مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (6) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (6) 2014

حلول تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة Fitzhug–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقة الدالة الأسية

الدكتور سامي انجرو*
الدكتور رامز كروم **

(تاريخ الإيداع 12 / 10 / 2014. قُبِل للنشر في 28 / 12 /2014)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة، باستخدام طريقة الدالة الأسية، حيث تم تمثيل أحد هذه الحلول بيانياً. وتبين النتائج التي حصلنا عليها، بمساعدة برامج الحسابات الرياضية مثل Maple وMathematica، أن هذه الطريقة بسيطة ومباشرة وفعالة جداً لحل هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، ولا تتطلب معرفة رياضية متقدمة، ولذلك فهي مناسبة للباحثين العلميين والمهندسين.

الكلمات المفتاحية: معادلة Fitzhugh–Nagumo – الحل التام – الدالة الأسية – الموجة المنعزلة – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (36) العدد (6) 2014
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (36) No. (6) 2014

Exact Solitary Wave Solutions to Generalized Fitzhug-Nagumo Equation with Constant Coefficients by Using Exp-function Method

Dr. Sami Injrou*

Dr. Ramez Karoum**

(Received 12 / 10 / 2014. Accepted 28 / 12 /2014)

□ ABSTRACT □

The goal of this work is finding exact solitary wave solutions to generalized Fitzhug-Nagumo equation with constant coefficients, by using the exp-function method, where we have illustrated graphically one of them, the obtained results, with aid of symbolic programs as Maple and Mathematica, show that this method is simple, direct and very efficient for solving this kind of nonlinear PDEs, and it requires no advanced mathematical knowledge, so it is convenient to scientists and engineering.

Keywords: Fitzhug-Nagumo equation - exact solution- exp-function – solitary wave - nonlinear partial differential equations.

***Assistant Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

****Assistant Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة:

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية نماذج رياضية تفسر الظواهر الفيزيائية المعقدة والتي تأتي من مسائل هندسية وكيميائية وفيزيائية وبيولوجية وميكانيكية....

يلعب إيجاد الحل التام أو الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية دوراً هاماً في مجال الفيزياء الرياضية وخاصة في نظرية الموجة المنعزلة(soliton theory) [1،2]، وتعتبر معادلة Fitzhugh–Nagumo أحد هذه المعادلات، والتي ترجع إلى كل من الباحثين Fitzhugh في [3] وNagumo وآخرين في [4]، حيث أخذت هذه المعادلة اهتمام الكثيرين، نظراً لأهميتها الكبيرة في مجال الفيزياء الرياضية، حيث نجد العديد من تطبيقاتها في مجالات كثيرة منها انتشار اللهب والنمو السكاني اللوجستي والفيزيولوجيا العصبية وعملية الحركة البراونية المتفرعة والتفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز ونظرية المفاعل النووي [5، 6،7، 8، 9، 10]، وتعطى هذه المعادلة بالعلاقة التالية:

$$u_t = u_{xx} - u(1-u)(\rho - u) \qquad (1)$$

حيث $0 \le \rho \le 1$، و $u(x,t)$ دالة مجهولة تمثل الجهد الكهربائي عبر غشاء الخلية، وأجري فيما بعد تعديلات على هذه المعادلة، فقدم كل من Browne وMomoniat و Mohamed في [8] شكل آخر من معادلة Fitzhugh–Nagumo سمي بمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة، ثم درسBhrawy في [11] عددياً معادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال التابعة للزمن مع حد التشتت الخطي مستخدماً طريقة Lobatto collocation–Gauss–Jacobi مع شروط حدية غير متجانسة. قام مؤخراً كروم وانجرو [12] بإيجاد حلول تامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقة التكامل الأول.

ظهرت حديثاً طرق جديدة لإيجاد الحلول التامة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية والتي تعتمد في أغلبها على موازنة الحد الخطي ذي المرتبة الأعلى مع الحد غير الخطي [13 ، 14 ، 15 ، 16 ، 17 ، 18 ، 19]، ومن هذه الطرق نجد طريقة الدالة الأسية(Exp–function method)، التي وضعها He و Wu في [19]، والتي تعتبر واحدة من الطرق متعددة الاستخدامات في حل المسائل غير الخطية التي تواجه الباحثين، ولا تتطلب أي معلومات متقدمة في الرياضيات، غير أنها تتطلب معرفة باستخدام برامج الحسابات الرياضية مثل Maple و Mathematica ....

تتجلى ميزة هذه الطريقة في أنها تعطي حلولاً معممة منعزلة (generalized solitary solutions)، وحلولاً دورية (periodic solutions)، وحلول (compact–like)، واستخدمت هذه الطريقة لإيجاد الحلول التامة ذات الموجة

المنعزلة (*solitary wave solution*) لكثير من المعادلات التفاضلية الجزئية، وبشكل خاص لمعادلة Fitzhugh – Nagumo التقليدية في [20 ، 21 ، 22]، ونسعى في مقالتنا هذه إلى استخدام هذه الطريقة لإيجاد حلول تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة المعطاة بالعلاقة:

$$u_t + \alpha u_x - u_{xx} + u(1-u)(\rho - u) = 0 \qquad (2)$$

حيث $\alpha \neq 0$ وسيط ثابت

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي حلولاً تامة جديدة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة والتي تعتبر في غاية الأهمية للباحثين في المجالات العلمية التطبيقية (الفيزياء– الكيمياء– علم الأحياء....)، حيث تعين الثوابت الكيفية في هذه الحلول من الشروط الحدية للمسألة، ويهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول تامة ذات موجة منعزلة (*solitary wave solutions*) لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة باستخدام طريقة الدالة الأسية.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطية وبرامج الحساب الصيغية.

النتائج والمناقشة:

سنعرض أولاً طريقة الدالة الأسية التي وضعها He و Wu في [19]:

طريقة الدالة الأسية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية، بمتحولين مستقلين فقط، التالية:

$$P\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \ldots\right) = 0 \qquad (3)$$

كثيرة حدود دالية (لـ $u(x,t)$ ومشتقاته الجزئية)، أو هي دوال يمكن أن تختزل إلى كثيرات حدود دالية باستخدام بعض التحويلات.

باستخدام تحويل الموجة الجوالة (Travelling wave transformation):

$$u(x,t) = u(\xi) \;\; ; \;\; \xi = kx - wt \qquad (4)$$

حيث k و w ثابتان يعينان لاحقاً. تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية (3) إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية لـ $u(\xi)$:

$$Q\left(u, u', u'', u''', \ldots\right) = 0 \qquad (5)$$

تعتمد هذه الطريقة على فرضية أن حلول الموجة الجوالة (Travelling wave solutions)، تكتب بالشكل التالي:

$$u(\xi)=\frac{\sum_{i=-d}^{c} a_i e^{i\xi}}{\sum_{j=-q}^{p} b_j e^{j\xi}} \qquad (6)$$

حيث إن c و d و p و q أعداد صحيحة موجبة يطلب تعيينها و a_i و b_j ثوابت مجهولة أيضاً حيث $i=-d,...,c\ ,\ j=-q,...,p$، ولنفرض أن العلاقة (6)، تكتب بالشكل التالي:

$$u(\xi)=\frac{a_c e^{c\xi}+\cdots+a_{-d}e^{-d\xi}}{b_p e^{p\xi}+\cdots+b_{-q}e^{-q\xi}} \qquad (7)$$

حيث تحدد الأعداد الصحيحة الموجبة c و d و p و q، بموازنة الحد الخطي ذي المرتبة الأعلى في المعادلة (5) مع الحد غير الخطي الأعلى رتبة، وبتعويض الحل (7) في المعادلة (5)، نحصل على معادلات جبرية لـ e^{ξ}، ثم نجعل أمثال قوى e^{ξ} تساوي الصفر، لنحصل بعد ذلك على جملة من المعادلات الجبرية غير الخطية، وبحلها باستخدام برامج حساب صيغية مثل Maple وMathematica ...، نحصل على الثوابت a_i و b_j حيث $i=-d,...,c\ ,\ j=-q,...,p$، ثم نعوض قيمها في الحل (7) لنحصل على حل المعادلة (3).

حلول تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة:

بتعويض تحويل الموجة الجوالة (4) في المعادلة (2)، نحصل على المعادلة التفاضلية العادية غير الخطية التالية:

$$(w+\alpha k)u'-k^2u''+u(1-u)(\rho-u)=0 \qquad (8)$$

بموازنة الحد الخطي ذي المرتبة الأعلى u'' مع الحد غير الخطي الأعلى مرتبة u^3، نحصل على:

$$u''(\xi)=\frac{c_1e^{(3p+c)\xi}+\cdots}{c_2e^{4p\xi}+\cdots} \qquad (9)$$

$$u^3(\xi)=\frac{c_3e^{(p+3c)\xi}+\cdots}{c_4e^{4p\xi}+\cdots} \qquad (10)$$

حيث c_i مع $i=1,2,3,4$، عوامل ثابتة معلومة، وضعت بغية تبسيط العلاقة. وبموازنة أعلى رتبة للدالة الأسية في المعادلتين (9) و(10)، نحصل على:

$$3p+c=p+3c \qquad (11)$$

ومنه:

$$p=c \qquad (12)$$

وبشكل مشابه نوازن أخفض مرتبة:

$$u''(\xi)=\frac{\cdots+d_1e^{-(3q+d)\xi}}{\cdots+d_2e^{-4q\xi}} \qquad (13)$$

$$u^3(\xi)=\frac{\cdots+d_3e^{-(q+3d)\xi}}{\cdots+d_4e^{-4q\xi}} \qquad (14)$$

حيث d_i مع $i=1,2,3,4$، عوامل ثابتة معلومة، وضعت بغية تبسيط العلاقة أيضاً، ومنه:

$$-(3q+d)=-(3d+q) \qquad (15)$$

ومنه:

$$q = d \tag{16}$$

هذا يعني أنه لدينا الحرية في اختيار الأعداد الصحيحة الموجبة p و q، لكن يتبين من [19] و [20]، أن طبيعة الحلول مستقلة عن اختيار قيم p و q، لذلك سنعالج في حالتنا هذه فقط من أجل $p = c = 1$ و $q = d = 1$، وبالتالي يصبح الحل (7) بالشكل التالي:

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_0 + a e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + b_0 + b e^{-\xi}} \tag{17}$$

حيث وضعنا a بدلاً من a_{-1} و b بدلاً من b_{-1} بغية تجنب كثرة الأدلة. بتعويض (17) في (8) وبإجراء بعض الحسابات نحصل على العلاقة:

$$\frac{1}{C}\left[C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^{\xi} + C_0 + C_{-3} e^{-3\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-1} e^{-\xi}\right] = 0 \tag{18}$$

حيث:

$$C = \left(b_1 e^{\xi} + b_0 + b e^{-\xi}\right)^3$$

$$C_3 = -a_1^2 b_1 + a_1 b_1^2 \rho - a_1^2 \rho b_1 + a_1^3$$

$$\begin{aligned} C_2 = {} & 3a_1^2 a_0 - a_1^2 b_0 + a_0 b_1^2 \rho - w a_0 b_1^2 - \alpha k a_0 b_1^2 - k^2 a_0 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_0 \\ & - a_1^2 \rho b_0 + w a_1 b_0 b_1 + \alpha k a_1 b_0 b_1 + k^2 a_1 b_1 b_0 + 2a_1 b_1 \rho b_0 - 2a_1 a_0 \rho b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = {} & \alpha k a_1 b_0^2 + 2a_1 b_1 \rho b - 2\alpha k a b_1^2 - a_1^2 b + a b_1^2 \rho - 2w a b_1^2 - 4k^2 a b_1^2 - 2a_1 b_1 a \\ & - k^2 a_1 b_0^2 + a_1 b_0^2 \rho - 2a_1 b_0 a_0 + w a_1 b_0^2 - a_1^2 \rho b - w a_0 b_1 b_0 + k^2 a_0 b_1 b_0 - 2a_1 a_0 \rho b_0 \\ & + 2a_0 b_1 \rho b_0 + 2w a_1 b b_1 + 4k^2 a_1 b_1 b - 2a_1 a \rho b_1 + 3a_1 a_0^2 + 3a_1^2 a + 2\alpha k a_1 b b_1 \\ & - \alpha k a_0 b_1 b_0 - a_0^2 b_1 - a_0^2 \rho b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 = {} & -a_0^2 b_0 + 2a b_1 \rho b_0 - 2a_0 a \rho b_1 + 3w a_1 b_0 b - 3w a b_1 b_0 + a_0 b_0^2 \rho + a_0^3 - 2a_1 a_0 \rho b \\ & - 2a_1 a \rho b_0 + 2a_0 b_1 \rho b - 3k^2 a_1 b_0 b - 3k^2 a b_1 b_0 + 6k^2 a_0 b_1 b + 2a_1 b_0 \rho b - 2a_1 b_0 a \\ & - 2a_1 b a_0 + 6a_1 a_0 a - 2a_0 b_1 a - a_0^2 \rho b_0 + 3\alpha k a_1 b_0 b - 3\alpha k a b_1 b_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{-1} = {} & 3a_1 a^2 - a_0^2 b - a^2 b_1 - \alpha k a b_0^2 + 2\alpha k a_1 b^2 + 3a_0^2 a - 2\alpha k a b_1 b + \alpha k a_0 b b_0 \\ & - a^2 \rho b_1 + 2w a_1 b^2 - 4k^2 a_1 b^2 - 2a_1 b a + a_1 b^2 \rho - 2a_0 b_0 a - w a b_0^2 - k^2 a b_0^2 \\ & - a_0^2 \rho b + a b_0^2 \rho + w a_0 b b_0 + k^2 a_0 b b_0 + 2a_0 b_0 \rho b - 2w a b_1 b - 2a_0 a \rho b_0 \\ & + 4k^2 a b_1 b - 2a_1 a \rho b + 2a b_1 \rho b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{-2} = {} & -w a b_0 b - \alpha k a b_0 b + k^2 a b_0 b - 2a_0 a \rho b + 2a b_0 \rho b - a^2 \rho b_0 + a_0 b^2 \rho \\ & - 2a_0 b a + w a_0 b^2 + \alpha k a_0 b^2 - k^2 a_0 b^2 - a^2 b_0 + 3a_0 a^2 \end{aligned}$$

$$C_{-3} = a^3 - a^2 b + a b^2 \rho - a^2 \rho b$$

بجعل:

$$C_3 = 0\,,\, C_2 = 0\,,\, C_1 = 0\,,\, C_0 = 0\,,\, C_{-1} = 0\,,\, C_{-2} = 0\,,\, C_{-3} = 0 \tag{19}$$

نحصل على جملة معادلات جبرية غير خطية بالنسبة للمجاهيل a و a_0 و a_1 و b و b_0 و b_1 و k و w، وبحل الجملة (19) مستخدمين برنامج Maple، نحصل على الحالات التالية:

حالة 1: إذا كان $a=0,\ a_0=0,\ a_1=b_1,\ b=0,\ k=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}},\ w=\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\dfrac{1}{2}$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل الموجة المنعزلة للمعادلة (2)، وهو ذاته الموجود في المقالة [22] و [20] في حالة إذا وضعنا $\alpha=0$:

$$u(x,t)=\frac{b_1}{b_1+b_0\exp\left(\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}x-\left(\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\dfrac{1}{2}\right)t\right)} \qquad (20)$$

حيث b_0 و b_1 ثابتان كيفيان. بوضع $b_1=1$ و $b_0=-1$ و $\alpha=0$ نحصل على:

$$u(x,t)=\frac{b_1}{1-\exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{2}(1-2\rho)t\right)}=\frac{1}{2}\left[1+\coth\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{4}(1-2\rho)t\right]\right] \qquad (21)$$

وهو نفس الحل الذي حصل عليه Li وGuo في [21] وAhmad Hajipour وMolla Mahmoudi في [20].

حالة 2: إذا كان $a=0,\ a_0=0,\ a_1=\rho b_1,\ b=0,\ k=\dfrac{\pm\rho}{\sqrt{2}},\ w=\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho-\rho+\dfrac{1}{2}\rho^2$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على الحل:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1}{b_1+b_0\exp\left(\dfrac{\mp\rho}{\sqrt{2}}x-\left(\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho-\rho+\dfrac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \qquad (22)$$

حيث b_0 و b_1 ثابتان كيفيان.

وإذا كان $a=0,\ a_0=0,\ a_1=b_1,\ b_0=0,\ k=\dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}},\ w=\dfrac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha-\dfrac{1}{2}\rho+\dfrac{1}{4}$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (20) ولكن بثوابت كيفية b و b_1.

وفي حالة كان $a=0,\ a_0=0,\ a_1=b_1\rho,\ b_0=0,\ k=\dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}}\rho,\ w=\dfrac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha\rho-\dfrac{1}{2}\rho+\dfrac{1}{4}\rho^2$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (22) ولكن بثوابت كيفية b و b_1.

حالة 3: إذا كان $a=0,a_0=\dfrac{3\rho b_0}{(1+\rho)},a_1=0,b=\dfrac{1}{8}\dfrac{{b_0}^2(2\rho^2-5\rho+2)}{b_1(1+\rho)^2},k=\pm\sqrt{\rho},w=\mp\alpha\sqrt{\rho}$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{3\rho b_0}{(1+\rho)\left(b_1\exp\left(\pm\sqrt{\rho}x\mp\alpha\sqrt{\rho}t\right)+b_0+\dfrac{1}{8}\dfrac{{b_0}^2(2\rho^2-5\rho+2)}{b_1(1+\rho)^2}\exp\left(\mp\sqrt{\rho}x\pm\alpha\sqrt{\rho}t\right)\right)} \qquad (23)$$

حيث b_0 و b_1 ثابتان كيفيان.

وإذا كان $a=0,a_0=b_0,a_1=0,b_1=0,k=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}},w=\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\dfrac{1}{2}$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (20) ولكن بثوابت كيفية b و b_0.

وإذا كان $a=0,\ a_0=\rho b_0,\ a_1=0,\ b_1=0,\ k=\dfrac{\pm\rho}{\sqrt{2}},\ w=\dfrac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho-\rho+\dfrac{1}{2}\rho^2$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (22) ولكن بثوابت كيفية b و b_0.

حالة 4: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}$, $k=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $a=0,\ a_0=b_0,\ a_1=0,\ b=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{b_0}{b_0+b_1\exp\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\right)t\right)} \tag{24}$$

حيث b_0 و b_1 ثابتان كيفيان.

حالة 5: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho+\rho-\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}$, $a=0,\ a_0=b_0\rho,\ a_1=0,\ b=0$، فإن التعويض

في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_0}{b_0+b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho+\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{25}$$

حيث b_0 و b_1 ثابتان كيفيان.

حالة 6: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}$, $k=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $a=0, b_0=\frac{a_0^{\,2}+a_1b}{a_0}, b_1=a_1$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{a_1\exp\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\right)t\right)+a_0}{a_1\exp\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\right)t\right)+\frac{a_0^{\,2}+a_1b}{a_0}+b\exp\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\right)t\right)} \tag{26}$$

حيث b و a_0 و a_1 ثوابت كيفية.

حالة 7: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho-\rho+\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}$, $a=0, b_0=\frac{a_0^{\,2}+\rho^2b_1b}{\rho a_0}, a_1=\rho b_1$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+a_0}{b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+\frac{a_0^{\,2}+\rho b_1b}{a_0}+b\exp\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{27}$$

حيث b و a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 8: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\alpha\rho-\rho+\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}$, $a=0, b_0=\frac{a_0^{\,2}+\rho^2b_1b}{\rho a_0}, a_1=\rho b_1$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+a_0}{b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+\frac{a_0^{\,2}+\rho^2b_1b}{\rho a_0}+b\exp\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha-\rho+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{28}$$

حيث b و a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

وإذا كان $w=\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{4}$, $k=\frac{\pm1}{2\sqrt{2}}$, $a=b,\ a_0=0,\ a_1=0,\ b_0=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (24) ولكن بثوابت كيفية b و b_1.

وفي حالة كان $w=\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha\rho+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{4}\rho^2$, $k=\frac{\pm1}{2\sqrt{2}}\rho$, $a=\rho b,\ a_0=0,\ a_1=0,\ b_0=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (25) ولكن بثوابت كيفية b و b_1.

وإذا كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}$, $k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}$, $a=b, a_0=0, a_1=0, b_1=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (24) ولكن بثوابت كيفية b و b_0.

وفي حالة كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha\rho+\rho-\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\rho$, $a=\rho b,\ a_0=0,\ a_1=0,\ b_1=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على حل مشابه للحل (25) ولكن بثوابت كيفية b و b_0.

حالة 9: إذا كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm(\rho-1)}{\sqrt{2}}$, $a=b, a_0=\rho b_0, a_1=0, b_1=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_0+b\exp\left(\frac{\pm(\rho-1)}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)}{b_0+b\exp\left(\frac{\pm(\rho-1)}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{29}$$

حيث b_0 و b ثوابت كيفية.

حالة 10: إذا كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm(\rho-1)}{\sqrt{2}}$, $a=\rho b, a_0=b_0, a_1=0, b_1=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{b_0+\rho b\exp\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)}{b_0+b\exp\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp(\rho-1)}{\sqrt{2}}\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{30}$$

حيث b_0 و b ثوابت كيفية.

حالة 11: إذا كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}$, $k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}$, $a=a, a_1=0, b=a, b_0=\frac{a_0^{\,2}+ab_1}{a_0}, b_1=a_1$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{a_0+a\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\right)t\right)}{a_1\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\right)t\right)+\frac{a_0^{\,2}+b_1a}{a_0}+a\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\right)t\right)} \tag{31}$$

حيث b_1 و a_0 و a_1 ثوابت كيفية.

حالة 12: إذا كان $w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha\rho+\rho-\frac{1}{2}\rho^2$, $k=\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}$, $a=\rho b, b_0=\frac{a_0^{\,2}+\rho^2b_1b}{\rho a_0}, a_1=0$، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{a_0+\rho b\exp\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)}{b_1\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}x+\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+\frac{a_0^2+\rho^2b_1b}{\rho a_0}+b\exp\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}x-\left(\frac{\mp\rho}{\sqrt{2}}\alpha+\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{32}$$

حيث b و a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 13: إذا كان $a=\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{b_1(2\rho-1)},a_1=b_1,b=\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{b_1(2\rho-1)},b_0=\frac{-a_0(\rho-2)}{(2\rho-1)},k=\pm\sqrt{1-\rho},w=\mp\alpha\sqrt{1-\rho}$،

فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{b_1\exp\left(\pm\sqrt{1-\rho}x\mp\alpha\sqrt{1-\rho}t\right)+a_0+\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{b_1(2\rho-1)}\exp\left(\mp\sqrt{1-\rho}x\pm\alpha\sqrt{1-\rho}t\right)}{b_1\exp\left(\pm\sqrt{1-\rho}x\mp\alpha\sqrt{1-\rho}t\right)-\frac{a_0(\rho-2)}{2\rho-1}+\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{b_1(2\rho-1)}\exp\left(\mp\sqrt{1-\rho}x\pm\alpha\sqrt{1-\rho}t\right)} \tag{33}$$

حيث a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 14: إذا كان $a=b=\frac{-(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2},a_1=\rho b_1,k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1),w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2$

، فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+a_0-\frac{(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2}\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)}{b_1\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+b_0-\frac{(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2}\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{34}$$

حيث b_0 و a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 15: إذا كان $a_0=0,b=a,a_1=\rho b_1,b_0=0,k=\frac{\pm1}{2\sqrt{2}}(\rho-1),w=\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^2$،

فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1\exp\left(\frac{\pm1}{2\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)+a\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)}{b_1\exp\left(\frac{\pm1}{2\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)+a\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\frac{\mp1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)} \tag{35}$$

حيث a و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 16: إذا كان $a=\frac{-1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{\rho b_1(\rho-2)},b=\frac{-1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{\rho^2b_1(\rho-2)},a_1=\rho b_1,b_0=\frac{-a_0(2\rho-1)}{\rho(\rho-2)},k=\pm\sqrt{\rho^2-\rho},w=\mp\alpha\sqrt{\rho^2-\rho}$،

فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{\rho b_1\exp\left(\pm\sqrt{\rho^2-\rho}x+\left(\mp\alpha\sqrt{\rho^2-\rho}\right)t\right)+a_0-\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{\rho b_1(\rho-2)}\exp\left(\mp\sqrt{\rho^2-\rho}x-\left(\mp\alpha\sqrt{\rho^2-\rho}\right)t\right)}{b_1\exp\left(\pm\sqrt{\rho^2-\rho}x+\left(\mp\alpha\sqrt{\rho^2-\rho}\right)t\right)-\frac{a_0(2\rho-1)}{\rho(\rho-2)}-\frac{1}{8}\frac{a_0^2(1+\rho)}{\rho b_1(\rho-2)}\exp\left(\mp\sqrt{\rho^2-\rho}x-\left(\mp\alpha\sqrt{\rho^2-\rho}\right)t\right)} \tag{36}$$

حيث a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

حالة 17: إذا كان

$a=\frac{-\rho(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2},a_1=b_1,b=\frac{-(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2},\ k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1),w=\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2$،

فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{b_1\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+a_0-\frac{\rho(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2}\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)}{b_1\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)+b_0-\frac{(-a_0b_0+b_0^2\rho-a_0b_0\rho+a_0^2)}{b_1(\rho-1)^2}\exp\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)t\right)} \tag{37}$$

حيث b_0 و a_0 و b_1 ثوابت كيفية.

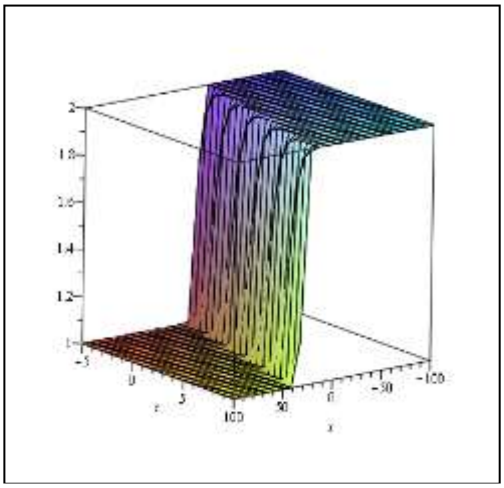
حالة 18: إذا كان $w=\frac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^2$ ، $a=\rho b\,, a_0=0, a_1=b_1, b_0=0\,, k=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}(\rho-1)$،

فإن التعويض في (17) يؤدي إلى الحصول على:

$$u(x,t)=\frac{b_1\exp\left(\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\frac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)+\rho b\exp\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\frac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)}{b_1\exp\left(\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}(\rho-1)x+\left(\frac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)+b\exp\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{2}}(\rho-1)x-\left(\frac{\mp 1}{2\sqrt{2}}\alpha(\rho-1)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\rho^2\right)t\right)} \qquad (38)$$

حيث b و b_1 ثوابت كيفية.

ويبين الشكل التالي (1) شكل الحل ذي الموجة المنعزلة (38) مع $\rho=2, \alpha=1, a_0=0, b=1, b_0=0, b_1=1$، ونلاحظ أن شكله عبارة عن موجة منعزلة، ولجميع الحلول البنية نفسها.



الشكل (1) شكل الحل ذي الموجة المنعزلة (38) مع $\rho=2, \alpha=1, a_0=0, b=1, b_0=0, b_1=1$

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد وجدنا في هذه المقالة حلولاً تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة Fitzhugh–Nagumi المعممة ذات الأمثال الثابتة، مختلفة عن الحلول الناتجة عن طريقة التكامل الأول في المقالة المنجزة من قبل كروم وانجرو في [12]، ووجدنا بأنه يمكن الحصول على نفس الحلول الموجودة في [20] و[22]، إذا وضعنا $\alpha=0$، أي في حالة معادلة Fitzhugh–Nagumo. ومن خلال هذه المقالة نجد أن طريقة الدالة الأسية طريقة بسيطة ومباشرة ولا تتطلب معرفة متقدمة في الرياضيات، أي يمكن استخدامها من قبل الباحثين غير الرياضيين، وأنها طريقة رياضية فعالة في حل مثل هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. يجدر بنا الإشارة إلى أن جميع الحسابات المتعلقة بهذا العمل تمت باستخدام برنامج Maple 13.

نوصي بحل هذه المعادلات بطرق أخرى ومقارنة النتائج ودراسة استقرار هذه الحلول.

المراجع:

[1] DEBTNATH, L. *Nonlinear Partial Diferential Equations for Scientist and Engineers* (Birkhauser Boston, MA, 1997).

[2] WAZWAZ, A.M. *Partial Differential Equations: Methods and Applications* (Balkema, Rotterdam, 2002).

[3] R. FITZHUGH, *Impulse and physiological states in models of nerve membrane*, Biophys. J. 1 (1961) 445–466.

[4] J.S. NAGUMO, S. ARIMOTO, S. YOSHIZAWA, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE 50 (1962) 2061–2071.

[5] S. ABBASBANDY, *Soliton solutions for the Fitzhugh–Nagumo equation with the homotopy analysis method*, Appl. Math. Model. 32 (2008) 2706–2714.

[6] H.A. ABDUSALAM, *Analytic and approximate solutions for Nagumo telegraph reaction diffusion equation*, Appl. Math. Comput. 157 (2004) 515–522.

[7] D.G. ARONSON, H.F. WEINBERGER, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. 30 (1978) 33–76.

[8] P. BROWNE, E. MOMONIAT, F.M. MAHOMED, *A generalized Fitzhugh–Nagumo equation*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1006–1015.

[9] T. KAWAHARA, M. TANAKA, *Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation*, Phys. Lett. 97A (1983) 311–314.

[10] H. LI, Y. GUO, *New exact solutions to the Fitzhugh–Nagumo equation*, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 524–528.

[11] A.H. BHRAWY, *A Jacobi–Gauss–Lobatto collocation method for solving generalized Fitzhugh–Nagumo equation with time-dependent coefficients*, Applied Mathematics and Computation 222 (2013) 255–264.

[12] R. KARROUM, S. INJROU, finding exact solutions to generalized Fitzhug- Nagumo equation with constant coefficients,(in Arabic) Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies, Bsic Sciences Series 2014.

[13] MALFIET, W. *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*, Am. J. Phys. 60,650-654, 1992.

[14] PARKES, E.J., Duffy, B.R. *An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations*, Comput. Phys. Commun. 98, 288-300, 1996.

[15] FAN, E. *Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations*, Phys.Lett. A 277, 212-218, 2000.

[16] FU, Z., LIU, S., LIU, S. AND ZHAO, Q. *New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations*, Phys. Lett. A 290, 72-76, 2001.

[17] ELWAKIL, S.A., EL-LABANY, S.K., ZAHRAN, M.A. AND SABRY, R. *Modifed extended tanhfunction method for solving nonlinear partial diferential equations*, Phys. Lett. A 299, 179-188, 2002.

[18] ZHENG, X., CHEN, Y. AND ZHANG, H. *Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation*, Phys. Lett. A 311, 145-157,2003.

[19] HE, J.H., WU, X.H. *Exp-function method for nonlinear wave equations*, Chaos Solitons Frac. 30, 700-708, 2006.

[20] AHMAD HAJIPOUR, S. MOLLA MAHMOUDI, *Application of Exp-function Method to Fitzhugh-Nagumo Equation*, World Applied Sciences Journal 9 (1): 113-117, 2010

[21] LI, H. AND Y. GUO, 2006. *New exact solutions to the Fitzhugh-Nagumo equation*. Appl. Math. Comput. 180: 524-528.

[22] YAVUZ UGURLU, *Exp-Function Method for the Some Nonlinear Partial Diferential Equations,* Mathematica Aeterna, Vol. 3, 2013, no. 1, 57 – 70