	8.252E−13	0.
0.8	0.196 E−8	0.180 E−10	0.106212 E-11	0.118964 E-11	8.054E−11	1.276E−15
1.0	0.203 E−7	0.202 E−10	0.939903 E-11	0.128115E-11	0.143 E−12	4.513E−14



الشكل (1): مقارنة الحل التقريبي$x_1(t)$ بالطريقة المقترحة _ _ _ مع الحل الدقيق _____



الشكل (2): مقارنة للحل التقريبي $x_1(t)$ بالطريقة المقترحة_ _ _ مع الحل الدقيق ـــــ

مسألة (2):وهي معادلة اختبار تفاضلية قاسية [**13**] :

$$\begin{bmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + 95x_2(t) \\ -x_1(t) - 97x_2(t) \end{bmatrix}$$

مع الحل التحليلي:

$$x_1^*(t) = [95\exp(-2t) - 48\exp(-96t)]/47$$
$$x_2^*(t) = [48\exp(-96t) - \exp(-2t)]/47$$

بتطبيق الخوارزمية المقترحة علما إن المدخلات يتم كتابتها بالشكل التالي :

حيث :

$$\mathrm{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, \mathrm{X}'(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{X}'_1(t) \\ \mathrm{X}'_2(t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \mathrm{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\varepsilon F(x(t), t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{2,2} = \begin{bmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{bmatrix}$$

نقوم **بإنشاء الهوموتوبي** :

$$\mathrm{X}'_1(t) - x_{1,0}(t) + \mathrm{p}\,[x_{1,0}(t) + \mathrm{X}_1(t) - 95\mathrm{X}_2(t)] = 0 \qquad (36)$$
$$\mathrm{X}_2{}'(t) - x_{2,0}(t) + \mathrm{p}\big[x_{2,0}(t) + \mathrm{X}_1(t) + 97\mathrm{X}_2(t)\big] = 0 \qquad (37)$$

لدينا من المسألة :

$$x_{1,0}(t) = \mathrm{X}_1(0) = x_1(0) = 1 \qquad , \qquad x_{2,0}(t) = \mathrm{X}_2(0) = x_2(0) = 1$$

نطبق تحويل سومودو على طرفي المعادلتين(34) و(35) :

$$S\{\mathrm{X}_1(t)\} - 1 = uS\{1 - \mathrm{p}[1 - \mathrm{X}_1(t) - 95\mathrm{X}_2(t)]\} \qquad (38)$$
$$S\{\mathrm{X}_2(t)\} - 1 = uS\{1 - \mathrm{p}[1 + \mathrm{X}_1(t) + 97\mathrm{X}_2(t)]\} \qquad (39)$$

وبالتعويض بعلاقة الهوموتوبي نحصل على جملة المعادلتين:

$$X_1(t) = S^{-1}\{1 + uS\{1 - p[1 + X_1(t) - 95X_2(t)]\}\} \quad (40)$$
$$X_2(t) = S^{-1}\{1 + uS\{1 - p[1 + X_1(t) + 97X_2(t)]\}\} \quad (41)$$

وفقا لتقنية اضطراب الهوموتوبي وكما ذكرنا في العلاقة (14) في توصيف الطريقة يمكن استخدام المقياس p كمقياس صغير وافتراض أن حل المعادلتين (40) و(41) يمكن تمثيله بسلسلة قوىp بالشكل :

$$X_1(t) = X_{1,0} + p^1X_{1,1} + p^2X_{1,2} + p^3X_{1,3} + \cdots p^mX_{1,m} \quad (42)$$
$$X_2(t) = X_{2,0} + p^1X_{2,1} + p^2X_{2,2} + p^3X_{2,3} + \cdots p^m X_{2,m} \quad (43)$$

وبتعويض(42) و(43) في (40) و(41) نجد الحل بالمطابقة مع قوى p:

$$X_{1,0}(t) = S^{-1}\{1 - uS\{-1\}\}=1+ t$$
$$X_{2,0}(t) = S^{-1}\{1 - uS\{-1\}\}=1+ t$$
$$X_{1,1}(t) = S^{-1}\{-uS\{1 + X_{1,0}(t) - 95X_{2,0}(t)\}\}=93t + 47t^2$$
$$X_{2,1}(t) = S^{-1}\{-uS\{1 + X_{1,0}(t) + 97X_{2,0}(t)\}\}=-99t - 49t^2$$
$$X_{1,2}(t) = S^{-1}\{-uS\{X_{1,1}(t) - 95X_{2,1}(t)\}\}=-4749t^2 - \frac{4702t^3}{3}$$
$$X_{2,2}(t) = S^{-1}\{-uS\{X_{1,1}(t) + 97X_{2,1}(t)\}\}=4755t^2 + \frac{4706t^3}{3}$$
$$X_{1,3}(t) = S^{-1}\{-uS\{X_{1,2}(t) - 95X_{2,2}(t)\}\}=152158t^3 + \frac{112943t^4}{3}$$
$$X_{2,3}(t) = S^{-1}\{-uS\{X_{1,2}(t) + 97X_{2,2}(t)\}\}=-152162t^3 - \frac{112945t^4}{3}$$
$$X_{1,4}(t) = -3651887t^4 - \frac{10842718t^5}{15}$$
$$X_{2,4}(t) = 3651889t^4 + \frac{10842722t^5}{15}$$
$$X_{1,5}(t) = \frac{350581342t^5}{5} + \frac{520450654t^6}{45}$$
$$X_{2,5}(t) = -\frac{350581346t^5}{5} - \frac{520450658t^6}{45}$$

$$X_{1,6}(t) = -\frac{16827904606t^6}{15} - \frac{49963263164t^7}{315}$$
$$X_{2,6}(t)=\frac{3365580922t^6}{3} + \frac{49963263172t^7}{315}$$
$$X_{1,7}(t) = \frac{1615478842556t^7}{105} + \frac{599559158063t^8}{315}$$
$$X_{2,7}(t) = -\frac{1615478842564t^7}{105} - \frac{17130261659t^8}{9}$$
$$X_{1,m}(t) = S^{-1}\{-uS\{X_{1,m-1}(t) - 95X_{2,m-1}(t)\}\}$$
$$X_{2,m}(t) = S^{-1}\left\{-uS\{X_{1,m-1}(t) + 97X_{2,m-1}(t)\}\right\}$$

مع الاكتفاء بالتقريب حتى المرتبة $m = 7$ فإن الحل التقريبي وفق خوارزميتنا وباستخدام برنامج الماثماتيكا يمكن الحصول عليه بالشكل:

$$x_1(t) = X_{1,0}(t) + X_{1,1}(t) + X_{1,3}(t) + \cdots + X_{1,7}(t)$$
$$x_1(t) = 1 + 94t - 4702t^2 + \frac{451772t^3}{3} - \frac{10842718t^4}{3} + \frac{1040901308t^5}{15} - \frac{49963263164t^6}{45} + \frac{4796473264504t^7}{315} - \frac{57557679174238t^8}{315}$$

و كذلك :

$$x_2(t) = X_{2,0}(t) + X_{2,1}(t) + X_{2,2}(t) + X_{2,3}(t) + \cdots X_{2,7}(t)$$

$$x_2(t) = 1 - 98t + 4706t^2 - \frac{451780t^3}{3} + \frac{10842722t^4}{3} - \frac{1040901316t^5}{15} + \frac{49963263172t^6}{45} - \frac{137042093272t^7}{9} - \frac{57557679174238t^8}{315}$$

نقارن في الجدول (2) طريقتنا المقترحة مع طريقة **كثيرات حدود هرميت بأربعة وسطاء تجميع[13]**و **طريقة التصحيح والتنبؤ[10]**.

الجدول (2):مقارنة نتائج طريقتنا مع طرائق أخرى

t	طريقة التصحيح والتنبؤ [10]		طريقة كثيرات حدود هرميت مع أربعة وسطاء تجميع [13]		الطريقة المقترحة	
	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$	$\|x_1(t)-x_1^*(t)\|$	$\|x_2(t)-x_2^*(t)\|$
0.4	5.0 E -8	7.0 E -10	2.74329 E-12	8.27562E-13	1.276E−15	0.
0.8	6.0 E-08	1.0 E -10	1.34681 E-13	3.76830E-13	8.054E−14	1.276E−15
1.0	1.1 E -7	1.4 E -9	1.03278 E-13	1.051906 E-13	0.143 E−14	4.513E−14

نجد من نتائج المقارنات في الجدولين(1)−(2) أن طريقتنا قدمت حلول تقريبية أكثر دقة من نتائج الطرائق في المراجع [10,12,13]وهذا يؤدي نجاح التقنية المقترحة في حل مسائل من المعادلات التفاضلية القاسية.

الاستنتاجات والتوصيات:

في هذا البحث طبقنا دمج بين تحويل سومودو وتقنية اضطراب الهوموتوبي الجديدة لحل جمل المعادلات التفاضلية القاسية.لقد ناقشنا منهجية بناء هذه المخططات ودرسنا أداءها في حل مشكلة جملة معادلات تفاضلية قاسية. لاحظنا انه يتقارب الحل بسرعة كبيرة من خلال استخدام طريقة اضطراب الهوموتوبي الجديدة عن طريق تعديل التقنية باستخدام تحويل سومودو و ونقترح تطوير تقنيات عددية مشابهة لحل مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية العادية القاسية الخطية وغير الخطية من المرتبة الثانية ونظرا لفاعلية وسرعة التقارب في الطريقة المقترحة نوصي بالآتي:

أ−استخدام الطريقة المقترحة لحل جمل من المعادلات التفاضلية القاسية.

ب−تطوير طريقتا هوموتوبي و سومودو لحل مسألة المعادلات التفاضلية المتأخرة .

ج−تطوير تقنيات هوموتوبي مع سومودو لحل مسائل في المعادلات التفاضلية التكاملية .

References:

1. BELGACEM.F.B.M; KARABALLI.A.B, *SUMUDU TRANSFORM FUNDAMENTAL PROPERTIES INVESTIGATIONS AND APPLICATIONS*, DOI 10.1155/JAMSA/2006/91083.
2. DARVISHI. M.T;KHANIF;SOLIMAN A.A. , *The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations*,Computers and Mathematics with *Applications.* 54 (2007) 1055-1063.
3. ELTAYEB H.,KILICMANA*; Note on the Sumudu Transforms and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, No. 22, 1089 – 1098.

4. AMINIKHAHA H.; HEMMATNEZHAD M., *An effective modification of the homotopy perturbation method for stiff systems of ordinary differential equations*,Applied Mathematics Letters 24. (2011), 1502-1508.
5. SEMENOV M., (2011). Analyzing the absolute stability region of implicit methods of solving ODEs,[math.CA] 24 Jan, 2011,PP.1-15.
6. AMINIKHAH H.,*The combined Laplace transform and new Homotopyperturbation methods for stiff systems of ODEs*. Applied Mathematics Modelling 36 (2012) 3638-3644 .
7. ASADI. M. A ,SALEHI.F ,*Mohyud-Din.S.T and Hosseini. M. M, Modified homotopy perturbation method for stiff delay differential equations* (DDEs), International Journal of the Physical Sciences Vol. 7(7), pp. 1025-1034, 2012.
8. BIAZAR J.; M. A. ASADI; F.SALEHI, *Rational Homotopy Perturbation Method for solving stiff systems of ordinary differential equations*, Applied Mathematics Letters 39 (2015) 1291-1299.
9. MAHMOUD.S.M; Ali.M;Gdeed.B,*Numerical Treatment of Delay-Differential Equations by Using Spline HermiteApproximations*,Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (5) 2017.
10. ABHULIMENC.E, And UKPEBOR L.A (2017), *A Family of Exponentially Fitted Multiderivative Method for Stiff Differential Equations*, Journal of Advance in Mathematics,Vol. 13,No. 1,pp 7155-7162.
11. NEMRAT A.;ZAINUDDINZ.*Sumudu transform with modified Homotopyperturbation method to solve two point singular boundary value problems*,Journal of Physics: Conference Series 1123 (2018) 43–56.
12. ÖZTÜRK Y.; U. A.KOÇMAN, *Numerical solution of systems of differential equations using operational matrix method with Chebyshev polynomials* , Journal of Taibah University for Science, Vol. 12, No. 2, (2018) 155–162.
13. Hassan N., *Using Hermite Polynomials with Four Collocation Parameters for Solving Systems of StiffOrdinary Differential Equations*.*Tartous University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (3) No. (1) 2019.*
14. MaloD.H,Masiha.*R.Y*,Murad.*M.A.S*,Abdulazeez*S.T,A New Computational Method Based on Integral Transform for Solving Linear and Nonlinear Fractional Systems*,JurnalMatematika MANTIK Vol. 7, No. 1, pp. 9-19, May 2021.