مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

استخدام بعض طرائق التحليل التابعي
في دراسة الحركات الصغيرة لجملة هيدروديناميكية

الدكتور وديع علي*
الدكتور محمّد سويقات**
خضر سليمان***

(تاريخ الإيداع 6 / 7 / 2014. قُبِل للنشر في 29 / 9 /2014)

□ ملخّص □

يُعنى هذا البحث بدراسة الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل اللزجة الشعرية في أنبوب دوراني ،أي البرهان على وجود ووحدانية حل لمسألة القيمة الحدّية الابتدائية التي تصف هذه الحركات ، من خلال تحويل المسألة إلى مسألة كوشي لها الشكل الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + f\,(t),\ \ 0 \le t \le T \quad ,\, x\,(0) = x^{\,0}$$

حيث $f\,(t)$ دالّة مستمرة تأخذ قيمها في فضاء هلبرت Eو A مؤثر معرف في هذا الفضاء، وذلك باستخدام طرائق في التحليل التابعي (مثل الإسقاط المعامد، مقاربة مؤثر،....)

الكلمات المفتاحية: جمل هيدروديناميكية ، فضاء هلبرت ، مقاربة مؤثر ، المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.
***طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (5) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (5) 2014

Using some Functional Analysis methods in studying small motions of Hydrodynamicssystem

Dr. Wadee Ali*
Dr. Mohamed Souecatt**
Kheder Souleman***

(Received 6 / 7 / 2014. Accepted 29 / 9 /2014)

ABSTRACT

This Work suggests a study of small motions of system of capillary viscous fluids in rotation vessels ,i.e: to prove the unique solvability theorem of the initial boundary value problem that describe these motions. For that we reduced to Cauchy problem that has the form:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),\ 0 \le t \le T \quad , x(0) = x^0$$

Where $f(t)$ is a continuous function with values in the Hilbert space E, A is an operator on E,

By using Functional analysis methods (Orthogonal projector, Operator approach,…).

Key Words: Hydrodynamical systems , Hilbert space, Operator approach, differential equations in Hilbert space.

*Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.
** professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.
***Postgraduate student, , Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

دُرست مسائل الحركات الصغيرة لسائل لزج في أنبوب بشروط قريبة من شروط انعدام الوزن في أواخر القرن العشرين في عدة ابحاث .

طرائق المؤثرات المستخدمة في هذه المسائل موضّحة بالتفصيل في المراجع $[1,2,3]$. قام العالم Kopachevsky في $[4,5]$ بدراسة الحركات الصغيرة لسائل لزج شعري في أنبوب دوراني، إذ برهن على وجود حل قوي وحيد لمسالة القيمة الحدية الابتدائية التي تصف هذه الحركات.

سنعالج في هذا البحث مسألة الحركات الصغيرة لـ m سائل لزج غير مختلط ويتمتع بالخاصة الشعرية في أنبوب يدور بشكل منتظم وبسرعة زاوية ثابتة ، وسنشكل بدايةً مسألة القيمة الحدية الابتدائية التي تصف مسألتنا بالاستفادة من المراجع $[1,2,3,4]$، ثم نحوّل مسألة القيمة الحدية الابتدائية إلى مسألة كوشي من أجل جملة من معادلات المؤثرات التفاضلية بتطبيق بعض مؤثرات الإسقاط ، أخيراً أثبتنا أنّ مسألة كوشي المذكورة أعلاه تؤول إلى مسألة كوشي في فضاء هلبرت من الشكل :

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + f\,(t),\;\; 0 \le t \le T \quad , x\,(0) = x^{0} \qquad (1)$$

وهذا يسمح لنا بالبرهان على وجود وحدانية حلّ قوي لمسألة القيمة الحديّة الابتدائية.

أهمية البحث وأهدافه :

يهدف البحث إلى دراسة مسألة الحركات الصغيرة لمجموعة من السوائل اللزجة الشعرية في أنبوب دوراني باستخدام طريقة الإسقاط على منشور متعامد لفضاء هلبرت لتحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية الموافقة لمسألة الحركات الصغيرة على مسألة كوشي في فضاء هلبرت من الشكل (1) ، والبرهان على وجود ووحدانية الحل لهذه المسألة.

تكمن أهمية البحث في تطبيقاته العملية في حلّ الكثير من القضايا العلمية الفيزيائية والهندسية.

طرائق البحث ومواده:

نبدأ أولاً بتشكيل مسألة القيمة الحدّيّة الابتدائية الموافقة لمسألة الحركات الصغيرة لسائل لزج شعري في أنبوب دوراني بالاعتماد على المراجع $[1,2,3,4]$، ثم نعطي بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي تستخدم

في تحويل مسألة القيمة الحدية الابتدائية إلى مسألة كوشي في فضاء هلبرت من الشكل (1)،وبرهان النتائج التي حصلنا عليها.

تشكيل مسألة القيمة الحدية الابتدائية:

نفرض في حالة السكون أنّ أنبوب مملوء بجملة مؤلفة من mمن السوائل اللزجة الشعرية التي كثافاتها $\rho_i\,, i = \overline{1,m}$ بحيث تكون $\rho_1 > \rho_2 > ..... > \rho_m > 0$ وتدور بشكل منتظم بعضها مع بعض،و مع الحاوية بسرعة زاوية $\vec{\omega}_0 = \omega_0\,\vec{e}_3$ ، حيث $\vec{e}_3$ متّجه الواحدة على محور الدوران $O\,x_3$.حيث $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة إحداثية ديكارتية مرتبطة بالأنبوب . ليكن حقل القوى الخارجية $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$ هو حقل الجاذبية . نرمز للمنطقة المملوءة بالسائل في وضع التوازن بـ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

في هذه الحالة يكون الضغط $P_{0,k}(x)$ في كل سائل $[2,4]$:

$$P_{0,k}(x)=-\rho_k g x_3+\tfrac{1}{2}\rho_k\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)+c_k \quad in\,\Omega_k\,,k=1....m \tag{2}$$

و c_k ثوابت حقيقية ، و Ω_k منطقة مشغولة بسائل k في حالة التوازن.

تعطى معادلة السطح Γ_i لسائلين متجاورين بالشكل الآتي من خلال مساواة الضغط فيهما:

$$x_{3,i}=\frac{1}{2g}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)+\frac{c_i-c_{i+1}}{g(\Delta\rho)_i}\ ;\ (\Delta\rho)_i:=\rho_i-\rho_{i+1}>0\ ,i=1...m-1 \tag{3}$$

حيث c_i ثوابت يمكن إيجادها من خلال الشروط $m-1$ لحجم كل منطقة Ω_k مشغولة بسائل k في الحالة القلقة (غير المستقرة):

$$\int_{\Omega_k} d\Omega_k =: mes\ \Omega_k = V_k\ \ ;\ k=1,2,...,m \tag{4}$$

ويتحقق شرط لابلاس على السطح Γ_i : $[2,4]$

$$P_{0,i}(x)-P_{0,i+1}(x)=-\sigma_i(k_{1,i}+k_{2,i})\quad (on\,\Gamma_i)$$

حيث σ_i معامل توتر السطح الموجب Γ_i بين السائل والغاز، و $k_{1,i}\,,\,k_{2,i}$ التقوسات الأساسية للسطح Γ_i .

فإذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقة (1) نحصل على المعادلة الآتية:

$$-\sigma_i(k_{1,i}+k_{2,i})=-g(\Delta\rho)_i\ \omega_0^2(x_1^2+x_1^2)+(c_i+c_{i+1}),i=1,2,....m-1 \tag{5}$$

و يتحقق شرط القيمة الحدية دوربِ – يونغ $(Durpe-Young)$ على السطح $\partial\Gamma_i$

$$\sigma_i\cos\delta_i=\sigma_{1,i}-\sigma_{0,i}\quad on\,\partial\Gamma_i\ ;i=1,2,....,m-1 \tag{6}$$

حيث $0\le\delta_i\le\pi$ ثنائية الاحتكاك بين جدار الأنبوب والسطح Γ_i، $\sigma_{1,i}$ معامل توتر السطح بين الغاز وجسم الانبوب، $\sigma_{0,i}$ معامل توتر السطح بين السائل و جسم الانبوب.

تُعرف المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية للدوالّ $x_{3,i}=f_i(x_1,x_2)$ مع الشروط $(4),(6)$ مسألة قيمة حديّة لاخطية تهدف إلى إيجاد معادلة السطح المتوازن Γ_i. لنرمز للزوجة الحركية للسائل بـ $\mu_k:=\nu\rho_k^0\,,k=1,2,....,m$ حيث ν معامل اللزوجة الحركية ووسيط المسألة أيضاً، و ρ_k^0 ثوابت موجبة.

ندرس الحركات الصغيرة لجملة (الأنبوب + مجموعة السوائل) ، حيث يمكن التعبير عن الضغط لكل سائل بالشكل : $P_k(t,x)=P_{0k}(t,x)+p_k(t,x),\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega_k$ ، حيث $P_{0k}(t,x)$ الضغط في وضع التوازن و $p_k(t,x)$ ضغط ديناميكي.

عندئذٍ نحصل على جملة معادلات $(Navier-Stokes)$ الخطية من أجل حقل السرع $u^k(t,x)$ التي تصف حركة السائل k في الجملة الإحداثية $O\,x_1x_2x_3$ والضغط الديناميكي $p_k(t,x)$: $[2,4]$

$$\frac{\partial\vec{u}^k}{\partial t}-2\omega_0\vec{u}^k\times\vec{e}_3=-\frac{1}{\rho_k}\nabla p_k+\nu\Delta\vec{u}^k+\vec{f}\ \ ,div\ \vec{u}^k=0\ in\,\Omega_k\ ,$$

$$\vec{u}^k(t,x)=0\ \ on\,S_k\ \ ;k=1,2,....,m \tag{7}$$

حيث $S_k=S\cap\overline{\Omega_k}$ القسم الموافق لجدار الأنبوب S ، و $f=f(t,x)$ حقل القوى الخارجية الصغير.

لنأخذ الجملة الإحداثية المنحنية $(Curvilinear)$ $O_i\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ في جوار السطح Γ_i، لإيجاد الشروط الحركية والديناميكية .

فنجد الشرط الديناميكي من أجل كل سائل: $[2,4]$

$$\mu_i(u^i_{j,3}+u^i_{3,j})=\mu_{i+1}(u^{i+1}_{j,3}+u^{i+1}_{3,j})\ \ on\ \Gamma_i\ \ ;j=1,2,i=1,2,...,m-1 \qquad (8)$$

$$(-p_i+2\mu_i u^i_{3,3})-(-p_{i+1}+2\mu_{i+1}u^{i+1}_{3,3})=-L_{\sigma_i}\varsigma_i=:\sigma_i\Delta_{\Gamma_i}\varsigma_i-a_{\Gamma_i}\varsigma_i \qquad (9)$$

$$a_{\Gamma_i}:=-\sigma_i(k^2_{1,i}+k^2_{2,i})+(\rho_i-\rho_{i+1})[g\cos(\vec{n}_i,\vec{e}_i)-\omega_0^2 r\cos(\vec{n}_i,\vec{e}_r)]$$

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ i=1,2,....,m-1$$

حيث $u^i_{j,3}:=\dfrac{\partial u^i_j}{\partial\zeta_3},u^i_{3,j}:=\dfrac{\partial u^i_3}{\partial\zeta_j},u^i_{3,3}:=\dfrac{\partial u^i_3}{\partial\zeta_3}$ ، Δ_{Γ_i} مؤثر لابلاس – بيلترامي على الدوال المعرفة على Γ_iوهو مؤثر تفاضلي و $\vec{n}_i$ الناظم على Γ_i و $\vec{e}_r$ متجه الوحدة للمحور Or للجملة الإحداثية الأسطوانية $Or\theta x_3$المعرّفة من خلال الجملة الإحداثية الديكارتية $Ox_1x_2x_3$.

بفرض أنّ $\zeta_i^3=\varsigma_i(t,\hat{\zeta}_i),\ \hat{\zeta}_i:=(\zeta_i^1,\zeta_i^2)$ ترمز إلى الإزاحة الرأسية للسطح الحر $\Gamma_i(t)$ من السطح الافقي المتوازن Γ_i عندئذٍ نحصل على الشرط الحركي:

$$\frac{\partial\varsigma_i}{\partial t}=u^i_{n_i}:=\vec{u}^i.\vec{n}_i\ ,\vec{u}^i=\vec{u}^{i+1}\ \ (on\ \Gamma_i)\ ;i=1,2,...,m-1 \qquad (10)$$

$$\varsigma_i(t,\hat{\zeta}_i)=0\ \ (on\ \partial\Gamma_i=\Gamma_i\cap S)\ ,\int_{\Gamma_i}\varsigma_i\,d\,\Gamma_i=0$$

أخيراً، نكتب شروط القيمة الابتدائية عندما $t=0$:

$$\vec{u}^k(0,x)=\vec{u}^{k,o}(x)\ ,k=1,2,..,m,\ \varsigma_i(0,\hat{\zeta}_i)=\varsigma_i^0(\hat{\zeta}_i),i=1,2,....,m-1 \qquad (11)$$

والمطلوب هو إيجاد حل مسألة القيمة الحدية– الابتدائية $(7)-(11)$، أي إيجاد حقول السرع $\vec{u}^k(t,x)$ وحقول الضغط $p_k(t,x)\ ;k=\overline{1,m}$ ، والدوال $\varsigma_i(t,x);i=\overline{1,m-1}$.

تعاريف ومبرهنات أساسية:

تعريف (1): $[6]$

نقول عن دالة $\varphi(t)$تأخذ قيمها في H إنّها تحقق شرط هولدر في المجال $[0,T]$ إذا وجدت ثوابت مثل $\alpha\in(0,1],c_\alpha>0$ تحقق:

$$\|\varphi(t)-\varphi(s)\|_H\le c_\alpha|t-s|^\alpha,0\le s\le t\le T$$

تعريف (2): $[6]$ يقال عن الأسرة $U=\{U(t),t\in R^+\}$ من المؤثرات إنّها تشكل شبه زمرة إذا تحقق:

1. الدالّة $U(t)x$ مستمرة من أجل كل $x\in E$.
2. $U(t+\tau)=U(t)U(\tau);t,\tau\in R^+$
3. $U(0)=I$

تعريف (3): $[6]$ يقال عن شبه زمرة إنها تحليلية إذا كان من أجل كل $x \in E, y \in E^{*}$ ، فإنّ الدالة $< U(.)x, y >$ تحليلية في القطاع $\sum_{\theta} = \{z \in \mathbb{C}, z \neq o; |\arg z| < \theta, 0 < \theta \leq \pi\}$

مبرهنة (1): $[6]$

بفرض أنّ المؤثر A يولّد شبه زمرة تحليلية (analytic semigroup) في المسألة (1)، و $x_0 \in D(A)$، وبفرض f تحقق شرط هولدر. عندئذٍ للمسألة (1) حلّ $x(t)$ قوي وحيد على المجال $[0,T]$.

تعريف (4): $[2]$

تشكل المجموعة

$$\left\{\hat{u} := \{\vec{u}^k(x)\}_{k=1}^{m}; \sum_{k=1}^{m} \rho_k \int_{\Omega_k} \left|\vec{u}^k\right|^2 d\Omega_k < \infty\right\} \qquad (12)$$

فضاء هلبرت ونرمز لها بـ $\hat{L}_2(\Omega)$ مع العلم أنّ الجداء الداخلي فيه معرّف بالعلاقة:

$$\left(\hat{u}, \hat{v}\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m} \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}^k . \vec{v}^k \, d\Omega_k \qquad (13)$$

مبرهنة (2): $[2]$

لتكن Ω منطقة مقسمة إلى Ω_k منطقة جزئية و $\partial\Omega_k$ (محيط المنطقة Ω_k، $k = \overline{1,m}$) تحقق شروط ليبشتز $[2]$. عندئذٍ يكون:

$$\hat{L}_2(\Omega) := \hat{G}_{0,\Gamma} \oplus \hat{J}_{0,S}(\Omega) \qquad (14)$$

حيث:

$$\hat{G}_{o,\Gamma} := \overset{m-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \vec{G}_{0,\Gamma_i} = \left\{\begin{array}{l} \hat{w} := \{\vec{w}^k\}_{k=1}^{m} \in \vec{L}_2(\Omega_k); \{\vec{w}^k\}_{k=1}^{m} = \{\nabla \vec{\varphi}^k\}_{k=1}^{m} \\ ; \vec{\varphi}^i - \vec{\varphi}^{i+1} = 0 \ \ (on\,\Gamma_i) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

$$\hat{J}_{0,S}(\Omega) := \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \left\{\begin{array}{l} \hat{v} := \{\vec{v}^k\}_{k=1}^{m} \in \vec{L}_2(\Omega_k); div\, \vec{v}^k = 0 \ (in\,\Omega_k) \\ ; (\vec{v}^k)_n = 0 \ \ (on\,S_k) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

تعريف (5): $[2]$

إنّ المجموعة $\vec{H}^m(\Omega) := \{\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega) / D^{\alpha}\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m\}$ تشكل فضاء هلبرت ، مع العلم انّ الجداء الداخلي معرّف بالعلاقة:

$$\left(f, g\right)_{\vec{H}^m(\Omega)} := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} f(x) D^{\alpha} g(x) d\Omega$$

ملاحظة: ترمز $D^{\alpha}\vec{f}$ إلى المشتقات المعمّمة للدالّة $\vec{f}$ حتى المرتبة α.

خاصة (1): $[2]$

تشكل المجموعة $\vec{H}_0^{\,m}(\Omega) := \{\vec{f} \in \vec{H}^m(\Omega) / \Gamma_{\vec{f}} = 0\}$ فضاء جزئياً من الفضاء $\vec{H}^m(\Omega)$.

ملاحظة: ترمز $\Gamma_{\vec{f}}$ إلى قيمة الدالة $\vec{f}$ على الحد Γ .

خاصة (2) : $[2]$ تؤدي قوى اللزوجة إلى تبدد الطاقة ، وتحسب سرعتها بالشكل:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{E}(\hat{u},\hat{v}) := \sum_{k=1}^{m} \mu_k E_k(\vec{u}^k,\vec{v}^k) ; \mu_k E_k(\vec{u}^k,\vec{v}^k) := \tfrac{1}{2}\mu_k \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{3} \left|\tau_{ij}(\vec{u}^k)\right|^2 d\Omega_k \\ &;\tau_{ij}(\vec{u}^k) := \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right),\ i,j = 1,2,3 \quad ,k = \overline{1,m}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

خاصة (3) : $[2]$ إنّ المجموعة:

$$\begin{aligned}&\hat{J}^1_{0,S}(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) = \{\hat{u} := \{\vec{u}^k\}_{k=1}^m \in \vec{L}_2(\Omega_k); E(\vec{u}^k,\vec{v}^k) < \infty, \\ &div\, \vec{u}^k = 0\ (in\, \Omega_k)\ , \vec{u}^k = 0\ (on\, S_k), k = \overline{1,m} \\ &, \vec{u}^i = \vec{u}^{i+1} (on\, \Gamma_i)\ ,\ i = \overline{1,m-1}\}\end{aligned} \tag{18}$$

تشكل فضاء هلبرت جزئيّاً من فضاء سوبوليف $Sobolev$, $\hat{H}^1(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} H^1(\Omega_k)$ ، و النظيم في هذا الفضاء الجزئي يعرّف بالعلاقة:

$$\|\hat{u}\|^2_{1,\Omega} := \hat{E}(\hat{u},\hat{u}) \tag{19}$$

خاصة (4) : $[2]$ إنّ المجموعة:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{L}_{2,\Gamma} := \mathop{\oplus}_{i=1}^{m-1} \vec{L}_{2,\Gamma_i}\ ,\ \hat{L}_{2,\Gamma} := \left\{\hat{\varphi} \in \hat{L}_2(\Gamma);\ (\hat{\varphi},\hat{1}_{\Gamma})_0 = 0\right\} \\ &\vec{L}_{2,\Gamma_i} := \vec{L}_2(\Gamma_i) \ominus \{1_i\}\ , i = \overline{1,m-1}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

تشكل فضاء هلبرت جزئيّاً من الفضاء $\hat{L}_2(\Gamma)$ ، والنظيم فيه معرف بالشكل:

$$\|\hat{\varphi}\|_0^2 := \sum_{i=1}^{m-1} \rho_i \int_{\Gamma_i} \left|\vec{\varphi}^i(\hat{\zeta}_i)\right|^2 d\Gamma_i \tag{21}$$

تعريف (6) : $[2]$

إنّ المجموعة $\hat{G}(\Omega) := \mathop{\oplus}_{k=1}^{m} G(\Omega_k)$ التي يمكن كتابتها $\left\{\hat{u} = \nabla p := \{\nabla p_k\}_{k=1}^m \in \hat{L}_2(\Omega)\right\}$ $\hat{G}(\Omega) :=$ تشكل فضاء هلبرت ندعوه بفضاء الدوالّ الكمونية.

مبرهنة (3) : $[2]$ لتكن شروط المبرهنة (2) محقّقة . عندئذٍ يكون:

$$\hat{G}(\Omega) := \hat{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \hat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \tag{22}$$

مع العلم أنّ:

$$\hat{G}_{h,S}(\Omega) := \overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) := \{\hat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^{m} \in \hat{L}_2(\Omega) : \vec{v}_k = \nabla\vec{\varphi}_k ,$$
$$\Delta\vec{\varphi}_k = 0\ (in\ \Omega_k), \frac{\partial\vec{\varphi}_k}{\partial\vec{n}_k} = 0, (on\ S_k), k = \overline{1,m}, \frac{\partial\vec{\varphi}_i}{\partial\vec{n}_i} = \frac{\partial\vec{\varphi}_{i+1}}{\partial\vec{n}_{i+1}}, (on\ \Gamma_i)$$
$$\int_{\Gamma_i} (\rho_i\vec{\varphi}_i - \rho_{i+1}\vec{\varphi}_{i+1})d\Gamma_i = 0, i = \overline{1,m-1}\} \quad (23)$$

مبرهنة (4) : $[2]$الفضاء الجزئي $\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ كثيف في الفضاء $\hat{J}_{0,S}(\Omega)$، و $\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ طمور تراصاً في الفضاء $\hat{J}_{0,S}(\Omega)$ ، أي أنّ المؤثر $\hat{A} : \hat{J}^1_{0,S}(\Omega) \to \hat{J}_{0,S}(\Omega)$ محدود وموجب ومتراصّ حيث $\hat{A} := diag\{A_k\}_{k=1}^{m}$

مبرهنة (5) : $[2]$الفضاء الجزئي $\hat{H}^{1/2}_{\Gamma} := \hat{H}^{1/2}(\Gamma) \cap \hat{L}_{2,\Gamma}$ كثيف في الفضاء $\hat{L}_{2,\Gamma}$، و $\hat{H}^{1/2}_{\Gamma}$ طمور تراصاً في الفضاء $\hat{L}_{2,\Gamma}$.

مبرهنة (6) : $[1]$إذا تحققت الشروط:

$$\vec{f} \in \left(\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \vec{\psi} \in (G_+)^*$$

حيث $(G_+)^*$ فضاء جميع الداليات الخطية المعرّفة على الفضاء G_+، و $\left(\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*$ فضاء جميع الداليات الخطيّة المعرّفة على الفضاء $\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)$.

عندئذٍ يكون لمسألة ستوكس الآتية :

$$A\vec{u} := -P_{0,S}\Delta\vec{u} + \nabla p_u = \vec{f}, div\ \vec{u} = 0(in\ \Omega), \vec{u} = \vec{0}\ (on\ S)$$
$$\partial\vec{u} = \sum_{i=1}^{3}\left(\tau_{i3}(\vec{u}) - p_u\delta_{i3}\right)\vec{e}_{\zeta i} = \vec{\psi}\ (on\ \Gamma)$$
$$\Delta p_u = 0\ (in\ \Omega), \frac{\partial p_u}{\partial n} = 0\ (on\ S), \int_{\Gamma} p_u\, d\Gamma = 0$$

حلّ وحيد $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ ، له التمثيل التالي: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = A^{-1}\vec{f} + T_M\psi, \nabla p_u = \nabla p_v + \nabla p_w$

حيث $\vec{v}$ حلّ ضعيف للمسألة الآتية(مسألة كرين المساعدة الأولى):

$$A\vec{v} := -P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_v = \vec{f}, div\ \vec{v} = 0(in\ \Omega), \vec{v} = \vec{0}\ (on\ S)$$
$$\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3} = 0\ (on\ \Gamma), i = 1,2,3$$
$$\Delta p_v = 0\ (in\ \Omega), \frac{\partial p_v}{\partial n} = 0\ (on\ S)$$

بينما $\vec{w}$ حلّ ضعيف للمسألة(مسألة كرين المساعدة الثانية):

$$-P_{0,S}\Delta\vec{w} + \nabla p_w = \vec{f}, div\ \vec{w} = 0(in\ \Omega), \vec{w} = \vec{0}\ (on\ S)$$
$$\partial\vec{w} = \vec{\psi}(on\ \Gamma)$$
$$\Delta p_w = 0\ (in\ \Omega), \frac{\partial p_w}{\partial n} = 0\ (on\ S), \int_{\Gamma} p_w\, d\Gamma = 0$$

و $A : \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \to \left(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, T_M = (\gamma_M)^*; \gamma_M = \gamma|_M : M \to G_+$

وبالعكس من أجل كل $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ لها يوجد $\vec{f} \in \left(\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)^*, \vec{\psi} \in (G_+)^*$ ، بحيث $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

حيث $\vec{v}$ حلّ ضعيف لمسألة كرين المساعدة الأولى ، و $\vec{w}$ حلّ ضعيف لمسألة كرين المساعدة الثانية.

جملة معادلات المؤثرات التفاضلية:

ندرس في هذا القسم مسألة القيمة الحديّة الابتدائية $(7)-(11)$ ، ونجد جملة معادلات المؤثرات التفاضلية في فضاء هلبرت، والمرتبطة بهذه المسألة.

يتضح من العلاقات (10) أنّ $\varsigma_i(t,\hat{\varsigma}) \in \vec{L}_{2,\Gamma_i}$, $i=\overline{1,m-1}$, $\forall t>0$.

لذلك $\mathrm{P}_{\Gamma_i}\varsigma_i = \varsigma_i$, $i=\overline{1,m-1}$ حيث $\mathrm{P}_{\Gamma_i}:\vec{L}_2(\Gamma_i)\to\vec{L}_{2,\Gamma_i}$ مؤثر إسقاط عمودي.

لنعرف المؤثر B_{0i} بالشكل :

$$B_{0i}\varsigma_i := \mathrm{P}_{\Gamma_i}L_i\mathrm{P}_{\Gamma_i}\varsigma_i \;\; ; \; \varsigma_i \in D(B_{0i}) := \vec{H}_0^2(\Gamma_i)\cap\vec{L}_{2,\Gamma_i} \qquad (24)$$

و L_i معرف بالعلاقة (9) . نعرف المؤثر $\hat{B}_0 := diag(B_{0i})_{i=1}^{m-1}$

تمهيدية (1): $[1]$المؤثر $B_{0i}:D(B_{0i})\subset\vec{L}_{2,\Gamma_i}\to\vec{L}_{2,\Gamma_i}$ غير محدود ومترافق ذاتياً .

مبرهنة (7):المؤثر $\hat{B}_0:D(\hat{B}_0)\subset\hat{L}_{2,\Gamma}\to\hat{L}_{2,\Gamma}$ غير محدود ومترافق ذاتياً ، وصيغته التربيعية معرّفة بالشكل: $[2]$

$$(\hat{B}_0\hat{\varsigma},\hat{\varsigma})_{\hat{L}_{2,\Gamma}} := \sum_{i=1}^{m-1}\sigma_i\int_{\Gamma_i}\left[\nabla_{\Gamma_i}(\varsigma_i,\varsigma_i)+a_i\left|\varsigma_i\right|^2\right]d\Gamma_i \qquad (25)$$

الاثبات:

بما أنّ $\hat{B}_0 := diag(B_{0i})_{i=1}^{m-1}$ فيكفي لإثبات أنّه مترافق ذاتياً أن يكون $B_{0i}^* = B_{0i}$, $i=\overline{1,m-1}$ (مترافق ذاتياً) ، وهذا واضح بالاعتماد على التمهيدية (1) ، وبنفس الطريقة $\hat{B}_0$ غير محدود.

نوجد صيغة أخرى للعلاقة (9) باستخدام المؤثر $\hat{B}_0$، بحيث نفترض أن :

$$\int_{\Gamma_i}(p_i - p_{i+1})d\Gamma_i = 0 \;\; i=\overline{1,m-1} \qquad (26)$$

و باستخدام العلاقة :

$$\int_{\Gamma_i}(u_{3,3}^i - u_{3,3}^{i+1})d\Gamma_i = 0 \;\; i=\overline{1,m-1} \qquad (27)$$

نحصل على :

$$(-p_i+2\mu_i u_{3,3}^i)-(-p_{i+1}+2\mu_{i+1}u_{3,3}^{i+1}) = -B_{0i}\varsigma_i \;\; (on\,\Gamma_i) \;, i=\overline{1,m-1} \qquad (28)$$

بدلاً من العلاقة (9).

نهدف إلى الحصول على جملة من العلاقات التفاضلية من المسألة $(7)-(11)$ ، عندئذٍ نحصل على مسألة كوشي بمعادلة مؤثرات تفاضلية في فضاء هلبرت.

إنّ جميع حدود المعادلة (7) تنتمي إلى الفضاء $\hat{L}_2(\Omega)$، ومن الواضح أنّ:

$$\hat{u}(t,x)\in\hat{J}_{0,S}(\Omega) \;,\; \nabla_\rho p = \{\rho^{-1}\nabla p_k\}_{k=1}^m \in \hat{G}(\Omega) \qquad (29)$$

و الحل $\hat{u}(t,x) = \{\vec{u}^k(t,x)\}_{k=1}^m$ للمسألة $(7)-(11)$ ممثل بالشكل:

$$\hat{u}(t,x) = \hat{v}(t,x)+\hat{w}(t,x) \qquad (30)$$

حيث $\hat{v}(t,x) = \{\vec{v}^k(t,x)\}_{k=1}^m$ هو حل لمسألة القيمة الحدية الآتية (I) :

$$\left.\begin{array}{l} -\mu_k \Delta \vec{v}^{\,k} + \nabla p_k^{(1)} = -\rho_k \dfrac{\partial \vec{u}^{\,k}}{\partial t} + 2\rho_k \omega_0 (\vec{u}^{\,k} \times \vec{e}_3) + \rho_k \vec{f} \\ div\, \vec{v}^{\,k} = 0 \;\; (in\, \Omega_k)\;, \vec{v}^{\,k} = 0 \;\; (on\, S_k)\,, k = \overline{1,m} \\ v^{\,i} - v^{\,i+1} = 0,\; \mu_i (v^{\,i}_{\,j,3} + v^{\,i}_{\,3,j}) - \mu_{i+1}(v^{\,i+1}_{\,j,3} + v^{\,i+1}_{\,3,j}) = 0\,,\, j = 1,2 \\ (-p_i^{(1)} + 2\mu_i v^{\,i}_{\,3,3}) - (-p_{i+1}^{(1)} + 2\mu_{i+1} v^{\,i+1}_{\,3,3}) = 0 \quad (on\, \Gamma_i)\,, i = \overline{1, m-1} \end{array}\right\} \quad (31)$$

و $\hat{w}(t,x) = \{\vec{w}^{\,k}(t,x)\}_{k=1}^{m}$ هو حل لمسألة القيمة الحدية الآتية (II):

$$\left.\begin{array}{l} -\mu_k \Delta \vec{w}^{\,k} + \nabla p_k^{(2)} = 0 \\ div\, \vec{w}^{\,k} = 0 \;\; (in\, \Omega_k)\;, \vec{w}^{\,k} = 0 \;\; (on\, S_k)\,, k = \overline{1,m} \\ \vec{w}^{\,i} - \vec{w}^{\,i+1} = 0,\; \mu_i (w^{\,i}_{\,j,3} + w^{\,i}_{\,3,j}) - \mu_{i+1}(w^{\,i+1}_{\,j,3} + w^{\,i+1}_{\,3,j}) = 0\,,\, j = 1,2 \\ (-p_i^{(2)} + 2\mu_i w^{\,i}_{\,3,3}) - (-p_{i+1}^{(2)} + 2\mu_{i+1} w^{\,i+1}_{\,3,3}) = (-\sigma_i \Delta_{\Gamma_i} - a_{\Gamma_i})\varsigma_i \\ \quad (on\, \Gamma_i)\,, i = \overline{1, m-1} \end{array}\right\} \quad (32)$$

ملاحظة: نرمز لـ $p_i^{(1)}$ بالضغط الديناميكي الموافق للحقل $\vec{v}^{\,k}$ ، $p_i^{(2)}$ بالضغط الديناميكي الموافق للحقل $\vec{w}^{\,k}$.

عندئذٍ ، نحصل بتطبيق الإسقاطات العمودية $\hat{\mathrm{P}}_{0,\Gamma}\,,\hat{\mathrm{P}}_{0,S}$ على الفضاءات الجزئية $\hat{G}_{0,\Gamma}\,,\hat{J}_{0,S}(\Omega)$ على الترتيب ، لطرفي المعادلة (7) على العلاقات التالية:

$$\left.\begin{array}{l} (\rho_i)^{-1} \nabla \varphi_i = 2\omega_0 \mathrm{P}_{0,\Gamma_i} (\vec{u}^{\,k} \times \vec{e}_3) + \nu\, \mathrm{P}_{0,\Gamma_i} \Delta \vec{u}^{\,i} + \mathrm{P}_{0,\Gamma_i} \vec{f} \\ \nabla \varphi_i := \mathrm{P}_{0,\Gamma_i} \nabla p_i \;\;, i = \overline{1, m-1} \end{array}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{u}^{\,k}}{dt} + (\rho_i)^{-1} \nabla \tilde{p}_k = 2\omega_0 \mathrm{P}_{0,S_k} (\vec{u}^{\,k} \times \vec{e}_3) + \nu\, \mathrm{P}_{0,S_k} \Delta \vec{u}^{\,k} + \mathrm{P}_{0,S_k} \vec{f} \\ \nabla \tilde{p}_k := \mathrm{P}_{0,S_k} \nabla p_k \;\;, k = \overline{1, m} \end{array}\right\} \quad (34)$$

ينتج من العلاقة (33) أنّ $\nabla \varphi_i$ يحسب من خلال $\vec{f}\,,\vec{u}^{\,k}$ في العلاقة (34)، ومن ناحية ثانية φ_i غير موجودة في العلاقة (34) والشروط الحدّية الابتدائية $(8)-(11)$.

ينتج من $(15),(34),(33),(26)$ أنّ $(\varphi_i - \varphi_{i+1})\big|_{\Gamma i} = 0$ ، $(p_i - p_{i+1}) = (\tilde{p}_i - \tilde{p}_{i+1}) + (\varphi_i - \varphi_{i+1})$

وبالتالي $(p_i - p_{i+1})|_{\Gamma_i} = (\tilde{p}_i - \tilde{p}_{i+1})|_{\Gamma_i}$.

وعندئذٍ يصبح الشرط (28) بالشكل:

$$(-\tilde{p}_i + 2\mu_i u^{i}_{3,3}) - (-\tilde{p}_{i+1} + 2\mu_{i+1} u^{i+1}_{3,3}) = -B_{0i}\varsigma_i \;\; (on\, \Gamma_i)\;, i = \overline{1, m-1} \quad (35)$$

استناداً إلى أعلاه تؤول مسألة القيمة الحدّية الابتدائية $(7)-(11)$ إلى العلاقة (33) و مسألة ستوكس الواردة في المبرهنة (6) ، حيث تستبدل $\vec{f}$ بالطرف الأيمن من العلاقة (34) و ψ بالطرف الأيمن من العلاقة (35).

عندئذٍ نجد من خلال المبرهنة (5) أنّ المسألة $(7)-(11)$ مكافئة للعلاقة (33) ، وجملة المعادلات الآتية وشروط القيمة الابتدائية:

$$\hat{u}=\hat{v}+\hat{w}, \qquad \nu\hat{v}=\hat{A}^{-1}\left(-\frac{d\hat{u}}{dt}+2i\,\omega_0\hat{S}_0\hat{u}+\hat{f}\right) \tag{36}$$

$$\hat{f}=\hat{P}_{0,S}\{f\,|_{\Omega_k}\}_{k=1}^{m},\hat{S}_0\hat{u}:=i\,\hat{P}_{0,S}\{\vec{u}^{k}\times\vec{e}_3\}_{k=1}^{m} \tag{37}$$

$$\nu\hat{w}=-\hat{T}\hat{B}_0\hat{\varsigma},\ \hat{\varsigma}=\{\varsigma_i\}_{i=1}^{m-1} \tag{38}$$

$$\hat{T}:\hat{H}_{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}:=(\hat{H}_{\Gamma}^{\frac{1}{2}})^{*}\rightarrow\hat{J}_{0,S}^{1}(\Omega)\ ,\hat{H}_{\Gamma}^{\frac{1}{2}}:=\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\cap\hat{L}_{2,\Gamma}$$

$$\frac{d\hat{\varsigma}}{dt}=\hat{\gamma}_n\hat{u}\ ,\hat{u}(0)=u^0:=\{u^{k,0}(x)\}_{k=1}^{m},\hat{\varsigma}(0)=\hat{\varsigma}^0:=\{\varsigma^{i,0}(\zeta_i)\}_{i=1}^{m-1} \tag{39}$$

حيث

$$\gamma_{n_i}u^i:=\{(u^i.n_i)_{\Gamma_i}\}_{i=1}^{m-1},\ \gamma_{n_i}:\vec{J}_{0,S}^{1}\rightarrow H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

ملاحظة:

يمكن الاستغناء عن المعادلة (33) لأنّه يمكننا إيجاد الدالّة $\nabla\varphi_i\ ,i=\overline{1,m-1}$ بواسطة الدوالّ $u^k(t,x)\ ,f(t,x)$ من المعادلة (34).

نستطيع إيجاد $\hat{u},\hat{\varsigma}$ من $(39),(38),(36)$ باستخدام العلاقة الأولى في كل $(38),(36)$.

لذلك نحصل باشتقاق المعادلات $(30),(38)$ بالنسبة لـ t على مسألة كوشي من أجل جملة معادلات مؤثراتية– تفاضلية:

$$\frac{dv^k}{dt}+\frac{dw^k}{dt}+\nu A_k v^k-2i\,\omega_0S_{0,k}(v^k+w^k)=P_{0,S_k}f\ ,v^k(0)=v^{k,0} \tag{41}$$

$$\frac{dw^i}{dt}+\nu^{-1}T_iB_{0i}\gamma_{n_i}(v^i+w^i)=0,w^i(0)=w^{i,0},i=\overline{1,m-1} \tag{42}$$

$$v^{i,0}=u^{i,0}-w^{i,0}\ :w^{i,0}=-\nu^{-1}T_iB_{0i}\varsigma^{i,0} \tag{43}$$

وتكتب بالشكل:

$$\frac{d\hat{v}}{dt}+\frac{d\hat{w}}{dt}+\nu\hat{A}\hat{v}-2i\,\omega_0\hat{S}_0(\hat{v}+\hat{w})=\hat{P}_{0,S}f\ ,\hat{v}(0)=\hat{v}^0 \tag{44}$$

$$\frac{d\hat{w}}{dt}+\nu^{-1}\hat{T}\hat{B}_0\hat{\gamma}_n(\hat{v}+\hat{w})=0,\hat{w}(0)=\hat{w}^0 \tag{45}$$

$$\hat{v}^0=\hat{u}^0-\hat{w}^0\ :\hat{w}^0=-\nu^{-1}\hat{T}\hat{B}_0\hat{\varsigma}^0 \tag{46}$$

$$:\hat{A}:=diag\{A_k\}_{k=1}^{m},\hat{S}_0:=diag\{S_{0k}\}_{k=1}^{m},\hat{\gamma}_n:=diag\{\gamma_{n_i}\}_{i=1}^{m-1},\hat{T}:=diag\{T_i\}_{i=1}^{m-1}$$

نحصل نتيجة تغيير المتحولات :

$$\hat{v}=\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\xi}\quad ,\ \hat{w}=\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\eta} \tag{47}$$

و تطبيق المؤثر $\hat{A}$ على طرفي المعادلات $(44),(45)$ على مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt}+\nu\hat{A}\hat{\xi}-2i\,\omega_0\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{S}_0(\hat{\xi}+\hat{\eta})-\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}_{0,S}f \tag{48}$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt}+\nu^{-1}\hat{B}(\hat{\xi}+\hat{\eta})=0,\ \hat{\eta}(0)=-\nu^{-1}\hat{Q}^*\hat{B}_0\hat{\varsigma}^0\ ,\ \hat{\xi}(0)=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{u}^0-\hat{\eta}(0) \tag{49}$$

$$\hat{B}:=\hat{Q}^*\hat{B}_0\hat{Q}\ ,\hat{Q}:=\hat{\gamma}_n\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\ ,\ \hat{Q}^*:=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{T} \tag{50}$$

نبدأ بدراسة قابلية الحل لمسألة الحركات الصغيرة لجملة من السوائل اللزجة الشعرية الدورانية ، أي: المسألة $(7)-(11)$ انطلاقاً من المسألتين $(46)-(44)$ و $(50)-(48)$.

لذلك نوجد أولاً خواصّ المؤثرات الموجودة في جمل هذه المعادلات. من أجل ذلك نعرض التمهيديتين الآتيتين :

تمهيدية (2): $[2]$

للفضاء $\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ المنشور المتعامد :

$$\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)=\hat{N}_1(\Omega)\oplus\hat{M}_1(\Omega) \tag{51}$$

حيث:

$$\hat{N}_1(\Omega):=\overset{m}{\underset{k=1}{\oplus}}N_1(\Omega_k):=\{\hat{v}=\{v^k\}_{k=1}^m\in\hat{J}^1_{0,S}(\Omega);\hat{\gamma}_n\hat{v}=\} \tag{52}$$

والفضاء $\hat{M}_1(\Omega)$ هو فضاء جزئي من الحلول الضعيفة للمسألة (32).

وللفضاء $\hat{J}_{0,S}(\Omega)=A^{\frac{1}{2}}\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ المنشور الآتي:

$$\hat{J}_{0,S}(\Omega)=\hat{N}_0(\Omega)\oplus\hat{M}_0(\Omega):=A^{\frac{1}{2}}\hat{N}_1(\Omega)\oplus A^{\frac{1}{2}}\hat{M}_1(\Omega) \tag{53}$$

تمهيدية (3):

المؤثران

$$\hat{Q}:=\hat{\gamma}_n\hat{A}^{-\frac{1}{2}}:\hat{J}_{0,S}(\Omega)\to\hat{L}_{2,\Gamma}\ ,\ \hat{Q}^*:=\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{T}:\hat{L}_{2,\Gamma}\to\hat{J}_{0,S}(\Omega) \tag{54}$$

المعرفان في العلاقة (50) مترافقان ومتراصان.

الإثبات:

إثبات أنّ $\hat{Q},\hat{Q}^*$ مترافقان كما في المرجع $[4]$. بما أنّ $\hat{A}^{-\frac{1}{2}}$ متراص $[2]$ ولكون المؤثر $\hat{\gamma}_n$ محدوداً ينتج أنّ $\hat{Q}$ متراص و $\hat{Q}^*$ متراص دوماً ، لأنّ المؤثر المرافق لمؤثر متراص هو متراص .

تعريف (7): $[2]$

يقال إنّ الجملة المدروسة في حالة توازن مستقر فيما يتعلق بالتقريب الخطي إذا كان المؤثر $\hat{B}_0$ موجباً.

مبرهنة (8):

المؤثر $\hat{B}$ المعرف في العلاقة (50) مترافق ذاتياً ، حيث $D(\hat{B})\subset\hat{J}_{0,S}(\Omega)$ و $\hat{B}\,|_{\hat{M}_0(\Omega)}$ قابل للعكس ويكفي لكي يكون موجباً أن تكون الجملة في حالة توازن مستقر فيما يتعلق بالتقريب الخطي.

الإثبات:

بما أنّ $\hat{Q},\hat{Q}^*$ مترافقان من التمهيدية (3)، و $\hat{B}_0$ مترافق ذاتياً من المبرهنة (7) ينتج أنّ المؤثر $\hat{B}$مترافق ذاتياً. إذا كانت الجملة في حالة توازن مستقر فيما يتعلق بالتقريب الخطي يكون المؤثر $\hat{B}_0$ موجباً، وبما أنّ $\hat{Q},\hat{Q}^*$ مترافقان يكون $\hat{Q}\hat{Q}^*$ موجباً ، وهذا يقتضي أنّ $\hat{B}$ موجب في حالة التوازن المستقر. إثبات أنّ $\hat{B}\,|_{\hat{M}_0(\Omega)}$ قابل للعكس واضح من المبرهنة (6) ، وكون $\hat{\gamma}_n\,|_{\hat{M}_1(\Omega)}$ قابلاً للعكس [1] وتعريف المؤثر $\hat{B}$.

مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى في فضاء هلبرت:

ندرس وجود ووحدانية حلّ لمسألة القيمة الحدّية الابتدائية $(7)-(11)$ باستخدام المسألة $(46)-(44)$، لذلك نقوم في هذا القسم بتحويلها إلى مسألة كوشي بمعادلة خطية من المرتبة الأولى.

لنعرّف المؤثرين:

$$\hat{V} := \hat{B}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}\hat{A}^{-\frac{1}{2}} : \hat{J}_{0,S}(\Omega) \to \hat{M}_0(\Omega) \quad , \hat{\mathrm{P}} : \hat{J}_{0,S}(\Omega) \to \hat{M}_0(\Omega) \tag{55}$$

$$\hat{V}^+ := \hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}\hat{B}^{\frac{1}{2}}, D(\hat{V}^+) := D(\hat{B}^{\frac{1}{2}}) \subset \hat{M}_0(\Omega) \tag{56}$$

ملاحظة:يمكن أن نحذف المؤثر $\hat{\mathrm{P}}$في العلاقة ، لأنّ الفضاء الجزئي $\hat{M}_0(\Omega)$لا متغير بالنسبة للمؤثرين $\hat{B}^{\frac{1}{2}}, \hat{B}$ وبالتالي $\hat{B}^{\frac{1}{2}} = \hat{B}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}} = \hat{\mathrm{P}}\hat{B}^{\frac{1}{2}} = \hat{\mathrm{P}}\hat{B}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}$.

لنوجد الخواص العامة للمؤثرين $\hat{V}^+, \hat{V}$.

تمهيدية (4):

المؤثر $\hat{V}$ متراص ، المؤثر $\hat{V}^+ = \hat{V}^*\big|_{D(\hat{B}^{\frac{1}{2}})}$،المؤثر $\overline{\hat{V}^+} = \hat{V}^*$متراص.

الاثبات:

تم برهان أن المؤثر $\hat{V}$ متراص في [5]، ويتضح من العلاقات $(55),(56)$أنّ $\hat{V}^+ = \hat{V}^*\big|_{D(\hat{B}^{\frac{1}{2}})}$و $\overline{\hat{V}^+} = \hat{V}^*$ لأنّ $D(\hat{B}^{\frac{1}{2}})$ كثيفة في $\hat{M}_0(\Omega)$، و $\overline{\hat{V}^+}$ متراص لأنّ المؤثر المرافق لمؤثر متراصّ هو متراصّ.

نستخدم المؤثرين $\hat{V},\hat{V}^+$ لتحويل المسألة $(44)-(46)$إلى مسألة كوشي من الشكل (1)، من أجل ذلك نبدّل $\hat{\omega} = \nu^{-1}\mathcal{V}^+\hat{z}$في العلاقات $(44)-(46)$، ثم نطبّق $\nu(\mathcal{V}^+)^{-1} = \nu\hat{B}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathrm{P}}\hat{A}^{\frac{1}{2}}$ على طرفيّ العلاقة (45) ، فنحصل على جملة المعادلات:

$$\frac{d\hat{v}}{dt} + \nu^{-1}\hat{V}^*\frac{d\hat{z}}{dt} + \nu\hat{A}\hat{v} - 2i\,\omega_0\hat{S}_0\hat{v} - 2i\,\omega_0\nu^{-1}\hat{S}_0\hat{V}^+\hat{z} = \hat{\mathrm{P}}_{0,S}\vec{f} \tag{57}$$

$$\frac{d\hat{z}}{dt} + \hat{B}^{\frac{1}{2}}\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{v} + \nu^{-1}\hat{B}\hat{z} = 0 \tag{58}$$

حيث $\frac{d}{dt}(\hat{V}^+\hat{z}) = \hat{V}^*\frac{d\hat{z}}{dt}$ من التمهيدية (4)

والتي لها الشكل المصفوفي الآتي:

$$\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)\frac{d\,y}{dt}+\left(\mathcal{I}+\mathcal{F}\right)\mathcal{A}_0 y=f_0(t),\; y(0)=y^{0} \tag{59}$$

$$\mathcal{F}:=\nu^{-1}\mathcal{V}-2i\,\omega_0 S=\nu^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ \hat{V} & 0\end{pmatrix}-2i\,\omega_0\begin{pmatrix}\nu^{-1}\hat{S}_0\hat{A}^{-1} & \hat{S}_0\hat{A}^{-\frac{1}{2}}\hat{B}^{-\frac{1}{2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\mathcal{A}_0:=\begin{pmatrix}\nu\hat{A} & 0\\ 0 & \nu^{-1}\hat{B}\end{pmatrix},\; y=\begin{pmatrix}\hat{v}\\ \hat{z}\end{pmatrix},f_0(t)=\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{P}}_{0,S}\vec{f}\\ 0\end{pmatrix},\; y^{0}=\begin{pmatrix}\hat{v}^{0}\\ \hat{z}^{0}\end{pmatrix} \tag{61}$$

لإيجاد خواصّ المؤثرين $\mathcal{V},\mathcal{F}$ اللذين يلعبان دوراً هاماً في البرهان على قابلية الحلّ للمسألة $(7)-(11)$، نحتاج إلى التمهيدية الآتية:

تمهيدية (5):

المؤثر $\hat{S}_0$ المعرّف في العلاقة (37) هو مؤثر محدود ومترافق ذاتياً .

الإثبات:

لإثبات أنّ $\hat{S}_0:=diag\{S_{0k}\}_{k=1}^{m},S_{0k}\vec{u}=iP_{o,S_k}\left(\vec{u}^{k}\times\vec{e}_3\right),k=1,m$ محدود و مترافق ذاتياً، يكفي أن نثبت أنّ $S_{0k}\,,k=\overline{1,m}$ محدود و مترافق ذاتياً ، وهذا واضح من كون $P_{o,S_k}\,,k=\overline{1,m}$ مؤثر إسقاط ، إذ كل مؤثر إسقاط محدود ومترافق ذاتياً .

مبرهنة (9):

المؤثرات $\mathcal{V},\mathcal{F}$ متراصة ، و $\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}$ قابل للعكس ومؤثره العكسي محدود ويحقق:

$$\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)^{-1}=\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}$$

الإثبات: ينتج من المبرهنة (8) أنّ المؤثر $\hat{V}$ متراص ، وبالتالي $\mathcal{V}$ متراصّ. و $\mathcal{F}$ متراصّ ، لكون $\hat{S}_0$ محدوداً (التمهيدية (5)) ، و $A^{-1},B^{-\frac{1}{2}}$ متراصان، تركيب مؤثر محدود ومتراصّ هو مؤثر متراص دوماً.

إنّ المعادلة $\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)^{-1}=\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}$ واضحة من العلاقة (60) لكون $\mathcal{V}^{*}$ مصفوفة مؤثراتية مثلثية .

نطبق المؤثر $\left(\mathcal{I}+\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)^{-1}$ على طرفي المعادلة ، فنحصل على مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d\,y}{dt}+\left(\mathcal{I}+\mathcal{T}\right)\mathcal{A}_0 y=f_0(t),\; y(0)=y^{0} \tag{62}$$

$$\left(\mathcal{I}+\mathcal{T}\right):=\left(\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)\left(\mathcal{I}+\mathcal{F}\right)\;,\left(\mathcal{I}-\nu^{-1}\mathcal{V}^{*}\right)f_0(t)=f_0(t) \tag{63}$$

والتي نستطيع أن نكتبها بالشكل:

$$\frac{d\,y}{dt}=-\left(\mathcal{I}+\mathcal{T}\right)\mathcal{A}_0 y+f_0(t),\; y(0)=y^{0} \tag{64}$$

قابلية حل مسألة القيمة الحدية الابتدائية:

ندرس في هذا القسم قابلية الحلّ لمسألة القيمة الحدية الابتدائية $(7)-(11)$ باستخدام المسألة (64).

تعريف (8):

نقول إنّ لمسألة كوشي (64) حلاً قوياً $y(t)$ على المجال $[0,T]$ ويأخذ قيمه في الفضاء

$H := \hat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus \hat{M}_0(\Omega)$ إذا تحقق ما يلي:

1) $y(t)\in D(\mathcal{A}_0)=D(\hat{A})\oplus D(\hat{B}),\ \mathcal{A}_0 y(t)\in C([0,T];H)$

2) $\dfrac{dy}{dt}\in C([0,T];H)$

3) تتحقق المعادلة (64) من أجل كل $t\in[0,T[$، والشروط الابتدائية من أجل $t=0$.

مبرهنة (10):

بفرض أن الدالة $\vec{f}(t,x)\in \vec{L}_2(\Omega)$ في المسألة $(7)-(11)$ تحقق شرط هولدر و

$$\hat{u}^0\in \hat{J}_{0,S}(\Omega),\ \hat{u}^0=\hat{v}^0+\hat{w}^0, \hat{v}^0\in D(\hat{A})\subset \hat{J}^1_{0,S}(\Omega),\ \hat{w}^0\in \hat{M}_1(\Omega)\subset \hat{J}^1_{0,S}(\Omega) \quad (65)$$

فإنّ للمسألة (64) حلّ $y(t)$ قويّاً ووحيداً على المجال $[0,T]$.

الاثبات:

لنبرهن أولاً أنّ المؤثر $-(\mathcal{I}+\mathcal{T})\mathcal{A}_0$ يوّلد شبه زمرة تحليلية في القطاع $\sum_\theta$.

استناداً إلى المبرهنة (4) يكون المؤثر $\hat{A}$ مترافقاً ذاتياً وموجباً ، والمؤثر $\hat{B}$ مترافقاً ذاتياً وموجبا استناداً إلى المبرهنة (8) ، وبالتالي المؤثر $\mathcal{A}_0$ مترافق ذاتياً وموجب فهو يولد شبه زمرة تحليلية في القطاع $\sum_\theta$ [2]،

من ناحية ثانية المؤثر $\mathcal{T}:=-\nu^{-1}\mathcal{V}^*+\mathcal{F}-\nu^{-1}\mathcal{V}^*\mathcal{F}$ متراص لكون $\mathcal{V},\mathcal{F}$ متراصّاً بحسب المبرهنة (9)،

والمؤثر $(\mathcal{I}+\mathcal{T})$ له مؤثر عكسي محدود استناداً إلى المبرهنة (9)، ومما سبق $-(\mathcal{I}+\mathcal{T})\mathcal{A}_0$ يتمتع بنفس خاصة المؤثر $\mathcal{A}_0$. [7]

بما أنّ $\vec{f}(t,x)\in \vec{L}_2(\Omega)$ تحقق شرط هولدر ،عندئذٍ $\hat{\mathrm{P}}_{0,S}\vec{f}\in \hat{J}_{0,S}(\Omega)$ تحقق شرط هولدر وبالتالي $f_0(t)=(\hat{\mathrm{P}}_{0,S}\vec{f},0)^t\in H$ تحقق شرط هولدر.

بقي أن نبرهن أنّ $y^0=(\hat{v}^0,\hat{z}^0)^t\in D(\mathcal{A}_0)=D(\hat{A})\oplus D(\hat{B})$، واضح من الفرض أنّ $\hat{v}^0\in D(\hat{A})$،

فيكفي أن نبرهن أنّ $\hat{z}^0\in D(\hat{B})$. من خلال العلاقة $\hat{\omega}^0=\nu^{-1}\mathcal{V}^+\hat{z}^0$ ينتج

أنّ $\hat{z}^0=\nu(\mathcal{V}^+)^{-1}\hat{\omega}^0=\nu\hat{B}^{-\frac{1}{2}}\hat{A}^{\frac{1}{2}}\hat{\omega}^0\in R(\hat{B}^{-1})=D(\hat{B})\subset \hat{M}_0(\Omega)\subset \hat{J}_{0,S}(\Omega)$.

نجد بالاعتماد على المبرهنة (1) أن المطلوب قد تحقق.

مبرهنة (11):

بفرض أنّ الحل $y(t)$ لمسألة كوشي (64) يحقق الشروط الآتية:

$$\hat{B}\hat{z}(t)\in C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right),\ \hat{P}\hat{A}\hat{v}(t)\in C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right) \quad (66)$$

وتحقق الدالة $\vec{f}(t,x)$ شرط هولدر . عندئذٍ للمسألة $(57)-(58)$ حل قويّ وحيد على المجال $[0,T]$،بحيث إنّ كل حدّ في العلاقة (58) ينتمي إلى $C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right)$ من أجل ذلك الحل، وللمسألة $(41)-(43)$ حلّ قوي وحيد ، بحيث إنّ كل حدّ في العلاقة (41) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{J}_{0,S}(\Omega)\right)$ ، وكلّ حدّ في العلاقة (42) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{J}^1_{0,S}(\Omega)\right)$ من أجل ذلك الحل.

الإثبات:

ينتج من الشرط (66) أنّ $\hat{P}\hat{A}\hat{v}^{0}(t)\in C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right)$, $\hat{B}\hat{z}^{0}(t)\in C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right)$ أي أنّ شروط المبرهنة (12) محققة ، فيكون للمسألة (64)حل $y(t)$ قوي ووحيد على المجال $[0,T]$، للمسألة (59)حلٌ قوي وحيد عل المجال $[0,T]$ بالاعتماد على المبرهنة (9).

الآن استناداً إلى العلاقة $\frac{d}{dt}(\hat{V}^{+}\hat{z})=\hat{V}^{*}\frac{d\hat{z}}{dt}$ يكون للمسألة $(57)-(58)$ حلّ قويّ وحيد على المجال $[0,T]$، و كل حد في العلاقة (58) ينتمي إلى $C\left([0,T];D(B^{\frac{1}{2}})\right)$ اعتماداً على (66).

لنطبق المؤثر $\nu^{-1}\hat{V}^{*}=\nu^{-1}\overline{\hat{V}^{+}}$ على طرفي العلاقة (58) نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{d\hat{w}}{dt}+\nu^{-1}\hat{T}\hat{B}_{0}\hat{\gamma}_{n}(\hat{v}+\hat{w})=0;\hat{w}=\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\hat{z} \qquad (68)$$

حيث ينتمي كلّ حدّ في العلاقة (68) إلى $C\left([0,T];\hat{M}_{1}(\Omega)\right)$. وبتبديل $\hat{w}=\nu^{-1}\mathcal{V}^{+}\hat{z}$ في (57)نحصل على المسألة $(41)-(43)$ ، وبالتالي نستنتج أنّ للمسألة $(41)-(43)$ حلّاً قويّاً وحيداً ، بحيث أنّ كلّ حدّ في العلاقة (41) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{J}_{0,S}(\Omega)\right)$ ،وكلّ حدّ في العلاقة (42) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{J}_{0,S}^{1}(\Omega)\right)$ من أجل ذلك الحل.

من المبرهنة (11) نستنتج أن للمسألة $(36),(38),(39)$ حلاً قويّاً وحيداً على المجال $[0,T]$

ملاحظة: بما أنّ المسألة $(7)-(11)$ مكافئة للمسألة $(36),(38),(39)$ينتج من أعلاه أنّ لها حلاً قويّا وحيداً على المجال $[0,T]$.

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم ما توصلنا إليه من نتائج :

1. تشكيل مسالة القيمة الحديّة الابتدائية التي تصف مسألة الحركات الصغيرة لـ m ، سائل لزج غير مختلط ويتمتع بالخاصة الشعرية في أنبوب يدور بشكل منتظم وبسرعة زاوية ثابتة.

2. تحويل المسألة أعلاه إلى مسألة كوشي من أجل جملة من معادلات المؤثرات التفاضلية ، ثم دراسة خواص المؤثرات الموجودة في المسألة.

3. تحويل مسألة كوشي التي حصلنا عليها إلى مسألة كوشي بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى.

4. البرهان على وجود ووحدانية حلّ قوي للمسألة المطروحة.

ونوصي بالاستفادة من النتائج أعلاه في دراسة استقرار الجملة الهيدروديناميكية.

المراجع:

[1] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G; NGO ZUY CAN. *Operators Methods in Linear Hydrodynamics:Evolution and Spectral Problems*. Nauka, Moscow, 1989,159-181..

[2] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .*Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics* Vol. 1: Self-adjoint Problems for Ideal Fluid, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[3] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics*.Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2003, 444.

[4] KOPACHEVSKY,N.D. *On Stability and Instability of small motions of Hydrodynamicalsystems*,Methods of Functional Analysis and topology,Vol. 13 (2007), no. 2, 152–168.

[5] SUSLINA,T.A. *Spectral asymptotics of two prototype problems on oscillations of fluids*, Iz. St.PetersburgElectrotechn. Inst., 449, 82–88 (1992).

[6] GOLDSTEIN,DZH. *Semigroups of Linear Operators and Applications*, VyshchaShkola,Kiev (1989).

[7] KREIN, S.G. *Linear Differential Equations in a Banach Space* ,Nauka, Moscow (1967).