مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (6) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (6) 2014

استخدام الطرائق العشوائيَّة شبه المتدرجة لحل بعض مسائل الأمثليات العشوائيَّة غير المحدّبة وغير الملساء.

الدكتور مبارك ديب*

(تاريخ الإيداع 21 / 9 / 2014. قُبِل للنشر في 4 / 11 /2014)

□ ملخّص □

الغاية من البحث هي دراسة وتحليل بعض الطرائق العشوائيَّة شبه المتدرّجة وإمكانية تطبيقها لإيجاد الحل الأمثل لمسائل أمثليّة تخضع لمؤثّرات عشوائيّة وظروف تتحكّم فيها الصدفة. وقد تم إثبات تقارب بعض هذه الطرق الرياضيّة وفعاليتها من أجل بعض المسائل العشوائيَّة غير المحدّبة وغير الملساء والمزوّدة بدالة هدفية وقيود محدّدة وحيث اتخذ مجمّع الطاقة الشمسية كمثال على ذلك.

الكلمات المفتاحية: أمثليات عشوائيّة، طرائق رياضيّة عشوائيّة، نمذجة رياضيّة لاخطيّة.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (6) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (6) 2014

The use of semi-stochastic gradient methods to solve some issues stochastic non-convex and non-smooth optimization

Dr. Mubarak Deeb*

(Received 21 / 9 / 2014. Accepted 4 / 11 /2014)

□ ABSTRACT □

The purpose of research is the study and analysis of some of the stochastic semi-gradient methods and their applicability to find the optimal solution for the issues of optimization are subject to the effects Random and conditions are controlled by chance, as we proved the convergence of some of these mathematical methods and their effectiveness for some of the issues of stochastic non-convex and equipped objective function and specific constraints and where taken energy complex solar as an example.

Keywords: stochastic Optimizations ,stochastic mathematical methods, nonlinear mathematical modeling

***Assistant Professor, Department of Mathematical, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعتبر مسائل النمذجة الرياضية العشوائية من المسائل الهامة في وقتنا الحاضر وذلك لتعدد مجالات استخدامها، حيث نجدها في الخطط والتخطيط الأمثليين وفي بحوث العمليات وغيرها من المجالات ، وبحثت في الأعمال التالية:روبنس .ك، مانور . س، كيفير . د، كاتكوفينكا.يا.ذ، كوبال.أ.ذ، يرموليفأ.ى وغيرهم.

سنناقش في هذا الموضوع طريقتين هامتين من الطرائق العشوائيَّة شبه المتدرجة وإمكانية تطبيقها على مسائل الأمثليات العشوائيَّة غير المحدبة وغير الملساء،ثم سنبرهن إمكانية تقاربها من أجل بعض النماذج الرياضية العشوائيَّة الخاصة،وهاتان الطريقتان هما:

a- طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة.

b- طريقة (أررو- كورفيتس)العشوائيَّة شبه المتدرجة.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة وتحليل بعض الطرق العشوائيَّة شبه المتدرجة لإيجاد الحل الأمثل لبعض المسائل الرياضية الخاضعة لظروف تتحكم فيها الصدفة، والهدف المهم الآخر هو البرهان على إمكانية تقارب طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة وتطبيقها على بعض النماذج الرياضية الخاصة.

طرائق البحث ومواده:

تنطلق فكرة البحث من المفهوم العام للأمثليات وبشكل خاص من مفهوم نظرية القيم المثلى والتي تعتبر أقل تطوراً حتى الآن نظراً لارتباطها بتعدد القيم القصوى للمسائل التحليلية غير الملساء وغير المحدبة والخاضعة بشكل عام لشروط احتمالية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

1- التدرجات العشوائيَّة العامة والدوال العشوائيَّة القابلة للتفاضل بشكل عام:[1]

تعريف(1):

نقول عن الدالة $f : E_n \rightarrow E_1$ إنها قابلة للتفاضل بشكل عام في النقطة $x \in E_n$ إذا وجد في جوار ما لـ x التطبيق G_f المتعدد القيم والنصف مستمر من الأعلى بـ x بحيث تكون:

$G_f(y); (y \in E_n)$ مجموعات غير خالية محدبة ومحدودة، وفي جوار x يكون النشر التالي صحيحاً:

$$f(y) = f(x) + (g, y - x) + \underbrace{O(x, y, g)}_{(g(x)-g(y),y-x)+o(\|y-x\|)}$$

حيث:$g \in G_f(y)$، والدالة$O(x, y, g)$ تحقق الشرط:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{O(x, y^k, g^k)}{\|y^k - x\|}\right) = 0$$

وذلك من أجل أي متتالية: $y^k \rightarrow x\ (y^k \neq x)\ ,\ g^k \in G_f(y^k)$.

وعند ذلك نقول إن الأشعة$g \in G_f(y)$ تمثل شبه تدرجات (تدرجات عامة) للدالةf في النقطة y.

– لأجل الدوال القابلة للتفاضل بشكل عام $f(x), x \in E_n$ تكون نظرية لاغرانج العامة في التزايدات المحدودة صحيحة أي: $f(y) - f(x) = (g, y-x)\ ,\ g \in G_f(x+\eta(y-x))\ , 0<\eta<1$

كما تكون العلاقة التكاملية الآتية صحيحة أيضاً: $f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (g(x+ht), h)dt$

(ينظر لهذا التكامل على أساس تكامل ليبنغ).

وهنا $g(x)$ مقطع اختياري وحيد القيمة من التطبيق شبه المتدرج $G_f(x)$.

– الدوال القابلة للتفاضل بشكل عام تحقق موضعياً شرط ليبتشز وبالتالي فهي مستمرة، أضف إلى أن صف الدوال القابلة للتفاضل (بشكل عام) هو صف مغلق.

– مجموعة التطبيقات شبه المتدرجة $G_f(x)$ للدالة القابلة للتفاضل بشكل عام $(f(x), x \in E_n)$ تتألف تقريباً من نقطة واحدة، وبالتالي الدالة القابلة للتفاضل (بشكل عام) تكون قابلة للتفاضل وتدرجها مستمر على المجموعة المعرفة عليها.

وفي الواقعين الشروط الضرورية القصوى في مسائل إيجاد القيم الصغرى للدوال القابلة للتفاضل بشكل عام وبخلاف الدوال المحدّبة، تتّصف أو تتميّز فقط بخواص موضعيّة.أضف إلى أنه كي تبلغ الدالة القابلة للتفاضل بشكل عام $(f(x), x \in E_n)$ حداً أدنى موضعياً في النقطة $x = x^*$ من الضروري أن يكون:

$0(x, y, g) \in G_f(x^*)$ (الحد المتبقي).

نظرية(1):[3]

بفرض (Θ, Σ, P) فضاء مقيس منته موجب(فضاء احتمالي مثلاً)، ولتكن: $f: E_n \times \Theta \to E_1$ دالة قابلة للتفاضل بشكل عام في النقطة $x \in E_n$ لأجل $\theta \in \Theta$ وقابلة للتكامل على Θ لأجل كل x،

ثم ليكن: $G_f: E_n \times \Theta \to 2^{E_n}$ تطبيقها المقيس بـ θ لأجل كل x والشبه متدرج بـ x عند كل θ.

(يمكن اعتبار $G_f(x,\theta) = \partial_x f(x,\theta)$ تفاضل كلارك)، وبفرض لأجل كل مركبة $K \subset E_n$ توجد الدالة القابلة للتكامل $L_k(\theta)$ بحيث يكون: $sup\{\|g\| / g \in G_f(x,\theta), x \in K\} \le L_k(\theta)$

عندها: $F(x) = \int_\Theta (x,\theta)\, p\,(d\theta)$ قابلة للتفاضل بشكل عام، وحيث نشير للاحتمال بالرمز p .

و: $x \to G_f(x) = \int_\Theta G_F(x,\theta) p(d\theta)$ تطبيق شبه درجي لأجل $F(x)$.

❖ – لنأخذ المسألة الأمثلية العشوائيَّة غير المشروطة الآتية:[3]

$$F(x) = \int_\Theta f(x,\theta)\, p\,(d\theta) \to \underbrace{min}_{x \in E_n} \qquad (1)$$

حيث: $f(x,\theta)$ تحقق شروط النظرية(1)،ولنفرض أنَّ: $G_f(x,\theta)$ التطبيق المحقق لشروط النظرية(1) لأجل الدالة $f(x,\theta)$ (كمثال قد يكون عبارة عن تفاضل كلارك $\partial_x f(x,\theta)$).

وبفرض:

$g(x,\theta)$ عبارة عن $\beta \times \Sigma$ مقطع مقيس من $G_f(x,\theta)$، وهذا المقطع موجود طالما $\beta \times \Sigma$ – مقيس.

و: $g(x,\theta) \in \partial_x f(x,\theta) \subset G_f(x,\theta)$

إن أبسط الغوريتم عشوائي لحل المسألة (1) له الشكل:

$$x^0 \in E_n\ , x^{s+1} = x^s - \rho_s\, g(x^s, \quad \theta^s),\ \ s = 0,1,2,\dots, \qquad (2)$$

حيث: x^0 – نقطة ابتدائية، x^s, x^{s+1} – متتاليات تقريبية لحل المسألة، ρ_s – معامل الخطية، $\theta \in \Theta$ – متغير عشوائي.

$g\ (x^s, \theta^s)$– تدرج الدالة $f(x, \theta)$ الواقعة تحت إشارة التكامل في النقطة x^s التي تعتبر مقدّراً عشوائياً لتدرج الدالة $F(x)$ المراد حساب قيمتها الصغرى.

بفرض (Ω, Σ_ω) فضاء مقيس من الفضاءات المقيسة (Ω, Σ)، ولنرمز للمتتالية $\{\theta^s\}$ بـ ω حيث: $\omega \in \Omega$

ولنعرف التطبيق $\pi_s: \Omega \to \Theta$ (مسقط الفضاء... $\Omega = \Theta \times \Theta \times$ على المضروب Θ ذي الرقم s)، بالشكل: $\pi_s(\omega) = \theta^s$.(نريد القول إنه عند بناء الطرق الأمثلية العشوائيَّة فإن القياس يلعب دوراً أساسياً وذلك بالنسبة للمتحولات المحددة والعشوائيَّة الواقعة تحت إشارة التوقع الرياضي).

تعريف(2):

بفرض (Θ, Σ, P) – فضاء احتمالي.

تسمى الدالة $f: E_n \times \Theta \ \to \ E_1$ بالدالة العشوائيَّة القابلة للتفاضل بشكل عام، إذا كانت مقيسة من أجل $\theta \in \Theta$ من أجل كل $x \in E_n$، وقابلة للتفاضل بشكل عام من أجل $x \in E_n$ لأجل كل $\theta \in \Theta$.

تعريف(3):

نسمي شبه تدرج عشوائي(تدرج عام) للدالة العشوائيَّة القابلة للتفاضل(بشكل عام) $f(x, \theta)$ كل $g(x, \theta) \in \beta \ \times \Sigma$ – مقطع مقيس.

بمعنى آخر : (أي تطبيق شبه متدرج للدالة العشوائيَّة $f(x, \theta)$ يسمى تدرجاً عاماً)، وكل الدوال العشوائيَّة القابلة للتفاضل بشكل عام لها تدرجات عامة.

– إذا كان التطبيق $G_f(x, \theta) \in \beta \ \times \ \Sigma$ مقيساً فإن مقطعه:

$g(x, \theta) = arg\ min\ \{\|g\|/g \in G_f(x, \theta)\}$ أيضاً $\beta \ \times \ \Sigma$– مقيس.

النتائج والمناقشة:

2– طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة:[3]

لحل مسألة النمذجة العشوائيَّة المحدّبة الآتية:

$$F\ (x) = Mf(x, \theta) \to \underbrace{min}_{x \in D} \qquad : (3)$$

تُقترح طريقة التقريب العشوائيَّة شبه المتدرجة حيث يستخدم في هذه الطريقة تدرج الدالة العشوائيَّة الواقعة تحت إشارة التوقع الرياضي M، وكذلك عملية الإسقاط على المجموعة المحدبة D، ثم الفضاء الاحتمالي (Θ, Σ, P) والإجراء التالي:

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s - \rho_s \gamma^s \xi^s)\ , s = 0, 1, 2, \dots, \qquad (4)$$

حيث: x^0 – نقطة اختيارية، ρ_s – قيمة الخطوة (عبارة عن شعاع مقيس بالنسبة لـ δ – الجبر)، γ^s – معامل الترقيم (عبارة عن شعاع مقيس بالنسبة لـ δ – الجبر)، $\xi^s(w)$ – شعاع عشوائي يحقق العلاقة الرياضية الشرطية التالية:

$$M\ (\xi^s / x^0, \dots, x^s) = \ a_s F_x^{\wedge}(x^s) + b^s\ , s = 0, 1, 2, \dots.., \qquad (5)$$

حيث: a_s– قيمة عشوائيّة غير سالبة، b^s–شعاع عشوائي(مقيس بالنسبة للجبر الجزئي δ على β_s المولد بالقيم العشوائيَّة $\{x^0, \dots, x^s\}$.

كذلك ρ_s ، γ^s مقيسة بالنسبة لـ β_s.

إن مؤثر الإسقاط π_D على المجموعة المحدبة المغلقة D يقابل كل نقطة $x \in E_n$ بمسقطها $\pi_D(x) \in D$ بحيث يكون: $\|y - \pi_D(x)\| \le \|y - x\| \quad , \forall\ y \in D$

والشعاع: $F_x^\wedge(x^s)$ هو تدرج عام، بمعنى الشعاع الذي يحقق لأجل كل قيمة مثل z المتباينة:

$$F(z) - F(x^s) \ge (F_x^\wedge(x^s), z - x^s)$$

وقد بُحثت طريقة التدرجات العشوائيَّة العامة[3,4] لأجل حل مسألة النمذجةالعشوائيَّة غير المحدبة ذات الدوال القابلة للتفاضل بشكل عام وبشروط محددة:

$$F(x) = M f(x, \theta) \to \underbrace{min}_{x \in D} \qquad (6)$$

عند الشرط: $h(x) \le 0 \ , \ x \in E_n$

حيث: M – إشارة التوقع الرياضي، $\theta \in \Theta$– حدث احتمالي (شعاع)، (Θ, Σ, P) – فضاء احتمالي.

$f(x, \theta): E_n \times \Theta \to E_1$ – دالة عشوائية مقيسة بالنسبة لـ θ لأجل كل x، قابلة للتفاضل بشكل عام بالنسبة لـ x لأجل كل θ، وقابلة للتكامل مع ثابت ليبتشز $L_k(\theta)$ لأجل كلتركيب $K \subset E_n$.

$h: E_n \to E_1$– دالة قابلة للتفاضل بشكل عام، بحيث: $h(x) \to \infty \ ; \quad \|x\| \to \infty$.

❖ **لنعالج المسألة المساعدة التالية:**

إيجاد القيم الصغرى للدالة: $F(x), x \in E_n$ غير المحدبة والقابلة للتفاضل بشكل عام، أي:

$$F(x) = M f(x, \theta) \to \underbrace{min}_{x \in E_n} \qquad (7)$$

ولندرس إمكانية تقارب الإجراء السابق(4)– (5) عند القيم الصغرى الموضعية للدالة $F(x)$.

بما أن: $D = E_n$ فالعلاقات (4) – (5) تُكتب بالشكل:

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s \quad , \qquad s = 0, 1, \dots, \qquad (8)$$

حيث:

$$M(\xi^s / x^o, \dots, x^s) = a_s G^\wedge(x^s) + b^s \qquad (9)$$
$$M \|x^o\|^2 < \infty$$

$G^\wedge(x^s)$– مقطع شبه درجي من مجموعة التدرجات العامة $G(x)$ والذي نختاره غالباً في الناحية التطبيقية على أنه شبه تفاضل كلارك.

لتكن $f(x, \theta)$ الواردة في العلاقة (7) هي دالة عشوائية قابلة للتفاضل بشكل عام وتحقق شرط ليبتشز :

$$|f(x, \theta) - f(y, \theta)| \le L_k(\theta) \|x - y\| \quad (10)$$

وذلك لأجل كل تراص $K \subset E_n$ ومحدودة عليه، وقابلة للتكامل بـ θ مع ثابت ليبتشز $L_k(\theta)$.

$g(x, \theta)$(التدرج العشوائي العام للدالة $f(x, \theta)$) محدود بـ x في كل تراص $K \subset E_n$ منتظم بـ θ أي:

$$\|g(x, \theta)\| \le c_k(\theta) < \infty \ , g(x, \theta) \in g_f(x, \theta) \qquad (11)$$

إن النظرية التالية صحيحة: (نظرية عن التقارب الموضعي لطريقة التدرج العشوائي العام(8) – (9) من أجل المسألة (7) (مسألة إيجاد القيمة الصغرى للدالة غير المحدبة القابلة للتفاضل بشكل عام).

نظرية(2):[1،3].

بفرض(ω) η_s مقدار عشوائي مقيس بالنسبة لـ δ الجبر الجزئي على β_s المولدة بالقيم $\{x^o, \dots, x^s\}$ بحيث من أجل كل تراص $K \subset E_n$ يكون:

$$M\ (\|\xi^2\|^2/x^0, \dots, x^s) \le \eta_s^2 \le C_k^2 \qquad (12)$$

وعامل الترقيم $_s$ يحقق الشرط: $0 < \underline{\gamma} \le \gamma_s \eta_s \le r_s < \infty$

حيث القيم: $\rho_s\ ,a_s\ ,b_s\ ,r_s$ مقيسة بالنسبة لـ $\delta -$ الجبر الجزئي علىβ_s، وبحيث يكون:

(باحتمال مؤكد) $\rho_s \ge 0\ ,a_s \ge 0\ ,\|b^s\|/a_s \to 0$

كذلك:

$$\sum_{s=0}^{\infty} M\ (\rho_s\|b^s\| + \rho_s^2 r_s^2) < \infty \quad , \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty \qquad (13)$$

عندئذٍ من أجل متتالية النقاط$x^s(\omega)$ المعرفة بالعلاقات(8) – (9)تكون المتتالية$F(x^s)$متقاربة، وحيث كل النقاط الحدية $\{x^s(\omega)\}$ تنتمي إلى المجموعة:$X^* = \{X\ /\ 0 \in G_F(x)\}$

بهذا الشكل نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة(1):[1،3]

لتقارب طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة:

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s - \rho_s\gamma_s\ g(x^s\ ,\theta^s)\ ) \quad , \qquad s = 0,1, \dots , \qquad : (14)$$

لأجل مسألة النمذجة العشوائيَّة غير المحدبة وغير الملساء:

$$F\ (x) = \ M\ f\ (x\ ,\theta) \to \underbrace{min}_{x \in D} \qquad : (15)$$

يكفي اختيار $\rho_s \ge 0$ بحيث يكون:$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty\ ,\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 \gamma_s^2 < \infty$

عند ذلك$f(x\ ,\theta)$ يجب أن تكون محدودة وتحقق{من أجل كل تراص K يغطيD (أي$K \supset D$)}شرط ليبتشز بالمتغير x لأجل كلθ، كذلك تكون التدرجات العشوائيَّة العامة$g(x\ ,\theta)$ للدالة$f(x\ ,\theta)$ محدودة بالقيمة المطلقة في هذا التراص لأجل كل θ .أي أن:

اختيار ρ_s المحقق للشروط السابقة يجعل من$f(x\ ,\theta)$ دالة محدودة وكذلك تدرجاتها $g(x\ ,\theta)$.

3. طريقة آررو–كورفيتس(طريقة الفروقات العشوائيَّة المنتهية):[3]

ليكن المطلوب حساب القيمة الصغرى للدالة:

$$F^0(x) = \ Mf^0(x\ ,\theta) \to \underbrace{min}_{x \in D} \qquad (16)$$

عند الشروط:

$$F^i(x) = \ Mf^i(x\ ,\theta) \le 0 \ ; \ i = \overline{1, m} \qquad (17)$$

$$x \in D \qquad (18)$$

لنرمز بـ$\varphi_x^{\wedge}\ (x\ ,u)$– لشعاع التدرج العام لدالة لاغرانج:

$$\varphi(x,u) = F^{o}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \, .F^{i}(x) \qquad (19)$$

بالنسبة للمتغير x عند تثبيت $u = (u_1, \dots, u_m)$

وَ $\pi_u(,u)$– تدرج هذه الدالة بالنسبة لـ$u = (u_1, \dots, u_m)$

واضح أن هذا التدرج يساوي$((F^1(x), \dots, F^m(x))$.

ولتكن متتالية النقاط(x^s, u^s) المعرفة بالشكل التالي[3]:

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s)\,, \quad s = 0,1,\dots, \qquad (20)$$

$$u^{s+1} = \pi_U(u^s + \rho_s \gamma_s \eta^s), \quad s = 0,1,\dots, \qquad (21)$$

حيث:(x^0, u^0)– تقريب ابتدائي اختياري، ρ_s – قيمة الخطوة، γ_s– معامل الترقيم، π_U –مؤثر الإسقاط على المجموعة المحدبة والمغلقةU، والحاوية على المركبةu^* من نقاط الاستقرار (x^*, u^*)لدالة لاغرانج$\varphi(x,u)$في المجال $x \in D$ وحيث: $u \geq 0$ (شريطة وجود نقطة الاستقرار).

$\eta^s\, \xi^s$, – أشعة عشوائية تحقق:

$$M\left(\xi^s / (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)\right) = a_s \varphi_x^{\wedge}(x^s, u^s) + b^s \qquad (22)$$

$$M\left(\eta^s / (x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)\right) = a_s \varphi_u(x^s, u^s) + d^s \qquad (23)$$

بحيث القيمة العشوائيَّة$a_s \geq 0$ والأشعة العشوائيَّة (b^s و d^s) مقيسة بالنسبة لـ δ– الجبر الجزئي على β_s المولد بالقيم العشوائيَّة$\{(x^0, u^0), \dots, (x^s, u^s)\}$.

ولنفرض أن: $F^{\nu}(x)\,,\ \nu = \overline{0,m}$ دوال مستمرة ومحدبة علىD (D– مجموعة محدبة ومغلقة) وبحيث قيود المسألة محققة لشرط سليتر(SLAITER).أي: من أجل الدالة:

$$F(x,c) = F^0(x) + c\sum_{i=1}^{m}[0, F^i(x)]$$

ومن أجل: $c \geq \bar{c}$ ($\bar{c}$ عدد ما) فإن شرط سليتر يكون:

$$\arg\ \min F(x,c) \in X^*\,; \ \ X^* = \{X \,/\, 0 \in G_F(x)\}$$

أي أن لدالة لاغرانج$\varphi(x,u)$ نقطة سرجية(saddle point) أو نقطة استقرار (x^*, u^*) على المجال $x \in D$ وحيث $u \geq 0$، وكذلك المجموعة أو المركبة$\{u^*\}$ المنتمية للمجموعة$W = \{(x^*, u^*)\}$ هي أيضاً محدودة.

لحل مسألة النمذجة العشوائيَّة العامة (28) – (30) أي لحل المسألة:

$$F^0(x) = \ Mf^0(x,\theta) \to \underset{x \in D}{\underbrace{min}}$$

عند الشروط:$x \in D$, $F^i(\ \ ) = Mf^i(x,\theta) \leq 0\ ;\ i = \overline{1,m}$

وحيث:$f^{\nu}(x,\theta), \nu = 0,1,\dots,m$محدبة تحقق شرط ليبتشز بالمتغير x لأجل كل θعلى المجال الموسع للدالة $K \supset D$، حيث D مجموعة محدبة مغلقة ومحدودة في E_n .

تقترح الطريقة التالية: [1]

$$x^{s+1} = \pi_D\left(x^s - \rho_s\left[\xi^0(x^s, \theta^s) + \sum_{i=1}^{m} u_i^s \,.\, \xi^i(x^s, \theta^s)\right]\right), \qquad (24)$$

$$u^{s+1} = \pi_U(u^s + \rho_s L_u(x^s, u^s, \theta^s)) \quad , \quad s = 0, 1, \ldots, \qquad (25)$$

حيث:

$L_u(x, u, \theta)$ تدرج الدالة:

$L(x,u,\theta) = f^0(x,\theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x,\theta)$, (26) (بالنسبة للمتغير u).

$-\xi^\nu(x^s, \theta^s)$ تدرج الدوال: $f^\nu(\,,\theta), \nu = 0, 1, \ldots, m$ أو قيمها التقريبية.

وما يخص الدوال غير الملساء وبشكل خاص الدوال غير القابلة للتفاضل $F^\nu(x), \nu = \overline{0,m}$ يتبين [2] أنه بضبط مناسب للخطوة ρ_s يمكن الحصول أو البرهان على تقارب طريقة آررو–كورفيتس العشوائيَّة وكذلك في هذه الحالة المدروسة.

سندرس الآن إمكانية تقارب طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة لإيجاد الحل الأمثل لمتحولات مجمّع الطاقة الشمسية الخاص بالحصول على الماء العذب وبافتراض أن المحطة أو المجمّع يعمل N يوماً،فإن المسألة المطروحة (دالة هدفية ومجموعة شروط) تكون:

يطلب إيجاد $x = (s, v, w)$ في المسألة التالية:

$$\frac{N}{365}(\alpha + \varepsilon)[p(s) + q(v)] + r(w) + M\sum_{k=1}^{N} d_k^-(y_k^-) \to \underbrace{min}_{x\in D} \qquad (27)$$

حيث:

$$D = \{s \geq 0, v \geq 0, 0 \leq w \leq v\}$$

$$p(s) = c_1 . s \,, \quad q(v) = c_2 . v^n \;;(0 < n < 1) \qquad (28)$$

$$r(w) = c_3 . w \,,$$

$$d_k^-(y_k^-) = c_3 . y_k^-(\theta_k) \qquad (29)$$

$$y_k^-(\theta) = \max[0\,; -\varphi_k(\theta_k)], k = \overline{1,N}$$

$$\varphi_0 = w$$

$$\varphi_k = max[0, min(v, \varphi_{k-1})] + s . g(\theta_k) - \pi_k \;; k = \overline{(1,N)} \qquad (30)$$

وحيث تشير الرموز:

s– مساحة المجمع الشمسي، v – سعة مجمع الماء العذب، w – احتياطي الماء العذب، ($0 \leq w \leq v$).

$P(s)$– تمثل نفقات بناء المحطة بمساحة قدرها s، $q(v)$– تمثل نفقات إنشاء خزان الماء العذب بحجم v، $r(w)$– تمثل نفقات لتأمين الماء الاحتياطي العذب، $M(U)$– التوقع الرياضي للخسارة ، α و ε ثوابت تتعلق برأس المال المستثمر. كما أنَّ: c_1 , c_2 , c_3 هي ثوابت أيضاً.

ولأجل كل ($k = \overline{1,N}$) نفترض المتغيرات العشوائيَّة التالية:[4]

θ_k – مجمل الإشعاع الشمسي اليومي الساقط.

$g(\theta_k)$–مردود 1م^2 من المحطة الشمسية، (م^3 / يوم).

y_k^- – مقدار النقص في الماء العذب (م^3).

d_k^-– الخسارة الناتجة عن نقص كل 1 م^3 ماء عذب (ل.س).

وكل هذه القيم معرَّفة على الفضاء الاحتمالي التالي: $(\Omega \,, F \,, P)$

وبذلك تكون المسألة المعطاة هي مسألة نمذجة عشوائية غير محدّبة وغير ملساء على المجموعة المحدّبة D ، لذلك لحلها يمكن استخدام طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة.

لحساب التدرجات العشوائيَّة العامة نكتب الدالة الهدفية بالشكل:

$$F(x) = f^{\sim}(s,v,w) + Mf(s,v,w,\theta) \qquad (31)$$

حيث:

$$f(s,v,w,\theta) = \sum_{k=1}^{N} d_k^{-} .max\ (0, -\varphi_k(\theta_k)) \qquad (32)$$

الدالة:$f(s,v,w)$ ملساء، لكن الدالة $f(s,v,w,\theta)$ الواقعة تحت إشارة التوقع الرياضي عند تثبيت θ بالحالة العامة تعتبر غير ملساء بـ v, sw , .

نظرية 3:

إذا كان للقيم العشوائيَّة$\overline{1,N}$ $\varphi_k\ ,k =$ كثافة توزيع، فإن الدالة$F(s,v,w)$ المعطاة بوساطة العلاقات(28) – (30)تكون قابلة للتفاضل حسب كلارك على المجموعة:

$D = \{s \geq 0, v \geq 0, 0 \leq w \leq v\}$.

ويكون:

$$\begin{pmatrix} F_s(s,v,w) \\ F_v(s,v,w) \\ F_w(s,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s^{\sim}(s,v,w) \\ f_v^{\sim}(s,v,w) \\ f_w^{\sim}(s,v,w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M\sum_{k=1}^{N} d_k^{-} u_k .(\varphi_k)_s \\ M\sum_{k=1}^{N} d_k^{-} u_k .(\varphi_k)_v \\ M\sum_{k=1}^{N} d_k^{-} u_k .(\varphi_k)_w \end{pmatrix} \qquad (33)$$

حيث:

$$u_k = \begin{cases} -1 \ , & \varphi_k < 0 \\ 0 \ , & \text{في الحالة المعاكسة} \end{cases} \qquad (34)$$

$$(\varphi_0)_s = 0$$

$$(\varphi_k)_s = g(\theta_k) + \begin{cases} (\varphi_{k-1})_s & ,0 < \varphi_{k-1} < v \\ 0 \ , & \text{في الحالة المعاكسة} \end{cases} \qquad (35)$$

$$(\varphi_0)_v = 0$$

$$(\varphi_k)_v = \begin{cases} 0 \ , & \varphi_{k-1} \leq 0 \\ (\varphi_{k-1})_v \ , & 0 < \varphi_{k-1} < v \\ 1 \ , & \varphi_{k-1} \geq v \end{cases} \qquad (36)$$

$$(\varphi_0)_w = 1$$

$$(\varphi_k)_w = \begin{cases} (\varphi_{k-1})_w & ,0 < \varphi_{k-1} < v \\ 0 \ , & \text{في الحالة المعاكسة} \end{cases} \qquad (37)$$

البرهان:

في الحقيقة الدالة: $f^{\sim}(s,v,w) + f(s,v,w,\theta)$ بعد تعويض (29)–(30) فيها تعتبر قابلة للتفاضل بالنسبة لـ $v,\ sw$, باحتمال أكيد وذلك من أجل أي $(s,v,w) \in D$ باستثناء الشعاع $\{s \geq 0, v = 0, w = 0\}$.

مشتق الدالة $f(s,v,w,\theta)$ في النقاط التي هي قابلة للتفاضل فيها يكون:

$$f_s(s,v,w,\theta) = \sum_{k=1}^{N} d_k^- . u_k . (\varphi_k)_s \ ,$$
$$f_v(s,v,w,\theta) = \sum_{k=1}^{N} d_k^- . u_k . (\varphi_k)_v , \qquad (38)$$
$$f_w(s,v,w,\theta) = \sum_{k=1}^{N} d_k^- . u_k . (\varphi_k)_w ,$$

حيث: $\{u_k, (\varphi_k)_s, (\varphi_k)_v, (\varphi_k)_w\}\ ,\ k = \overline{1, N}$ محددة بالعلاقات (34) – (37).

ومن العلاقات (34) – (38) نستنتج بسهولة وجود التوقعات الرياضية للدوال:

$f_s(s,v,w,\theta)\ , f_v(s,v,w,\theta)\ , f_w(s,v,w,\theta)$ طالما التقديرات التالية محققة:

$$|f_s(s,v,w,\theta)| \leq \underbrace{max}_{k}\, d_k^- \ . \ N \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{k} g(\theta_l)$$
$$|f_v(s,v,w,\theta)| \leq \underbrace{max}_{k}\, d_k^- \ . \ N \qquad (39)$$
$$|f_w(s,v,w,\theta)| \leq \underbrace{max}_{k}\, d_k^- \ . \ N$$

والدوال الواقعة في القسم الأيمن من هذه المتباينات لها توقعات رياضية.

قابلية الدالة $Mf(s,v,w,\theta)$ للتفاضل باحتمال مؤكد ينتج من نظرية ليبنغ:[2]

$$(Mf(s,v,w,\theta))_s = \lim_{h\to 0} M \frac{f(s+h,v,w,\theta) - f(s,v,w,\theta)}{h} = \\ = M\, f_s(s,v,w,\theta)\ ,$$

$$(Mf(s,v,w,\theta))_v = \lim_{h\to 0} M \frac{f(s,v+h,w,\theta) - f(s,v,w,\theta)}{h} = \\ = M\, f_v(s,v,w,\theta)\ ,$$

$$(Mf(s,v,w,\theta))_w = \lim_{h\to 0} M \frac{f(s,v,w+h,\theta) - f(s,v,w,\theta)}{h} = \\ = M\, f_w(s,v,w,\theta)\ ,$$

كذلك:

$$\left|\frac{f(s+h,v,w,\theta)-f(s,v,w,\theta)}{h}\right| \le \underbrace{max}_{k}\ d_k^- . \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{k} g\,(\theta_\ell)$$

$$\left|\frac{f(s,v+h,w,\theta)-f(s,v,w,\theta)}{h}\right| \le \underbrace{max}_{k}\, d_k^-\ .N$$

$$\left|\frac{f(s,v,w+h,\theta)-f(s,v,w,\theta)}{h}\right| \le \underbrace{max}_{k}\, d_k^-\ .N$$

وذلك مهما يكن $h \in E_1$.

الدوال الواقعة في القسم الأيمن من المتباينات الثلاث الأخيرة لها توقعات رياضية، وهذه المتباينات نفسها تعتبرمقدِّرات لـ : $\{f_w(s,v,w,\theta)$ و $f_v(s,v,w,\theta), f_s(s,v,w,\theta)\}$ على الترتيب.

وعند ذلك نحصل على (33) (صيغة تفاضل كلارك)،حيث: $u_k, (\varphi_k)_s, (\varphi_k)_N, (\varphi_k)_w$ محددة بالعلاقات(34) – (37). وهو المطلوب برهانه.

بما أن الدالة العشوائيَّة القابلة للتفاضل بشكل عام: $f^{\sim}(s,v,w) + f(s,v,w,\theta)$ للمسألة(27) – (30) محدودة في المجال $\{s \ge 0\,, v \ge 0\,, 0 \le w \le v\}$ $D =$ وبشكل خاص في المجال المقتطع:

$$D_0 = \{0 < \underline{s} \le s \le \bar{s} < \infty\ ,\quad 0 < \underline{v} \le v \le \bar{v} < \infty,\ 0 \le w \le v\}$$

وتحقق شرط ليبتشز بثابت محدد، فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية:

نتيجة(2):

طريقة مسقط التدرج العشوائي(14) التالية:

$$x^{s+1} = \pi_D(x^s - \rho_s\gamma_s\ g(x^s, \theta^s))\ ,s = 0,1,\dots$$

متقاربة من أجل الأنموذج الموضح بالعلاقات:(27)–(30) في المجال D وبالتالي في المجال المقتطع D_0

وذلك عند اختيار التقريب الأول (الابتدائي): $x^0 = (s^0, v^0, w^0)$ من المجال D_0

و : $\rho_s \ge 0$ بحيث يكون:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty\ , \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2\gamma_s^2 < \infty$$

الاستنتاجات والتوصيات:

يمكن مقارنة طرق عشوائية أخرى بالطريقتين المذكورتين، ومن ثم تحديد الطريقة الأمثل في نفس الشروط التي تخضع لها المسألة، كما نقترح تطبيق طريقة مسقط التدرجات العشوائيَّة العامة على نماذج مماثلة لأنموذج مجمّع الطاقة الشمسية وبعدد أكبر من المتغيرات.

المراجع:

[1] MIHALEVECHV.C.GUPALA.M.NORKIN V.I. non convex optimization techniques- m. Science 1997. 280S.

[2] YRMOLIEV. U.M. YASTREMCKI. A.E. Methods of stochastic programming problems of Planning reserves- cybernetics ,1999, 320 c.

[3] NIKIFOROVV.A. mathematical simple model of solar collector heating buildings- heliotekhnika.1983. №1,pp56-80

[4] KUTLEEVK.K.,SEYITKURBANOV C.SEKAEV V. A. , URYASEVS.P. calculation method of autonomous systems water and electricity to the helio-wind power plants. Ashgabat. NGOs*Sun*Turkmenian Academy of Sciences, 1987 35C.

[5] FOUSKAKIS, D. and DRAPER,D. Stochastic Optimization:2002.

[6] RUSZCYNKI, A. Nonlinear Optimization, Princeton University Press2011

[7] GOFFIN, J. L. Subgradient Optimization In Nonsmooth Optimization 2010.