مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

دراسة أحد تطبيقات مسائل النمذجة الرياضيَّة العشوائيَّة

الدكتور مبارك ديب*

(تاريخ الإيداع 11 / 9 / 2014. قُبِل للنشر في 30 / 10 /2014)

□ ملخّص □

الغاية من هذا البحث هو دراسة وإنشاء أنموذج رياضي عشوائي ضمن شروط احتمالية مفروضة، وتحديداً بناء أنموذج عشوائي لمجمّع طاقة شمسية خاص بإزالة الملوحة من الماء، وبالتالي الحصول على الماء العذب، وذلك ضمن شروط محددة.

نؤكد أن مسألة إيجاد القيم المثلى لمتغيرات المجمّع الشمسي أعلاه تمثل صنفاً خاصاً من مسائل النمذجة الرياضية العشوائية – اللاخطية ، ونشير إلى أن الطرق الأكثر فعالية لإيجاد الحلّ الأمثل لمثل هذا النوع من المسائل هي الطرق العشوائية شبه المتدرجة.

الكلمات المفتاحية: نماذج عشوائية، نمذجة رياضية عشوائية، نماذج بحوث العمليات، أمثليات عشوائية.

*مدرس- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

A Study of one of the issues of stochastic mathematical modeling

Dr. Mubarak Deeb*

(Received 11 / 9 / 2014. Accepted 30 / 10 /2014)

□ ABSTRACT □

The purpose of this research is to study and create a mathematical model under the terms of the probability of randomly imposed, specially by building a model of random Complex Solar particular by removing the salinity of the water, and thus to obtain fresh water and that, under certain conditions.

We Assure that the question of finding the optimum values for the variables solar collector above represent varieties of special issues of mathematical modeling and nonlinear stochastic, we point to that the most effective ways to find the perfect solution for this kind of issues are stochastic gradient methods.

Key words: Stochastic Models, Stochastic Mathematical Modeling, Models of Operation Research, , Stochastic Optimization.

***Assistant Professor, Department of Mathematical, Facility of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

إن تشكيل النماذج الرياضية التي تعتمد بناء مجمعات الطاقة الشمسية لإزالة الملوحة من الماء، وبالتالي الحصول على الماء العذب، هو من المسائل الهامة جداً في الكثير من المناطق ، وبخاصة المناطق التي يتطلب فيها تأمين الماء العذب مبالغ كبيرة.

وبالواقع إن مجمل الإشعاع الشمسي الساقط في العام كاف لتبخير طبقة من الماء بعمق محدد تعتبر اقتصادية قياساً بكلفة نقلها وتأمينها من مناطق أخرى ، وربما تعتبر اقتصادية جداً في مناطق أخرى.

من المعلوم أن الأشعة الشمسية تسقط وفق عملية عشوائية، وبالتالي فإن كمية الماء العذب الناتج من محطات التحلية التي تعتمد الطاقة الشمسية في عملها ستكون عشوائية أيضاً. الأمر الذي يعني أن النماذج الرياضية الموصّفة لمثل هذه المحطات ستتبع مسائل نمذجة عشوائية ديناميكية ، وهذه المسائل غير محدبة وغير ملساء بالحالة العامة، وبالواقع تعتبر نظرية القيم المثلى غير المحدبة أقل تطوراً حتى الآن ، وهذا يتعلق بتطوير فكرة الدوال غير الملساء وغير المحدبة، كما يتعلق بتعدد القيم القصوى والطبيعة الاحتمالية للمسألة، مع ملاحظة أن النمذجة الرياضية العشوائية تعتبر ذات مجال واسع لاستخدام أفكار القيم المثلى غير الملساء ، وقد بُحثت مسائل النمذجة العشوائية في أعمال Yrmoliev [1].

ومن المعروف أيضاً أن أصعب مسائل النماذج الرياضية هي المسائل اللاخطية علماً أنَّ أكثر الطرق فعالية لحلها هي (طريقة الغرامة أو طريقة الدوال الجزائية (Penalty functions) ، حيث تتحول المسألة بواسطتها من مسألة مشروطة إلى مسألة غير مشروطة [1], [2].

الشكل العام لمسألة النمذجة الرياضية العشوائية العامة:

$$F_0 = Ef_0(x,\theta) \to \underbrace{\min}_{x}$$

$$F^i = Ef^i(x,\theta) \le 0\ ,\ i = 1,2,\dots,m$$

$$x \in X \subset E_n$$

حيث:

θ – حدث احتمالي من الفراغ الاحتمالي (θ, Σ, ρ) ، حيث إن المشتقات المستمرة للدوالّ الهدفية غير موجودة في هذا الفراغ ، لأنّ الدوال ذات طبيعة احتمالية.

E – إشارة التوقع الرياضي.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث من وجهة نظر اقتصادية بتشكيل الدالّة الهدفية الخاصة بمجمّع الطاقة الشمسية بغية الحصول على الماء العذب ضمن فرضية توفر الماء المالح بشكل دائم . والهدف المهمّ الآخر هو الدراسة التحليلية لمردود المجمع بأقل تكلفة ممكنة تحت شروط محددة مسبقاً، بالإضافة لإمكانية تطبيقه في الواقع العملي وبعدد أكثر من المتغيرات.

طرائق البحث ومواده:

تنطلق فكرة البحث من مفهوم الأمثليات والسبرنيتيكا الرياضية(علم الضبط الرياضي) ، اعتمدت طريقة البحث أولاً على بعض مفاهيم النظم الطاقية العادية ، ثم على النظم الطاقية غير العادية ، آخذين بالاعتبار بعض مفاهيم التحليل الرياضي والاحتمالات ، وذلك للتخفيف من بعض عيوب الأنموذج المراد تشكيله.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

إن صف الدوالّ القابلة للتفاضل (بشكل عام) هو صف مغلق [2]، وبناءً عليه فإنه يمكن استخدام طريقة التدرجات العشوائية العامة على مسائل النمذجة الرياضية العشوائية ذات الدوال القابلة للتفاضل(بشكل عام).

تعريف:

نقول إن الدالة $f : E_n \rightarrow E_1$ قابلة للتفاضل بشكل عام في النقطة $x \in E_n$ ، إذا وجد في جوار ما لـ x التطبيق G_f المتعدد القيم والنصف مستمر من الأعلى ، بحيث تكون:

$G_f(y), y \in E_n$ مجموعات غير خالية ومحدبة، وفي جوار x يكون النشر التالي صحيحاً:

$$f(y) = f(x) + (g, y-x) + \underbrace{O(x,y,g)}_{(g(x)-g(y),y-x)+o(\|y-x\|)}$$

حيث:

$g \in G_f(y)$ – قيمة معبر عنها بعدد حقيقي (ناتج عددي).

و: $lim_{k\rightarrow\infty} \left(\frac{O(x,y^k,g^k)}{\|y^k-x\|}\right) = 0$

وذلك من أجل أي متتالية: $g^k \in G_f(y^k)$, $y^k \rightarrow x \ ;(y^k \neq x)$

وعند ذلك نقول إن الأشعة $g \in G_f(y)$ تمثل تدرجات عامة(شبه تدرجات –Simi gradient) للدالة f في النقطة y.

- الدوالّ المستمرة القابلة للتفاضل، الدوالّ المحدبة وضعيفة التحدب، الدوال نصف الملساء، دالة القيم العظمى، تركيب الدوال، الدوال المقعرة ونصف المقعرة ، تدخل جميعها في صف الدوالّ القابلة للتفاضل بشكل عام.
- الدوال القابلة للتفاضل بشكل عام تحقق شرط ليبتشز ، وبالتالي فهي مستمرة.
- الطريقة المقترحة لحلّ النماذج العشوائية المحدَّبة من الشكل:

$$F(x) = Mf(x,\theta) \rightarrow \min_{x\in D} \quad :(1)$$

هي طريقة التدرجات العشوائية العامة [1] حيث:

- من أجل الفراغ الاحتمالي (Θ, Σ, ρ) نفرض الإجراء التالي:

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s), s = 0,1,2,\dots, \quad :(2)$$

علماً أنَّ:

x^0 – نقطة اختيارية.

ρ_s – قيمة الخطوة (عبارة عن شعاع مقيس بالنسبة لـ δ – الجبر).

γ_s – عامل الترقيم (عبارة عن شعاع مقيس بالنسبة لـ δ – الجبر).

$\xi^s(w)$ – شعاع عشوائي يحقق العلاقة الرياضية المشروطة التالية:

$$M\ (\xi^s/x^0, \dots, x^s) = \ a_s F_x^{\wedge}(x^s) + b^s\ , s = 0, 1, 2, \dots \dots, \qquad :(3)$$

حيث:

a_s – قيمة عشوائية غير سالبة.

b^s– شعاع عشوائي(مقيس بالنسبة للجبر الجزئي δ على β_s المولد بالقيم العشوائية$\{x^0, \dots, x^s\}$.

كذلك ρ_s ، γ_s مقيسة بالنسبة لـ β_s

$F_x^{\wedge}(x^s)$ – تدرج عام.

ومؤثر الإسقاط π_D على المجموعة المحدبة المغلقة D يقابل كل نقطة$x \in E_n$ بمسقطها $\pi_D(x) \in D$ ، بحيث يكون: $\forall\ y\ \in D\ ,\ \|y - \pi_D(x)\| \leq \|y - x\|$

النتائج والمناقشة:

تُكتب العلاقة التي تحدد النفقات المثلى للنظم الطاقية العادية في معظم النماذج الأمثلية بالشكل [4], [3]:

(وحدة نقدية / عام) ، $Z_i = \ni_i + \varepsilon\, k_i$ (لأجل كل شكل i)

حيث:

$\ni_i$ – مصاريف استثمار سنوية.

ε – معامل الفعالية المعياري لتوظيفات رأس المال k_i.

k_i – رأس المال المستثمر.

في الحالة العامة، إن مسألة إيجاد القيم المثلى للنظم الطاقية يمكن اعتبارها إحدى مسائل النمذجة الرياضية غير المحدبة، وفي مثل هذه المسائل قد يكون للمتغيرات على المجال المدروس أكثر من قيمة.

من صفات مسألة إيجاد القيم المثلى للنظم الطاقية أنها:

متعددة الأشكال، لاخطية، ديناميكية، وتُقسم من حيث المبدأ وانطلاقاً من جوهرها الطاقي ومن الطرق الرياضية لحلها إلى ثلاث زمر: بارامترية، مركَّبة، أنظمة تحكم.

وبالواقع يمكن توسيع المبادئ الأساسية المطروحة في النظم الطاقية العادية إلى النظم التي تعتمد الطاقة الشمسية وطاقة الرياح في عملها(نظم طاقية غير عادية)[3]، حيث لهذه النظم طبيعة احتمالية.

من أكثر الأشكال شيوعاً لصياغة مثل هذا النوع من النماذج هو صياغتها بشكل مسألة نمذجة رياضية عشوائية بالشكل التالي:

$$F\ (x) = E\ f(x\ ,\theta) \ \ \rightarrow min \qquad :(1)$$

عند الشروط:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x\ ,\theta) = 0 \\ a_2 \leq f_2(x\ ,\theta) \leq b_2 \\ a\ \leq x\ \leq b \end{array}\right\} \qquad :(2)$$

حيث:

$x = \ (x_1\ , x_2, \dots \dots, x_n)$ – شعاع محدد.

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots \dots, \theta_n)$ – شعاع عشوائي.

$f_1(x,\theta)$, $f_2(x,\theta)$ – دوال عشوائية .

a , b , a_2 , b_2 – ثوابت.

E – إشارة التوقع الرياضي.

ويفترض أن الدوال: $f(x,\theta), f_1(x,\theta), f_2(x,\theta)$ قابلة للتفاضل بالنسبة لـ x ومستمرة.

ولمثل هذه النماذج العشوائية بشكل عام سمات أساسية منها:

– تحديد الهدف نقطة انطلاق للمسألة ، علماً أنه قد تظهر معادلات من درجات مختلفة في نفس الأنموذج ، وهذا ما يفترض تجزئة المسألة إلى مسائل جزئية مرتبطة ضمن شروط مفروضة ، بمعنى آخر يمكن أن تضم المسألة عدة أهداف وظيفية.

– المصاريف الناتجة من التعامل مع أشعة عشوائية مثل: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots \dots, \theta_n)$ ستكون حتماً عشوائية.

– يجب التعامل مع المسألة بضمانة محددة وبالتالي بمردود اقتصادي أفضل ضمن فترة عمل مقسمة إلى أقسام بحيث يُعلم في نهاية كل فترة المردود والمطلوب من الماء بشكل مستمر .

نفرض أن:

– مدة العمل أو التشغيل (باليوم)

– (k) ; $(k = \overline{1,N})$: مردود المحطة خلال الفاصل الزمني k .

– v^0 : سعة المجمّع الأولية (تعطى بشكل عام أكبر مما هو مطلوب).

– $x(k)$: كمية الماء الموجودة في الخزان (مجمّع الماء) في كل لحظة k.

– $\pi(k)$: الكمية المطلوبة من الماء في اللحظة k.

عندئذٍ:

$$x(k) = x(k-1) + w(k) - \pi(k) \ , \ k = \overline{1,N}$$

حيث:

$$0 \le x(k) \le v^0 \ , k = \overline{1,N}$$

ونفرض أيضاً أنَّ:

$y^+(k)$ – كمية الماء المتزايد(increase) في كل لحظة $k = \overline{1,N}$

$y^-(k)$ – كمية الماء المتناقص(decrease) في كل لحظة $k = \overline{1,N}$

بالتالي يكون:

$$y^+(k) = \begin{cases} x(k) - v^0 \ , \ x(k) > v^0 \\ 0 \ , \ \text{في الحالة المعاكسة} \end{cases}$$

$$y^-(k) = \begin{cases} -x(k) \ , \ x(k) < 0 \\ 0 \ , \ \text{في الحالة المعاكسة} \end{cases}$$

ومن المنطقي عندئذٍ أن يكون الحجم الضروري للخزان هو :

$$v^{Necess.} = \begin{cases} v^0 - v^{min} \ ; \ \sum_{k=1}^{N} y^-(k) = 0 \\ v^0 + \sum_{k=1}^{N} y^-(k) \ ; \ \sum_{k=1}^{N} y^-(k) > 0 \end{cases}$$

حيث: $v^{\min} = min_k \ x(k)$: أصغر كمية من الماء في الخزان خلال الفترة $(1,N)$.

إن تحليل مسألة إيجاد القيم المثلى لمتغيرات المحطة التي تعتمد الطاقة الشمسية في عملها للتزويد بالماء العذب، تُحوَّل لمسألة ديناميكية عشوائية لتخطيط الإنتاج والاحتياطي ، يمكن صياغتها بالحالة العامة بالشكل التالي:

يُحدَّد المصدر ويُطلَب إيجاد الدالّة الهدفية ضمن بعض المؤثرات العشوائية ، بحيث تكون فترة التحكم كافية لأداء الوظيفة النوعية للمحطة وبأقل تكلفة متوقعة.

وبالتالي لتشكيل الأنموذج: $G(k)\ ,k=\overline{1\ ,N}$ الخاص بالإنتاج النوعي للمحطة التي تعتمد الطاقة الشمسية في عملها، يمكن استخدام العلاقات التالية [3]:

$$:(3)\quad \begin{aligned} G(k) &= \eta_c\,\bar{Q}\ (k)\\ \bar{Q}(j) &= F'\,.(\bar{\tau}_\alpha)_э\,.Q_0(k).max[0\ ,C_s(k)-C_s'(k)]\\ Q_0(k) &= \ell_1+\ell_2\cos(2\pi\frac{k-173}{365})\\ C_s(k) &= C_s^{min}(k)+\alpha_3\left(C_s^{max}(k)-C_s^{min}(k)\right)\\ C_s^{min}(k) &= \ell_3\left(1-\cos(2\pi\frac{k}{365})\right) \end{aligned}$$

حيث:

η_c – معامل الكفاية الكلي لتحول الطاقة الشمسية.

$\bar{Q}(k)$ – الحرارة النوعية الكافية الناتجة من المجمِّع الشمسي ، (ميكا جول/ م^2. يوم).

F' – معامل التحويل الحراري.

$(\bar{\tau}_\alpha)$ – معامل مقدرة الامتصاص.

$Q(k)$ – تدفق الطاقة الشمسية خارج الغلاف الجوي، (ميكا جول/ م^2. يوم).

$C_s(k)$ – معامل الرؤية (نسبة تدفق الإشعاع الشمسي$F(k)$ عند سطح الأرض إلى تدفقه في الغلاف الجوي).

$C_s'(k)$ – القيمة الحرجة لمعامل الرؤية.

$C_s^{min}(k)$ – القيمة الصغرى لمعامل الوضوح (الرؤية).

$C_s^{max}(k)$ – القيمة العظمى لمعامل الوضوح (الرؤية).

$\ell_1\ ,\ell_2\ ,\ell_3$ – بارامترات تتعلق بخط العرض φ .

α_3 – عدد موزع بانتظام على المجال $(0,1)$.

وحسب [3]:

$$:(4)\quad \begin{cases} \ell_1(\varphi)=37-0.2\ \varphi\\ \ell_2(\varphi)=22.3-0.4\ \varphi\\ \ell_3(\varphi)=1.24-0.4\ \varphi\\ C_s'(\delta(k))=0.454-0.16\delta(k)+0.09\delta^2(k) \end{cases}$$

حيث: $\delta(k)=\frac{K-29}{61}$

ولأجل مكان محدد يمكن اعتبار: $C_s^{max}(k)=const$

بشكل خاص من أجل: $\varphi=30^\circ\to55^\circ$ يكون [3] :

$$C_s^{max}(k)=-0.01984\ \varphi+1.6497$$

بهذا الشكل الغاريتم (خوارزمية حساب) $G(k)\ ,k=\overline{1,N}$ بحسب العلاقات $((3)-(4))$ يتم بالشكل التالي:

تتحدد قيم F' و $(\overline{\tau}_\alpha)_\ni$ و $C_s^{max}(k)$ و η_c وخط العرض φ ، ثم حسب العلاقات (4) تتحدَّد قيم المتغيرات $(\ell_1\&\ell_2\&\ell_3)$ ، وبالتالي تُحسب القيم: $C_s'(k)$ و $C_s^{min}(k)$ و $Q_0(k)$ ، و α_3 .

وبعد ذلك يتم حساب $C_s(k)$ و $\overline{Q}(k)$ ثم $G(k)$. وبنفس الطريقة لأجل كل $k = \overline{1,N}$. هذه الخوارزمية تمثل إحدى طرق حساب المردود.

هناك مسلك آخر(طريقة أخرى) لصياغة مردود المحطة الشمسية تعتمد على التحليل الإحصائي، إذ بيَّنت التجارب [5] أن مردود المجمع الشمسي يتعلق بعوامل منها:(كثافة الإشعاع – درجة حرارة الهواء – درجة حرارة الوسط الخارجي – سرعة الرياح).

إذ إن المردود الساعي يعطى بالعلاقة:

$$G = \eta \ \frac{Q}{r} \qquad : (5)$$

حيث:

η – معامل الكفاية للمحطة.

Q – مجمل الإشعاع الشمسي الساقط خلال ساعة.

r – الحرارة الكامنة للتبخر.

شريطة أن يكون الإشعاع الشمسي ودرجة حرارة الوسط الخارجي دائمة .

وبالواقع إن المردود اليومي للمجمّع الشمسي يتعلق بشكل أساسي بالطاقة الشمسية اليومية الساقطة، وطبعاً السبب الأساسي في تغير نظام سقوط الأشعة الشمسية هو تغير وضع الأرض بالنسبة للشمس، هذا ومن الممكن القيام بتجارب واقعية لمعرفة كثافة الأشعة الشمسية الساقطة لكل الفصول ومن أجل فترات زمنية محددة.

وقد تبين حسب [4] أن توزيع كثافة الإشعاع (خلال شهر واحد) تعطى بمعادلة بيرسون الأولى الآتية:

$$y = cx^m \ (\ell - x)^n \qquad : (6)$$

(هذا في فصلي الصيف والشتاء).

وتعطى بمعادلة بيرسون الثانية الآتية:

$$y = p_1 c_1 x_1^{m1}(\ell_1 - x_1)^{n1} + p_2 c_2 x_2^{m2}(\ell_2 - x_2)^{n2} \qquad : (7)$$

(من أجل الخريف والربيع).

حيث: $p_1 > 0 \ , \ p_2 > 0 \ , p_1 + p_2 = 1$

$x^{(1)} , x^{(2)} , \dots \dots , x^{(k)}$ – قيم الملاحظة لفصلي الصيف والشتاء.

$x_1^{(1)} , x_1^{(2)} , \dots \dots , x_1^{(k)}$ – قيم الملاحظة لفصلي الخريف والربيع.

$x_2^{(1)} , x_2^{(2)} , \dots \dots , x_2^{(k)}$ – قيم الملاحظة لفصلي الخريف والربيع(عدم وجود غيوم).

وقد اقترح الباحث الدكتور: ساليف في نفس المرجع [4] استبدال العلاقة (6) بالعلاقة الآتية:

$$y = c \left(\frac{E_{max} - E}{E_{max} - \bar{E}}\right)^m \left(\ell - \frac{E_{max} - E}{E_{max} - \bar{E}}\right)^n \qquad : (8)$$

حيث: E – قيمة الإشعاع الشمسي.

$\bar{E}$ – متوسط الإشعاع الشمسي خلال شهر .

بالحقيقة ليس صعباً حساب هذه القيم في أي منطقة في سوريا.(هذا إن لم يكن محسوباً).

ولصياغة مردود المحطة التي تعتمد الطاقة الشمسية للتزويد بالماء العذب:

نعتبر أن المجموعة المدروسة مؤلفة من:

خزان الماء المالح – المجمِّع الشمسي – خزان الماء العذب – شبكة التوصيل.

من الطبيعي أن يتحدَّد المطلوب من الماء العذب مسبقاً، وعندما توجد كفاية بالماء العذب يمكن استخدام الفائض للسقاية ولحاجات أخرى (سقاية ماشية، أشجار مثمرة،...).

مع افتراض أن مصدر الماء المالح متوفر دون انقطاع.

ولنفترض أن الفترة مقسمة إلى($k;\ k=\overline{1,N}$) قسم، ويُطلب حساب قيم متغيرات النظام (المجموعة) بشكل أمثل. وهذه المسألة هي أحد الأشكال المختلفة لمسألة التحكم بالاحتياطي (المخزون) ، إذ في كل لحظة $k=\overline{1,N}$. تعتبر هذه العملية دالّة متعلقة بمتغيرات المجموعة وبشعاع عشوائي، لذلك فإنّ مردود المحطة والعجز والربح في المصادر تعتبر كلها متغيرات عشوائية.

وبالحقيقة تمثل هذه النماذج صنفاً خاصاً من النماذج الرياضية العشوائية.

لنفرض أن الكمية اللازمة(المطلوبة) من الماء العذب هي:

$\pi_k\ ;k=1,2,3,\dots,N$

ومتجه الحالة غير السالب هو:

$$x=(x_1,x_2,x_3)\geq 0 \qquad :(9)$$

شعاع يمثل وضع المجموعة.

حيث:

x_1– مساحة المجمع الشمسي.

x_2 – سعة مجمع الماء العذب.

x_3 – احتياطي الماء العذب، $(0\leq x_3\leq x_2)$.

وبفرض:$\pi_k;k=(\overline{1,N})$ قيم محددة (كمية الماء المطلوب في كل لحظة($k=(\overline{1,N}$)،

ولأجل كل k نفترض المتغيرات العشوائية التالية:

ω_k – مجمل الإشعاع الشمسي اليومي الساقط .

$g(\omega_k)x_1$ – مردود المحطة الشمسية ، م^3 / يوم.

W_k – كمية الماء العذب (م^3).

y_k^+ – مقدار التزايد في الماء العذب (م^3).

y_k^- – مقدار التناقص في الماء العذب (م^3).

لنفرض أن هذه القيم معرَّفة على الفراغ الاحتمالي التالي: $(\Omega\ ,\ F\ ,\ P)$

نفترض أيضاً أن:

d_k^+ – الربح الناتج من زيادة كل 1 م^3 ماء عذب (ل.س).

d_k^- – الخسارة الناتجة من نقص كل 1 م^3 ماء عذب (ل.س).

عندئذ تتشكل العلاقات الآتية:

$$W_{k+1}=max\{0;min[x_2\ ,\ W_k+g(\omega_k)x_1-\pi_k]\};\begin{cases}k=\overline{1,N-1}\\ W_1=x_3\end{cases} \qquad :(10)$$

$$y_k^+=max\{0\ ,W_k+g(\omega_k)x_1-\pi_k-x_2\}\ ,k=\overline{1,N}\ ,$$

$$y_k^- = max\{0 ,\pi_k - W_k - g(\omega_k)x_1\} ,k = \overline{1,N} \quad : \qquad :(11)$$

من الضروري تشكيل الأنموذج الأمثل للمجموعة كلّها انطلاقاً من وجهة نظر اقتصادية ، وفي حالتنا يمكن تمثيل وجهة النظر هذه بالعلاقة:

$$F^{\circ}(x) = \ni + \varepsilon K + R + E(U) \rightarrow min$$

حيث:

$\ni$ – نفقات الاستثمار.

R – مصاريف لمرة واحدة.

K – رأس المال المستثمر.

ε – المعامل الفعّال لرأس المال.

$E\ (U)$ – التوقع الرياضي للخسارة الناتجة من الخلل في التخطيط.

في الواقع العملي يكون: $\ni = \propto K$ حيث: $\propto = 0.1$ بحسب معهد الطاقة الشمسية في جمهورية تركمانيا السوفييتية [4] (مع ملاحظة أن المناخ هناك شبيه بالمناخ في سوريا إلى حدٍ كبير).

من الواضح أن:

$$U = \sum_{k=1}^{N}[(d_k^- \, y_k^- - d_k^+ \, y_k^+)]$$

وبالتالي يصبح الأنموذج العشوائي بالشكل:

$$F^{\circ}(x) = (\propto + \varepsilon)K(x) + R(x) + E_\omega \sum_{k=1}^{N}(d_k^- \, y_k^- - d_k^+ \, y_k^+) \rightarrow \underbrace{min}_{X} \qquad :(12)$$

والشروط:

$$W_{k+1} = max\{0; min[x_2 , W_k + g(\omega_k)x_1 - \pi_k]\}; \begin{cases} k = \overline{1, N-1} \\ W_1 = x_3 \end{cases}$$

$$y_k^+ = max\{0 ,W_k + g(\omega_k)x_1 - \pi_k - x_2\} ,k = \overline{1,N} \ ,$$

$$y_k^- = max\{0 ,\pi_k - W_k - g(\omega_k)x_1\} ,k = \overline{1,N}$$

بالإضافة إلى الشرط الطبيعي التالي: $X = \{x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ 0 \leq x_3 \leq x_2\}$

لكن المصاريف على المحطة الكلية تتألف من:

– مصاريف لبناء المجمّع الشمسي ونرمز لها بالرمز: $P_1(x_1)$.

– مصاريف لبناء خزان الماء العذب ونرمز لها بالرمز: $P_2(x_2)$.

– مصاريف للشبكة (مصاريف ثابتة) ونرمّزها بـ: P_0. (وقد تُضاف مباشرة إلى مصاريف بناء المجمّع والخزان)

هذا يعني:

$$K = P_1(x_1) + P_2(x_2)$$

أضف إلى أنه توجد نفقات (مصاريف) لملء خزان الماء العذب في خطوة أولية ونرمّزها بـ: $P_3(x_3)$ ، وهذا يعني أنَّ: $R = P_3(x_3)$.

علماً أنه من الطبيعي اعتبار $R(x)K(x)$, أنها دوال ملساء بالمتغير العشوائي x .

وبالحالة العامة يتمثل الأنموذج الرياضي الأولي في إيجاد القيمة المثلى للشعاع $x = (x_1, x_2, x_3)$ التي تجعل قيمة الدالة الهدفية $F^{\circ}(x)$ أقل ما يمكن أي:

$$F^{\circ}(x) = (\propto + \varepsilon)[P_1(x_1) + P_2(x_2)] + P_3(x_3) +$$

$$+E_{\omega}\sum_{k=1}^{N}(d_k^- \, y_k^- - d_k^+ \, y_k^+) \rightarrow \underset{X}{\underbrace{min}} \quad : (13)$$

وذلك عند الشروط:

$$W_{k+1} = max\{0; min[x_2\,,\, W_k + g(\omega_k)x_1 - \pi_k]\}; \begin{cases} k = \overline{1, N-1} \\ W_1 = x_3 \end{cases}$$

$$y_k^+ = max\{0\,, W_k + g(\omega_k)x_1 - \pi_k - x_2\}\,, k = \overline{1, N}\,,$$

$$y_k^- = max\{0\,, \pi_k - W_k - g(\omega_k)x_1\}\,, k = \overline{1, N}$$

$$X = \{x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ 0 \le x_3 \le x_2\}$$

وانطلاقاً من [1],[2] وبناءً على نظرية التقارب الموضعي لطريقة التدرج العشوائي العام في كلا المرجعين يمكن استخدام طريقة مسقط التدرجات العشوائية العامة[1] لأجل مسائل النمذجة الرياضية غير المحدبة وغير الملساء.

من عيوب هذا الأنموذج أنه لم يأخذ في الاعتبار النقص في كمية الماء المالح، إذ يتطلب نقص الماء المالح مصاريف إضافية.

أضف إلى أن البناء الأمثل للمجمع الشمسي يجب أن يُبنى انطلاقاً من مطلبين أساسيين:

– اقتصادي (الخسارة أو التكلفة أقل ما يمكن)،

– احتمال عمل المجمّع أو المحطة يجب ألا يقل عن نسبة معينة.(نريد تحسين أداء الأنموذج بإدخال فكرة الاحتمال والتوقع الرياضي).

لذلك يمكن تمثيل المقولة الاقتصادية السابقة بالشكل:

$$F^{\circ}(x) = \ni + \varepsilon\, K + R + E(U) \rightarrow \min \quad : (13')$$

ضمن الشرط:

$$p \ge p_n \quad : (14)$$

حيث:

p – احتمال أن تعمل المحطة بدون توقف.

p_n – مقدار معطى (ثابت).

يمكن إعطاء p و p_n القيم المناسبة، مثلاً:

نعتبر:

$p_n = 0.95$ في حالة استخدام الماء العذب لسكان منطقة معينة (أو أية قيمة مناسبة أخرى).

$p_n = 0.9$ في حالات أخرى (أمور زراعية – سقاية – ري – ...) (أو أية قيمة مناسبة أخرى).

بالواقع قد يحدث خلل بالشرط المذكور أعلاه ، لكن لم نأخذ بالاعتبار كيفية تصحيح هذا الخلل ضمن فترة العمل، وهو أحد عيوب المسألة . وبأخذ التوقع الرياضي نخفّف من هذا النقص. سنستخدم الشرط التالي بدلاً من الشرط (14):

$$E(\bar{y}) \le \varepsilon_n \pi \quad : (15)$$

حيث:

$E(\bar{y})$ – التوقع الرياضي لكمية الماء العذب خلال فترة العمل.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_n &= 1 - p_n \\ \pi &= \textstyle\sum_{k=1}^{N} \pi_k \end{aligned}\right\}$$

بالإضافة إلى الشرط الطبيعي التالي:

$$X = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq x_3 \leq x_2\} \quad :(16)$$

وإذا فرضنا الآن أنَّ:

c_1 – كلفة 1 م^2 من المجمّع الشمسي.

c_2 – ثابت.

c_3 – الكلفة النوعية لملء خزان الماء العذب (أو كلفة تأمين 1 م^3 من الماء العذب).

فإنه يمكن أن نكتب: $K = p_1(x_1) + p_2(x_2)$ (نفقات بناء المجمع + الخزان).

حيث:

$$p_1(x_1) = c_1 x_1 \quad :(17)$$

$$p_2(x_2) = c_2(x_2)^n \quad , \quad 0 < n < 1 \quad :(18)$$ (حسب المرجع [6]).

وبالضبط $n \approx 0.75$ بحسب المرجع [6]

أضف إلى أن:

$$P_3(x_3) = c_3 x_3 \quad :(19)$$ (مصاريف لمرة واحدة لملء خزان الماء العذب).

ونعتبر:

$$\ni = \propto K \,; (\propto = 0.1) \quad :(20)$$ (بحسب معطيات معهد الطاقة الشمسية في تركمانيا).

وبفرض أنَّ:

$\theta_k , k = \overline{1, N}$ – شعاع عشوائي (يمثل مجمل الطاقة الشمسية الساقطة في الفترة k)

$g(\theta_k)$ – مردود 1 م^2 من المحطة الشمسية.

يكون:

$$g(\theta_k) = c_4 \theta_k \quad :(21)$$

حيث: c_4 ثابت موجب يتعلق بتركيبة المجموعة الشمسية.

بالإضافة إلى الرموز: d_k^+ ، d_k^- حيث نعتبر: $d_k^+ \ll d_k^-$ ، كما نعتبر أن: $d_k^+ = 0$ في حال عدم الاستفادة من زيادة الماء العذب.

وفي حال إحضار الماء نعتبر: $d_k^- = c_3$ ، كذلك:

$$0 \leq W_k \leq x_2 \quad , W_1 = W \quad :(22)$$

وبالإضافة إلى الرموز: y_k^- , y_k^+ ، وبالحالة العامة يكون:

$$W_{k+1} = W_k + x_1 g(\theta_k) - \pi_k - y_k^+ + y_k^- \quad ; y_k^+ \geq 0 \,, y_k^- \geq 0 \quad :(23)$$

فإذا رمزنا بـ :

$$\varphi_k = W_k + x_1 \, g(\theta_k) - \pi_k \quad :(24)$$ – دالة مساعدة.

يكون:

$$\begin{cases} y_k^+ = max\{0 , \varphi_k - x_2\} \\ y_k^- = max\{0 , -\varphi_k\} \end{cases} \quad :(25)$$

ومن أجل φ_k يمكن أن نكتب:

$$\varphi_k = max[0, min(x_2, \varphi_{k-1})] + x_1 \, g(\theta_k) - \pi_k \quad :(26)$$

وبدلالة الرموز y_k^- و y_k^+ ، فإن العلاقة (القيد) (15) يمكن أن تُكتب بالشكل:

$$E\sum_{k=1}^{N}(y_k^- - \varepsilon_n \pi_k) \le 0 \quad :(27)$$

أي المجمع الشمسي يعمل ضمن هذا الشرط.

وبالمثل فإن $E(U)$ الواردة في العلاقة $(13')$ يمكن كتابتها بالشكل:

$$E(U) = E\sum_{k=1}^{N}(d_k^- y_k^- - d_k^+ y_k^+) \quad :(28)$$

ويتحول الأنموذج عندئذٍ إلى الشكل:

$$F^{\circ}(x) = (\propto + \varepsilon)[c_1 x_1 + c_2 (x_2)^n] + c_3 x_3 + \\ + E\sum_{k=1}^{N}(d_k^- y_k^- - d_k^+ y_k^+) \to \underset{X}{\underbrace{min}} \quad :(29)$$

مع الشروط:

$$W_{k+1} = W_k + x_1\, g(\theta_k) - \pi_k - y_k^+ + y_k^- \quad ; y_k^+ \ge 0\,,\ y_k^- \ge 0$$
$$y_k^+ = max\{0\,, \varphi_k - x_2\}$$
$$y_k^- = max\{0\,, -\varphi_k\}$$
$$\varphi_k = W_k + x_1\, g\,(\theta_k) - \pi_k \quad :(1.36)$$
$$X = \{x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ 0 \le x_3 \le x_2\}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

النتيجة الأساسية في هذا البحث هي إيجاد أنموذج رياضي عشوائي واقعي بشروط احتمالية منطقية، ويمكن تعميم دراسة مثل هذه النماذج على مسائل مختلفة وبعدد مماثل أو أكبر من المتغيرات، كما نقترح استخدام طريقة التدرجات العشوائية العامة لإيجاد حلولها المثلى.

المراجع:

[1] Yrmoliev. U.M. Methods of stochastic programming problems of planning reserves - cybernetics ,1999,320 c.
[2] MIHALEVECH V.C. GUPAL A.M. NORKIN V.I. nonconvex optimization techniques - m. science 1997. 280 S.
[3] NIKIFOROV V.A. matematical simple model of solar collector heating buildings-heliotekhnika .1983. №1, pp 56-80
[4] Salieva P. B. Analicheskoe representation of the laws of distribution structures energetic solar radiation regime .- Heliotekhnika, 1979, №6
[5] BAYRAMOV R.B. SEYITKURBANOV C. desalination of water via solar energy.- Ashgabat, L., 1977 148c.
[6] KUTLEEV K.K., SEYITKURBANOV C. SEKAEV V. A. , URYASEV S.P. calculation method of autonomous systems water and electricity to the helio-wind power plants. Ashgabat.
NGOs * Sun * Turkmenian Academy of Sciences, 1987 35C.