

## Some Indices and Polynomials of Cartesian Product of Complete Bipartite Graph $K_{1,n}$ and a Cycle $C_m$

Dr. Ramy Shaheen\*  
Dr. Suhail Mahfud\*\*  
Qays alhawati\*\*\*

(Received 26 / 7 / 2022. Accepted 22 / 1 / 2023)

### □ ABSTRACT □

Indices and polynomials have been used in chemistry and have many important chemical applications such as predicting the behavior of some chemical compounds and calculating some thermal constants. In this paper we compute the  $M$ -polynomial for Cartesian Product of a complete bipartite graph and a cycle  $K_{1,n} \square C_m$  for any values of  $n$  and  $m$ . From the  $M$  – polynomial, and we also compute many degree-based topological indices such that the general Randić index, the inverse Randić index, the first and the second Zagreb indices, the second modified Zagreb index, the symmetric division index, the inverse sum index and the augmented Zagreb index for  $K_{1,n} \square C_m$ . Moreover, we compute some indices and polynomial depend on definition such that the hyper- Zagreb index, the first and the second multiple Zagreb indices, the forgotten index, the first and second Zagreb polynomial, the inverse degree polynomial, the inverse degree index, the first and the second general Zagreb indices, the sum lordeg index, the harmonic polynomial, the harmonic index and the atom-bond connectivity index for  $K_{1,n} \square C_m$ .

**Keywords:** Indices, polynomials,  $M$  – polynomial, cycle and complete bipartite graph.

---

\* Professor, Mathematics Department, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria (shaheenramy2010@hotmail.com)

\*\*Assistant professor, Mathematics Department, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria (mahfudsuhail@gmail.com)

\*\*\*Ph.D. Student, Mathematics Department, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria (kais.hw007@gmail.com)

## بعض المؤشرات وكثيرات الحدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام $K_{1,n}$ مع حلقة $C_m$

د. رامي شاهين\*

د. سهيل محفوظ\*\*

قيس الحواط\*\*\*

(تاريخ الإيداع 2022 / 7 / 26. قُبِلَ للنشر في 2023 / 1 / 22)

### □ ملخص □

لقد استخدمت المؤشرات وكثيرات الحدود في الكيمياء ولها العديد من التطبيقات الكيميائية الهامة مثل التنبؤ بسلوك بعض المركبات الكيميائية وحساب بعض الثوابت الحرارية. في هذا البحث نقوم بحساب  $M$  - كثيرة حدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $C_m \square K_{1,n}$  من أجل أية قيمة لـ  $n, m$  ونحسب من خلال  $M$  - كثيرة حدود بعض المؤشرات التي تعتمد عليها مثل مؤشر راندك العام ومؤشر راندك العكسي ومؤشر زغرب الأول والثاني ومؤشر زغرب المعدل الثاني ومؤشر التقسيم المتناظر ومؤشر زغرب الموسع ومؤشر المجموع العكسي من أجل  $C_m \square K_{1,n}$  ونحسب بعض المؤشرات وكثيرات الحدود التي تعتمد على التعريف مثل مؤشر فرط زغرب ومؤشر زغرب المضاعف الأول والثاني والمؤشر المنسي وكثيرة حدود زغرب الأولى والثانية وكثيرة الحدود ذي الدرجة العكسية والمؤشر ذو الدرجة العكسية ومؤشر زغرب العام الأول والثاني ومؤشر لوردريك وكثيرة الحدود المتناسقة والمؤشر المتناسق ومؤشر اتصال الرابطة الذرية من أجل  $C_m \square K_{1,n}$ .

الكلمات المفتاحية: المؤشرات، كثيرات الحدود،  $M$  - كثيرة حدود، الحلقة، البيان الثنائي التجزئة التام.

\*أستاذ - قسم الرياضيات-كلية العلوم - جامعه تشرين - اللاذقية - سورية (shaheenramy2010@hotmail.com)

\*\*مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعه تشرين - اللاذقية - سورية (mahfudsuhail@gmail.com)

\*\*\* طالب دراسات عليا(دكتوراه) - قسم الرياضيات-كلية العلوم - جامعه تشرين - اللاذقية - سورية (kais.hw007@gmail.com)

**مقدمة:**

درست نظرية البيان أول مرة كمفهوم رياضي من قبل عالم الرياضيات أويلر (1736) عندما قام بنشر مسألة الجسور السبعة وكان أول بحث ينشر عن نظرية البيان، ثم قام العالم كونج (1936) بتأليف أول كتاب بعنوان نظرية الرسومات، ولقد شهدت العقود الأخيرة تطوراً كبيراً في نظرية البيان ونشرت العديد من الأبحاث التي تناولت العديد من المواضيع المتنوعة، وقد نتج عن هذا التطور في مطلع القرن العشرين عن تطبيقات واستعمالات ذات فوائد كبيرة في مواضيع ذات أهمية علمية واقتصادية كبيرة؛ منها نظرية الاتصالات والبرمجة الرياضية وتحليل الشبكات الكهربائية وعلوم الحاسب والتخطيط والإدارة والتمركز والسيطرة ونظرية الألعاب. ومن تطبيقاتها استخدام التطابق الشجري في الكيمياء العضوية وتقليل حوادث التقاطعات في المعامل.

في هذا البحث نتطرق إلى الجاني الكيميائي التطبيقي لنظرية البيان ومن أجل الاستفادة من نظرية البيان في الكيمياء تحولت المركبات الكيميائية المدروسة إلى بيانات عن طريق جعل ذرات المركب رؤوس لهذا البيان والروابط أضلاعاً له فنحصل على ما يسمى بالجزء البياني (Molecular Graph) [1,2]. ثم نقوم بحساب المؤشرات (indices) لهذه المركبات ومن خلال هذه المؤشرات نستطيع معرفة العديد من خصائصها لهذه المركبات مثل حرارة التكوين (Heat of Formation) وطاقة الاجهاد (Strain Energy) دون الحاجة الى ميكانيك الكم (Quantum Mechanic) [3].

المؤشرات عبارة عن قيم عددية وهي متنوعة وعديدة بسبب اختلاف وتنوع المركبات الكيميائية فالمؤشر الذي يفيد في دراسة مركب قد لا يفيد في دراسة مركب اخر وفي وقتنا الحالي يوجد أكثر من 200 نذكر منهم مؤشر مثل مؤشر ونر (Weiner index)، فرط - مؤشر وينر (hyper-Wiener index)، مؤشر هراري (Harary index)، مؤشر شولتز (Schultz index)، مؤشر شولتز المعدل (Modified Schultz Index) وغيرها من المؤشرات.

أول المؤشرات التي درست كان مؤشر وينر حيث درس من قبل الباحث الفيزيائي الكيميائي (Harold Wiener) عام 1947 [4] ودرس على مجموعه من المركبات العضوية وكان يسمى رقم المسار وتستخدم المؤشرات حالياً للكشف الأولى عن جزيئات الدواء [5] ولتنبؤ بالتحويلات التي تحدث في هياكل الحمض النووي الريبي RNA [6].

كثيرات الحدود (polynomial) متنوعة وعديدة مثل كثيرة حدود هوسوي (Hosoya polynomial)، كثيرة حدود شولتز (Schultz polynomial)، وكثيرة حدود شولتز المعدلة (Modified Schultz polynomial) و  $M$  - كثيرة حدود ( $M$  - polynomial) وغيرها واستخدمت في الكيمياء ولها أيضاً العديد من التطبيقات الكيميائية الهامة وبمعرفة كثيرات الحدود نستطيع معرفة العديد من المؤشرات من خلال إجراء عمليات الاشتقاق والتكامل على كثيرات الحدود ثم إعطاء قيم عددية صحيحة موجبة من أجل كل قيمة  $x$  أو  $y$  في كثيرة الحدود المدروسة بعد الاشتقاق والتكامل. قام Shaheen وآخرون في [7] بإيجاد مجموعة من المؤشرات وكثيرات الحدود للجداء الديكارتي لمسار مع البيان الثنائي التجزئة التام  $P_n \square K_{1,m}$ .

**أهمية البحث وأهدافه:****الأهمية العلمية:**

تعد نظرية البيان من المواضيع الهامة في الرياضيات الحديثة ومن فروع العلوم الرياضية التطبيقية، إذ إن هذه النظرية تستخدم في معظم فروع المعرفة، حيث تقوم على معالجة وحل الكثير من المسائل المرتبطة بواقع الحياة اليومية، وإيجاد الحل الأمثل لها وذلك عن طريق تحويلها الى بيانات خاصة تتوافق مع طبيعة المسألة المطروحة. وقد تنوعت مجالات وتخصصات نظرية البيان مثل السيطرة والألوان وبيانات أويلر وهاملتون وأعداد رامزي وغيرها. انعكس بدوره هذا بدوره إيجاباً على جميع المجالات العلمية، ونخص بالذكر الكيمياء حيث أن حساب المؤشرات للمركب الكيميائي ساهم الى حد كبير في التنبؤ بسلوك المركب عند تغير الظروف الفيزيائية والكيميائية لهذا المركب.

**الأهمية العملية:**

يوجد العديد من المركبات الكيميائية وبالأخص العضوية التي إذا نمذجت وحولت الى بيانات أصبحت توافق الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  وكل مركب يوافق حالة خاصة لهذا الجداء من أجل قيمة معينة لـ  $n, m$  وذلك حسب عدد الجزئيات المرتبطة والروابط وباستنتاج المؤشرات وكثيرات الحدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  أصبح بمقدورنا أن نفهم العديد من خواص صفات المركبات التي توافق هذه البيانات ونستطيع ان نتوقع شكل المركب الناتج عن اتحاد مركبين كل منهما يوافق حاله خاصة للجداء الديكارتي ويمكن أيضاً استنتاج بعض القيم الحرارية لهذه المركبات.

**أهداف البحث:**

يهدف هذا البحث إلى حساب  $M -$  كثيرة حدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  من أجل أية قيمة لـ  $n, m$  وحساب بعض المؤشرات التي تعتمد على  $M -$  كثيرة حدود وبعض المؤشرات وكثيرات الحدود التي تعتمد على التعريف.

**طرائق البحث ومواده:**

تتعلق الدراسة من الفرضيات التالية:

- (1) درجات الرؤوس في الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  ليست ثابتة وهي رؤوس من الدرجة 3 ورؤوس من الدرجة 2 و  $n + 2$ .
- (2) مجاورات الأضلاع للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  ليست ثابتة وهي على الشكل التالي  $\{3,3\}, \{3, n + 2\}, \{n + 2, n + 2\}$  لذلك فان  $M -$  كثيرة حدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  تحتوي على ثلاثة حدود.
- (3) الاعتماد على  $M -$  كثيرة حدود لحساب بعض المؤشرات للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$ .
- (4) حساب بعض المؤشرات وكثيرات الحدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  التي لا ترتبط مع  $M -$  كثيرة حدود من خلال التعريف.

**منهجية البحث:**

تم إتباع المنهج الوصفي التجريبي، ووفقاً للمنهج الوصفي تم وصف ظواهر الدراسة بالاعتماد على تعريف للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقه  $K_{1,n} \square C_m$  والاعتماد على تعريف  $M$  - كثيرة حدود وتعريف بعض المؤشرات وكثيرات الحدود وربط بعض المؤشرات مع  $M$  - كثيرة حدود من خلال عمليات الاشتقاق والتكامل على  $M$  - كثيرة حدود والاعتماد على التعريف في الحالات الباقية.

**تعريف ومفاهيم اساسية:****تعريف 1: البيان (Graph) [8]**

ليكن لدينا  $V \neq \emptyset$  مجموعة كيفية من النقاط حيث أن  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$  و  $E$  مجموعة من الخطوط التي تصل بين نقاط المجموعة  $V$  و  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_q\}$ . نسمي الثنائية المؤلفة من المجموعتين  $V$  و  $E$  بياناً نرمز له  $G(V, E)$  ونسمي المجموعة  $V$  مجموعة الرؤوس أو الذرا (vertices) وكل نقطة تسمى رأساً (vertex) والمجموعة  $E$  مجموعة الأضلاع (edges) حيث كل منها يسمى ضلعاً.

درجة رأس  $v$  في البيان  $G(V, E)$  ويرمز لها بالرمز  $deg(v)$  أو  $d_v$  وتعرف بأنها عدد الأضلاع المرتبطة بالرأس  $v$ ، تسمى  $\delta$  درجة أصغر رأس في البيان (min degree)، وتسمى  $\Delta$  درجة أكبر رأس في البيان (max degree). ويقال عن الرأسين  $u, v$  إنهما متجاوران (adjacent) إذا وجد ضلع  $e$  يصل بين نهاية الرأسين ونكتب  $e = uv$ .

رتبة البيان  $G$  (order) هو عدد رؤوس البيان  $P = |V(G)| = order(G)$ .

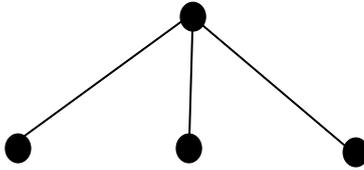
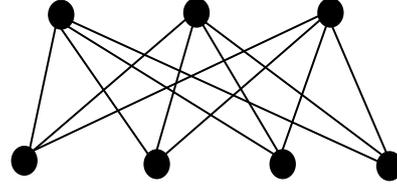
قياس البيان  $G$  (size) هو عدد أضلاع البيان  $q = |E(G)| = size(G)$ .

يقال عن البيان  $G$  إنه مترابط (connected graph) إذا وجد مسار بين أي رأسين في البيان  $G$ .

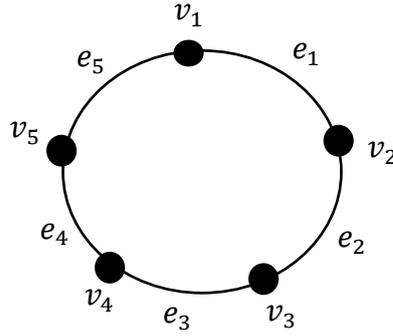
**تعريف 2: البيان الثنائي التجزئة التام (Complete bipartite Graph) [8]**

البيان الثنائي التجزئة التام هو بيان 2 - تجزئة (ثنائي التجزئة) له مجموعتان مستقلتان من الرؤوس حيث أن كل رأس في كل مجموعة مستقلة يتصل مع جميع رؤوس المجموعة الثانية و لا يتصل مع رؤوس مجموعته، إذا كان  $|V_1| = n, |V_2| = m$  عندئذ يرمز له بالرمز  $K_{n,m}$  و يدعى البيان  $K_{1,m}$  بالبيان النجمي (star).

في الشكل (1) نجد البيان  $K_{3,4}$  وفي الشكل (2) نجد البيان  $K_{1,3}$ .

الشكل (2) يمثل البيان  $K_{1,3}$ الشكل (1) يمثل البيان  $K_{3,4}$ **تعريف 3: الحلقة (Cycle) [8]**

الحلقة هي بيان متصل درجة كل رأس من رؤوسها يساوي 2، ويرمز للحلقة التي تحوي  $n$  رأس و  $n$  ضلع بالرمز  $C_n$ . في الشكل (3) نجد الحلقة  $C_5$ .



الشكل (3) يمثل الحلقة  $C_5$

**تعريف 4: الجداء الديكارتي (Cartesian product) [8]**

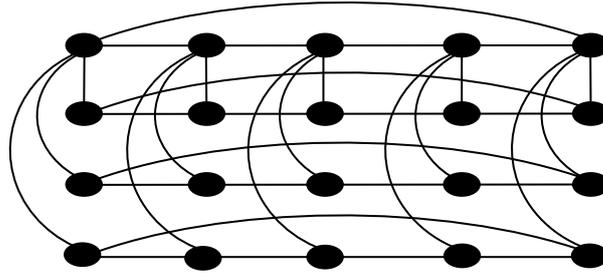
الجداء الديكارتي للبيانين  $G_1(V, E)$  و  $G_2(V, E)$  هو البيان  $G_1 \square G_2$  مع مجموعة الرؤوس  $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$  ومجموعة الأضلاع

$$E(G) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1 = v_1 \text{ and } u_2 v_2 \in E(G_2) \text{ or } u_2 = v_2 \text{ and } u_1 v_1 \in E(G_1)\}.$$

إذا كان  $|V(G_1)| = p_1, |V(G_2)| = p_2, |E(G_1)| = q_1, |E(G_2)| = q_2$

يكون  $|V(G_1 \square G_2)| = p_1 p_2, |E(G_1 \square G_2)| = p_1 q_2 + p_2 q_1$

الشكل (4) يمثل الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,3} \square C_5$



الشكل (4) يمثل الجداء الديكارتي  $K_{1,3} \square C_5$

**تعريف 5: M – كثيرة حدود (The M-polynomial) [9]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومترايط يعرف  $M$  – كثيرة حدود لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$M(G, x, y) = \sum_{\delta \leq i \leq j \leq \Delta} m_{i,j} x^i y^j$$

حيث إن  $\delta$  هي درجة أصغر رأس في البيان،  $\Delta$  هي درجة أكبر رأس في البيان،  $m_{i,j}$  هي عدد الأضلاع  $e = uv$  حيث إن  $d_u = i, d_v = j$ .

**تعريف 6: مؤشر راندك العام (The general Randić index) [10]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومترايط يعرف مؤشر راندك العام لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$R_\alpha(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{(d_u \times d_v)^\alpha}$$

حيث إن  $d_u$  هي درجة الرأس  $u$ ،  $d_v$  هي درجة الرأس  $v$ .

**تعريف 7: مؤشر راندك العكسي (The inverse Randić index) [10]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومترايط يعرف مؤشر راندك العكسي لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$RR_\alpha(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u \times d_v)^\alpha$$

**تعريف 8: مؤشر زغرب الأول (The first Zagreb index) [11]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر زغرب الأول لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)$$

**تعريف 9: مؤشر زغرب الثاني (The second Zagreb index) [11]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر زغرب الثاني لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u \times d_v)$$

**تعريف 10: مؤشر زغرب المعدل الثاني (The second modified Zagreb index) [11]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر زغرب المعدل لهذا البيان بالشكل الآتي:

$${}^m M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{d_u \times d_v}$$

**تعريف 11: مؤشر التقسيم المتناظر (The symmetric division index) [12]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر التقسيم المتناظر لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$SDD(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left\{ \frac{\min(d_u, d_v)}{\max(d_u, d_v)} + \frac{\max(d_u, d_v)}{\min(d_u, d_v)} \right\}$$

**تعريف 12: مؤشر المجموع العكسي (The inverse sum index) [13]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر المجموع العكسي لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$I(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{d_u d_v}{d_u + d_v}$$

**تعريف 13: مؤشر زغرب الموسع (The augmented Zagreb index) [14]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر زغرب الموسع لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$A(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left\{ \frac{d_u d_v}{d_u + d_v - 2} \right\}^3$$

يوضح الجدول (1) العلاقة الرياضية بين  $M$  - كثيرة حدود وبين بعض المؤشرات التي سبق تعريفها.

الجدول (1) يوضح العلاقات الرياضية بين  $M$  - كثيرة حدود وبعض المؤشرات [9]

Topological Index	Derivation from $M(G, x, y)$
First Zagreb ( $M_1(G)$ )	$(D_x + D_y)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
Second Zagreb ( $M_2(G)$ )	$(D_x D_y)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
Second Modified Zagreb ( ${}^m M_2(G)$ )	$(S_x S_y)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
Inverse Randić ( $RR_\alpha(G)$ )	$(D_x^\alpha D_y^\alpha)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
General Randić ( $R_\alpha(G)$ )	$(S_x^\alpha S_y^\alpha)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
Symmetric Division Index ( $SDD(G)$ )	$(D_x S_y + S_x D_y)(M(G, x, y))_{x=y=1}$
Inverse sum Index ( $I(G)$ )	$S_x J D_x D_y (M(G, x, y))_{x=1}$
Augmented Zagreb Index ( $A(G)$ )	$S_x^3 Q_{-2} J D_x^3 D_y^3 (M(G, x, y))_{x=1}$

Where  $D_x = x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $D_y = y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ,  $S_x = \int_0^x \frac{f(t, y)}{t} dt$ ,  $S_y = \int_0^y \frac{f(x, t)}{t} dt$

$$J(f(x, y)) = f(x, x), Q_\alpha(f(x, y)) = x^\alpha f(x, y).$$

**تعريف 14: المؤشر المنسي (The forgotten index) [3]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، يعرف المؤشر المنسي لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} [(d_u)^2 + (d_v)^2]$$

**تعريف 15: مؤشر فرط زغرب (The hyper-Zagreb index) [15]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، يعرف مؤشر فرط زغرب لهذا البيان يعرف بالشكل التالي:

$$HM(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_u + d_v]^2$$

**تعريف 16: مؤشر زغرب المضاعف الأول (The first multiple Zagreb index) [16]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، يعرف مؤشر زغرب الأول المضاعف لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$PM_1(G) = \prod_{uv \in E(G)} [d_u + d_v]$$

**تعريف 17: مؤشر زغرب المضاعف الثاني (The second multiple Zagreb index) [16]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف مؤشر زغرب الثاني المضاعف لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$PM_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} [d_u \times d_v]$$

**تعريف 18: كثيرة حدود زغرب الأولى (The first Zagreb polynomial) [3]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، تعرف كثيرة حدود زغرب الأولى لهذا البيان بالشكل الآتي:

$$M_1(G, x) = \sum_{uv \in E(G)} x^{[d_u + d_v]}$$

**تعريف 19: كثيرة حدود زغرب الثانية (The second Zagreb polynomial) [3]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، تعرف كثيرة حدود زغرب الثانية لهذا البيان بالشكل:

$$M_2(G, x) = \sum_{uv \in E(G)} x^{[d_u \times d_v]}$$

**تعريف 20: كثيرة الحدود ذي الدرجة العكسية (The Inverse degree polynomial) [17]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، تعرف كثيرة الحدود عكسية الدرجة لهذا البيان بالشكل:

$$ID(G, x) = \sum_{u \in V} x^{d_u - 1}$$

**تعريف 21: المؤشر ذو الدرجة العكسية (The inverse degree index) [17]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط يعرف المؤشر عكسي الدرجة لهذا البيان بالشكل:

$$ID(G) = \sum_{u \in V} \frac{1}{d_u} = \sum_{uv \in E(G)} \left( \frac{1}{d_u^2} + \frac{1}{d_v^2} \right)$$

وتعطى العلاقة بين كثيرة الحدود عكسية الدرجة والمؤشر العكسي بالتكامل:

$$ID(G) = \int_0^1 ID(G, x) dx$$

**تعريف 22: مؤشر زغرب المعمم الأول والثاني**

**[18–19] (The first and the second general Zagreb indices)**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، يعرف مؤشر زغرب المعمم الأول والثاني لهذا البيان بالشكل:

$$M_1^\alpha = \sum_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)^\alpha = \sum_{u \in V} d_u^\alpha, \quad M_2^\alpha = \sum_{uv \in E(G)} (d_u \times d_v)^\alpha$$

**تعريف 23: مؤشر مجموع لوردريك (The sum lordeg index) [20]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، يعرف مؤشر مجموع لوردريك لهذا البيان بالشكل:

$$SL(G) = \sum_{u \in V} d_u \sqrt{\ln d_u}$$

**تعريف 24: كثيرة الحدود المتناسقة (The harmonic polynomial) [21]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومتربط، تعرف كثيرة الحدود المتناسقة لهذا البيان بالشكل:

$$H(G, x) = \sum_{uv \in E(G)} x^{d_u + d_v - 1}$$

**تعريف 25: المؤشر المتناسق (The harmonic index) [21]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومترابط، يعرف المؤشر المتناسق لهذا البيان بالشكل:

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v}$$

وتعطي العلاقة بين كثرة الحدود المتناسقة والمؤشر المتناسق بالتكامل:  $H(G) = 2 \int_0^1 H(G, x) dx$

**تعريف 26: مؤشر اتصال الرابطة الذرية (The atom-bond connectivity index) [22]**

ليكن لدينا  $G(V, E)$  بيان بسيط ومترابط، يعرف مؤشر اتصال الرابطة الذرية لهذا البيان بالشكل:

$$ABC(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 1}{d_u \times d_v}}$$

**طريقة العمل:**

نقوم بحساب  $M$  - كثرة حدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  عن طريق التعريف ومن خلال  $M$  - كثرة حدود وبالاغتماد على الجدول نوجد العديد من المؤشرات لـ  $K_{1,n} \square C_m$  ومن خلال التعريف نوجد ما بقي من المؤشرات وكثيرات الحدود التي لا ترتبط مع  $M$  - كثرة حدود لـ  $K_{1,n} \square C_m$ .

**النتائج والمناقشة:****تمهيدية 1:**

$$M(K_{1,n} \square C_m, x, y) = nm x^3 y^3 + nm x^3 y^{n+2} + m x^{n+2} y^{n+2}$$

**البرهان:** بما أن  $|V(K_{1,n} \square C_m)| = m(n+1)$ ,  $|E(K_{1,n} \square C_m)| = 2nm + m$  لذلك

$$E_1(K_{1,n} \square C_m) = \{e = uv \in E(K_{1,n} \square C_m) : d_u = 3, d_v = 3\}.$$

$$E_2(K_{1,n} \square C_m) = \{e = uv \in E(K_{1,n} \square C_m) : d_u = 3, d_v = n+2\}.$$

$$E_3(K_{1,n} \square C_m) = \{e = uv \in E(K_{1,n} \square C_m) : d_u = n+2, d_v = n+2\}.$$

$$|E_1(K_{1,n} \square C_m)| = nm, |E_2(K_{1,n} \square C_m)| = nm, |E_3(K_{1,n} \square C_m)| = m$$

من خلال تعريف  $M$  - كثرة نجد

$$\begin{aligned} M(K_{1,n} \square C_m, x, y) &= \sum_{\delta \leq i \leq j \leq \Delta} m_{i,j} x^i y^j \\ &= \sum_{3 \leq 3} m_{3,3} x^3 y^3 + \sum_{3 \leq n+2} m_{3,n+2} x^3 y^{n+2} \\ &\quad + \sum_{n+2 \leq n+2} m_{n+2,n+2} x^{n+2} y^{n+2} \\ &= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} m_{3,3} x^3 y^3 + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} m_{3,n+2} x^3 y^{n+2} \\ &\quad + \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} m_{n+2,n+2} x^{n+2} y^{n+2} \\ &= |E_1(K_{1,n} \square C_m)| x^3 y^3 + |E_2(K_{1,n} \square C_m)| x^3 y^{n+2} \\ &\quad + |E_3(K_{1,n} \square C_m)| x^{n+2} y^{n+2} \\ &= nm x^3 y^3 + nm x^3 y^{n+2} + m x^{n+2} y^{n+2}. \end{aligned}$$

**مبرهنة 1:** يكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ من خلال  $M$  - كثرة

حدود نجد مجموعة من المؤشرات لـ  $K_{1,n} \square C_m$  والتي تعطى بالعلاقات الآتية:

1.  $M_1(K_{1,n} \square C_m) = 6nm + nm(n+5) + 2m(n+2)$ .
2.  $M_2(K_{1,n} \square C_m) = 9nm + 3nm(n+2) + m(n+2)^2$ .
3.  ${}^m M_2(K_{1,n} \square C_m) = \frac{nm}{9} + \frac{nm}{3(n+2)} + \frac{m}{(n+2)^2}$ .

4.  $RR_\alpha(K_{1,n} \square C_m) = 9^\alpha nm + nm(3n + 6)^\alpha + m(n + 2)^{2\alpha}.$
5.  $R_\alpha(K_{1,n} \square C_m) = \frac{nm}{9^\alpha} + \frac{nm}{(3n+6)^\alpha} + \frac{m}{(n+2)^{2\alpha}}.$
6.  $SDD(K_{1,n} \square C_m) = 2nm + nm\left(\frac{n+2}{3} + \frac{3}{n+2}\right) + 2m.$
7.  $I(K_{1,n} \square C_m) = \frac{3}{2}nm + \frac{3nm(n+2)}{n+5} + \frac{m(n+2)}{2}.$
8.  $A(K_{1,n} \square C_m) = \frac{729}{64}nm + \frac{27nm(n+2)^3}{(n+3)^3} + \frac{m(n+2)^6}{(2n+2)^3}.$

البرهان: لنأخذ  $M(K_{1,n} \square C_m, x, y) = f(x, y) = nm x^3 y^3 + nm x^3 y^{n+2} + m x^{n+2} y^{n+2}$  عندئذ

كما وجدنا في الجدول (1)

$$\begin{aligned}
 D_x f(x, y) &= 3nm x^2 y^3 + 3nm x^3 y^{n+2} + m(n+2)x^{n+2}y^{n+2}. \\
 D_y f(x, y) &= 3nm x^3 y^2 + nm(n+2)x^3 y^{n+1} + m(n+2)x^{n+2}y^{n+1}. \\
 D_x D_y f(x, y) &= 9nm x^2 y^2 + 3nm(n+2)x^3 y^{n+1} + m(n+2)^2 x^{n+2} y^{n+1}. \\
 S_y f(x, y) &= \frac{nm}{3} x^3 y^3 + \frac{nm}{n+2} x^3 y^{n+2} + \frac{m}{n+2} x^{n+2} y^{n+2}. \\
 S_x S_y f(x, y) &= \frac{nm}{9} x^3 y^3 + \frac{nm}{3(n+2)} x^3 y^{n+2} + \frac{m}{(n+2)^2} x^{n+2} y^{n+2}. \\
 S_y^\alpha f(x, y) &= \frac{nm}{3^\alpha} x^3 y^3 + \frac{nm}{(n+2)^\alpha} x^3 y^{n+2} + \frac{m}{(n+2)^\alpha} x^{n+2} y^{n+2}. \\
 S_x^\alpha S_y^\alpha f(x, y) &= \frac{nm}{9^\alpha} x^3 y^3 + \frac{nm}{(3n+6)^\alpha} x^3 y^{n+2} + \frac{m}{(n+2)^{2\alpha}} x^{n+2} y^{n+2}. \\
 D_y^\alpha f(x, y) &= 3^\alpha nm x^3 y^2 + nm(n+2)^\alpha x^3 y^{n+1} + m(n+2)^\alpha x^{n+2} y^{n+1}. \\
 D_x^\alpha D_y^\alpha f(x, y) &= 9^\alpha nm x^2 y^2 + nm(3n+6)^\alpha x^3 y^{n+1} + m(n+2)^{2\alpha} x^{n+2} y^{n+1}. \\
 D_x S_y f(x, y) &= nm x^2 y^3 + \frac{3nm}{n+2} x^3 y^{n+2} + m x^{n+2} y^{n+2}. \\
 S_x D_y f(x, y) &= nm x^3 y^2 + \frac{nm(n+2)}{3} x^3 y^{n+1} + m x^{n+2} y^{n+1}. \\
 JD_x D_y f(x, y) &= 9nm x^6 + 3nm(n+2)x^{n+5} + m(n+2)^2 x^{2n+4}. \\
 S_x JD_x D_y f(x, y) &= \frac{3}{2} nm x^6 + \frac{3nm(n+2)}{n+5} x^{n+5} + \frac{m(n+2)}{2} x^{2n+4}. \\
 D_y^3 f(x, y) &= 27nm x^3 y^2 + nm(n+2)^3 x^3 y^{n+1} + m(n+2)^3 x^{n+2} y^{n+1}. \\
 D_x^3 D_y^3 f(x, y) &= 729 nm x^2 y^2 + 27nm(n+2)^3 x^3 y^{n+1} + m(n+2)^6 x^{n+2} y^{n+1}. \\
 JD_x^3 D_y^3 f(x, y) &= 729 nm x^6 + 27nm(n+2)^3 x^{n+5} + m(n+2)^6 x^{2n+4}. \\
 Q_{-2} JD_x^3 D_y^3 f(x, y) &= 729 nm x^4 + 27nm(n+2)^3 x^{n+3} + m(n+2)^6 x^{2n+2}. \\
 S_x^3 Q_{-2} JD_x^3 D_y^3 f(x, y) &= \frac{729}{64} nm x^4 + \frac{27nm(n+2)^3}{(n+3)^3} x^{n+3} + \frac{m(n+2)^6}{(2n+2)^3} x^{2n+2}.
 \end{aligned}$$

(1) مؤشر زغرب الأول

$$M_1(K_{1,n} \square C_m) = (D_x + D_y)f(x, y) \Big|_{x=y=1} = 6nm + nm(n+5) + 2m(n+2).$$

(2) مؤشر زغرب الثاني

$$M_2(K_{1,n} \square C_m) = (D_x D_y)(f(x, y)) \Big|_{x=y=1} = 9nm + 3nm(n+2) + m(n+2)^2.$$

(3) مؤشر زغرب الثاني المعدل

$${}^m M_2(K_{1,n} \square C_m) = (S_x S_y)(f(x, y)) \Big|_{x=y=1} = \frac{nm}{9} + \frac{nm}{3(n+2)} + \frac{m}{(n+2)^2}.$$

(4) مؤشر راندك العكسي

$$R_{\alpha\alpha}(K_{1,n} \square C_m) = (D_x^\alpha D_y^\alpha)(f(x, y)) \Big|_{x=y=1} = 9^\alpha nm + nm(3n+6)^\alpha + m(n+2)^{2\alpha}.$$

(5) مؤشر راندك العام

$$R_\alpha(K_{1,n} \square C_m) = (S_x^\alpha S_y^\alpha) f(x, y) \Big|_{x=y=1} = \frac{nm}{9^\alpha} + \frac{nm}{(3n+6)^\alpha} + \frac{m}{(n+2)^{2\alpha}}.$$

(6) مؤشر التقسيم المتناظر

$$SDD(K_{1,n} \square C_m) = (D_x S_y + S_x D_y) (f(x, y)) \Big|_{x=y=1} = 2nm + nm \left( \frac{n+2}{3} + \frac{3}{n+2} \right) + 2m.$$

(7) مؤشر المجموع العكسي

$$I(K_{1,n} \square C_m) = S_x J D_x D_y f(x, y) \Big|_{x=1} = \frac{3}{2} nm + \frac{3nm(n+2)}{n+5} + \frac{m(n+2)}{2}.$$

(8) مؤشر زغرب الموسع

$$A(K_{1,n} \square C_m) = (S_x^3 Q_{-2} J D_x^3 D_y^3) (f(x, y)) \Big|_{x=1} \\ = \frac{729}{64} nm + \frac{27nm(n+2)^3}{(n+3)^3} + \frac{m(n+2)^6}{(2n+2)^3}.$$

نتيجة 1: ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ مؤشر فرط زغرب لـ $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$HM(K_{1,n} \square C_m) = (n^2 + 10n + 61)nm + (2n + 4)^2 m.$$

البرهان: من تعريف مؤشر فرط زغرب ومن خلال  $E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$  نجد:

$$HM(K_{1,n} \square C_m) = \sum_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v]^2 \\ = \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v]^2 + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v]^2 \\ + \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v]^2 \\ = [3 + 3]^2 |E_1(K_{1,n} \square C_m)| + [3 + n + 2]^2 |E_2(K_{1,n} \square C_m)| \\ + [n + 2 + n + 2]^2 |E_3(K_{1,n} \square C_m)| \\ = 36nm + (n + 5)^2 nm + (2n + 4)^2 m \\ = (n^2 + 10n + 61)nm + (2n + 4)^2 m.$$

نتيجة 2: ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ مؤشر زغرب الأولالمضاعف لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$PM_1(G) = (6n + 30)^{nm} \times (2n + 4)^m.$$

البرهان: من تعريف مؤشر زغرب الأول المضاعف ومن خلال

 $E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$  نجد:

$$PM_1(K_{1,n} \square C_m) = \prod_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v] \\ = \prod_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v] \times \prod_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v] \\ + \prod_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} [d_u + d_v] \\ = [3 + 3]^{|E_1(K_{1,n} \square C_m)|} \times [n + 2 + 3]^{|E_2(K_{1,n} \square C_m)|} \\ + [n + 2 + n + 2]^{|E_3(K_{1,n} \square C_m)|} \\ = 6^{nm} \times (n + 5)^{nm} \times (2n + 4)^m \\ = (6n + 30)^{nm} \times (2n + 4)^m.$$

نتيجة 3: ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ مؤشر زغرب الثانيالمضاعف لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$PM_2(G) = (27n + 54)^{nm} \times (n^2 + 4n + 4)^m.$$

**البرهان:** من تعريف مؤشر زغرب الثاني المضاعف ومن خلال

$E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$  نجد:

$$\begin{aligned} PM_2(K_{1,n} \square C_m) &= \prod_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} [d_u \times d_v] \\ &= \prod_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} [d_u \times d_v] \times \prod_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} [d_u \times d_v] \\ &+ \prod_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} [d_u \times d_v] \\ &= [3 \times 3]^{|E_1(K_{1,n} \square C_m)|} \times [3(n+2)]^{|E_2(K_{1,n} \square C_m)|} \\ &+ [(n+2)(n+2)]^{|E_3(K_{1,n} \square C_m)|} \\ &= 9^{nm} \times (3n+6)^{nm} \times (n^2+4n+4)^m \\ &= (27n+54)^{nm} \times (n^2+4n+4)^m. \end{aligned}$$

**نتيجة 4:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ كثيرة حدود زغرب الأولى لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$M_1(K_{1,n} \square C_m, x) = nm x^5 + nm x^{n+5} + m x^{2n+4}.$$

**البرهان:** من تعريف كثيرة حدود زغرب الأولى ومن خلال  $E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$

نجد:

$$\begin{aligned} M_1(K_{1,n} \square C_m, x) &= \sum_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u + d_v]} \\ &= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u + d_v]} + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u + d_v]} \\ &+ \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u + d_v]} \\ &= |E_1(K_{1,n} \square C_m)| x^6 + |E_2(K_{1,n} \square C_m)| x^{n+5} \\ &+ |E_3(K_{1,n} \square C_m)| x^{2n+4} \\ &= nm x^5 + nm x^{n+5} + m x^{2n+4}. \end{aligned}$$

**نتيجة 5:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ كثيرة حدود زغرب الثانية لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$M_2(K_{1,n} \square C_m, x) = nm x^9 + nm x^{3n+6} + m x^{n^2+4n+4}.$$

**البرهان:** من تعريف كثيرة حدود زغرب الثانية ومن خلال  $E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$

نجد:

$$\begin{aligned} M_2(K_{1,n} \square C_m, x) &= \sum_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u \times d_v]} \\ &= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u \times d_v]} + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u \times d_v]} \\ &+ \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} x^{[d_u \times d_v]} \\ &= |E_1(K_{1,n} \square C_m)| x^9 + |E_2(K_{1,n} \square C_m)| x^{3(n+2)} \\ &+ |E_3(K_{1,n} \square C_m)| x^{(n+2)(n+2)} \\ &= nm x^9 + nm x^{3n+6} + m x^{n^2+4n+4}. \end{aligned}$$

**نتيجة 6:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ المؤشر المنسي لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$F(K_{1,n} \square C_m) = (n^2 + 4n + 31)nm + m(2n^2 + 8n + 8).$$

**البرهان:** من تعريف المؤشر المنسي ومن خلال  $E_1(K_{1,n} \square C_m), E_2(K_{1,n} \square C_m), E_3(K_{1,n} \square C_m)$  نجد:

$$\begin{aligned}
F(K_{1,n} \square C_m) &= \sum_{uv \in E(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u)^2 + (d_v)^2] \\
&= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u)^2 + (d_v)^2] + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u)^2 + (d_v)^2] \\
&\quad + \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u)^2 + (d_v)^2] \\
&= (3^2 + 3^2) |E_1(K_{1,n} \square C_m)| + (3^2 + (n+2)^2) |E_2(K_{1,n} \square C_m)| \\
&\quad + ((n+2)^2 + (n+2)^2) |E_3(K_{1,n} \square C_m)| \\
&= 18nm + (n^2 + 4n + 13)nm + m(2n^2 + 8n + 8) \\
&= (n^2 + 4n + 31)nm + m(2n^2 + 8n + 8).
\end{aligned}$$

ولحساب بقية كثيرات الحدود والمؤشرات نقوم بتقسيم مجموعة الرؤوس الى مجموعتين كل مجموعة تحتوي على رؤوس

من الدرجة نفسها حيث:  $V_k = \{v \in V : d_v = k\}$  وبالتالي نجد:

$$\begin{aligned}
V_3(K_{1,n} \square C_m) &= \{v \in V : d_v = 3\}, V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m) = \{v \in V : d_v = n+2\} \\
|V_3(K_{1,n} \square C_m)| &= nm, |V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)| = m.
\end{aligned}$$

**نتيجة 7:** ليكن لدينا الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ كثيرة الحدود ذي الدرجة العكسية لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$ID(K_{1,n} \square C_m, x) = nm x^2 + m x^{n+2}.$$

**البرهان:**

$$\begin{aligned}
ID(K_{1,n} \square C_m, x) &= \sum_{u \in V(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u-1} \\
&= \sum_{u \in V_3(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u-1} + \sum_{u \in V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u-1} \\
&= |V_3(K_{1,n} \square C_m)| x^2 + |V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)| x^{n+2} \\
&= nm x^2 + m x^{n+2}.
\end{aligned}$$

**نتيجة 8:** ليكن لدينا الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ المؤشر ذو الدرجة

العكسية لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$ID(K_{1,n} \square C_m) = \frac{nm}{3} + \frac{m}{n+3}.$$

**البرهان:**

$$\begin{aligned}
ID(K_{1,n} \square C_m) &= \int_0^1 ID(K_{1,n} \square C_m, x) dx \\
&= \frac{nm}{3} + \frac{m}{n+3}.
\end{aligned}$$

**نتيجة 9:** ليكن لدينا الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ مؤشر زغرب المعمم

الأول والثاني لـ  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha(K_{1,n} \square C_m) &= nm 3^\alpha + m(n+2)^\alpha. \\
M_2^\alpha &= 9^\alpha nm + nm(3n+6)^\alpha + m(n^2+4n+4)^\alpha.
\end{aligned}$$

**البرهان:**

$$\begin{aligned}
M_1^\alpha(K_{1,n} \square C_m) &= \sum_{u \in V} d_u^\alpha \\
&= \sum_{u \in V_3(K_{1,n} \square C_m)} 3^\alpha + \sum_{u \in V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)} (n+2)^\alpha \\
&= |V_3(K_{1,n} \square C_m)| 3^\alpha + |V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)| (n+2)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= nm3^\alpha + m(n+2)^\alpha. \\
 M_2^\alpha(K_{1,n} \square C_m) &= \sum_{uv \in E(G)} (d_u \times d_v)^\alpha \\
 &= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u \times d_v)^\alpha] + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u \times d_v)^\alpha] \\
 &+ \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} [(d_u \times d_v)^\alpha] \\
 &= (3 \times 3)^\alpha |E_1(K_{1,n} \square C_m)| + (3 \times (n+2))^\alpha |E_2(K_{1,n} \square C_m)| \\
 &+ ((n+2) \times (n+2))^\alpha |E_3(K_{1,n} \square C_m)| \\
 &= 9^\alpha nm + nm(3n+6)^\alpha + m(n^2+4n+4)^\alpha.
 \end{aligned}$$

**نتيجة 10:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ مؤشر مجموع لوردريك  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$SL(K_{1,n} \square C_m) = 3nm\sqrt{\ln(3)} + m(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}.$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 SL(K_{1,n} \square C_m) &= \sum_{u \in V} d_u \sqrt{\ln d_u} \\
 &= \sum_{u \in V_3(K_{1,n} \square C_m)} d_u \sqrt{\ln d_u} + \sum_{u \in V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)} d_u \sqrt{\ln d_u} \\
 &= |V_3(K_{1,n} \square C_m)| 3\sqrt{\ln(3)} + |V_{n+2}(K_{1,n} \square C_m)|(n+2)\sqrt{\ln(n+2)} \\
 &= 3nm\sqrt{\ln(3)} + m(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}.
 \end{aligned}$$

**نتيجة 11:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ كثيرة الحدود المتناسقة  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$H(K_{1,n} \square C_m, x) = nm x^5 + nm x^{n+4} + m x^{2n+3}.$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 H(K_{1,n} \square C_m, x) &= \sum_{uv \in E(G)} x^{d_u+d_v-1} \\
 &= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u+d_v-1} + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u+d_v-1} \\
 &+ \sum_{uv \in E_3(K_{1,n} \square C_m)} x^{d_u+d_v-1} \\
 &= |E_1(K_{1,n} \square C_m)| x^{3+3-1} + |E_2(K_{1,n} \square C_m)| x^{3+n+2-1} \\
 &+ |E_3(K_{1,n} \square C_m)| x^{n+2+n+2-1} \\
 &= nm x^5 + nm x^{n+4} + m x^{2n+3}.
 \end{aligned}$$

**نتيجة 12:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة عندئذٍ المؤشر المتناسق  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$H(K_{1,n} \square C_m) = \frac{1}{3} nm + \frac{2}{n+5} nm + \frac{1}{n+2} m.$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 H(K_{1,n} \square C_m) &= 2 \int_0^1 H(K_{1,n} \square C_m, x) dx \\
 &= \frac{1}{3} nm + \frac{2}{n+5} nm + \frac{1}{n+2} m.
 \end{aligned}$$

**نتيجة 13:** ليكن لدينا  $K_{1,n} \square C_m$  الجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة مؤشر اتصال الرابطة الذرية  $K_{1,n} \square C_m$  يعطى بالعلاقة:

$$ABC(K_{1,n} \square C_m) = \sqrt{\frac{5}{9}} nm + \sqrt{\frac{n+4}{3(n+2)}} nm + \sqrt{\frac{2n+3}{(n+2)^2}} m.$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
ABC(K_{1,n} \square C_m) &= \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 1}{d_u \times d_v}} \\
&= \sum_{uv \in E_1(K_{1,n} \square C_m)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 1}{d_u \times d_v}} + \sum_{uv \in E_2(K_{1,n} \square C_m)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 1}{d_u \times d_v}} \\
&\quad + \sum_{uv \in E_3(v)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 1}{d_u \times d_v}} \\
&= |E_1(K_{1,n} \square C_m)| \sqrt{\frac{3+3-1}{3 \times 3}} + |E_2(K_{1,n} \square C_m)| \sqrt{\frac{3+n+2-1}{3(n+2)}} \\
&\quad + |E_3(K_{1,n} \square C_m)| \sqrt{\frac{n+2+n+2-1}{(n+2)(n+2)}} \\
&= \sqrt{\frac{5}{9}} nm + \sqrt{\frac{n+4}{3(n+2)}} nm + \sqrt{\frac{2n+3}{(n+2)^2}} m.
\end{aligned}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

تم في هذا البحث حساب  $M$  - كثيرة حدود للجداء الديكارتي للبيان الثنائي التجزئة التام مع حلقة  $K_{1,n} \square C_m$  من أجل أية قيمة لـ  $n, m$  وتم من خلال  $M$  - كثيرة حدود حساب بعض المؤشرات التي تعتمد عليها مثل مؤشر راندك العام ومؤشر راندك العكسي ومؤشر زغرب الأول والثاني ومؤشر زغرب المعدل الثاني ومؤشر التقسيم المتناظر ومؤشر زغرب الموسع ومؤشر المجموع العكسي من أجل  $K_{1,n} \square C_m$  كما تم حساب بعض المؤشرات وكثيرات الحدود التي تعتمد على التعريفات مثل مؤشر فرط زغرب ومؤشر زغرب المضاعف الأول والثاني والمؤشر المنسي وكثيرة حدود زغرب الأولى والثانية وكثيرة الحدود ذات الدرجة العكسية والمؤشر ذو الدرجة العكسية ومؤشر زغرب العام الأول والثاني ومؤشر لوردريك وكثيرة الحدود المتناسقة والمؤشر المتناسق ومؤشر اتصال الرابطة الذرية من أجل  $K_{1,n} \square C_m$ .

التوصيات:

نوصي بالاستفادة من النتائج التي تم التوصل إليها ويمتابعة العمل لإيجاد كثيرة  $M$  - كثيرة حدود لبعض البيانات الخاصة وبعض البيانات الناتجة عن مجموعة من العمليات الأساسية على بعض البيانات الخاصة مثل الجداء المباشر والجداء القوي وربط البيانات والمنقول والمتمم وحساب بعض المؤشرات من خلال  $M$  - كثيرة حدود وحساب بعض المؤشرات وكثيرات الحدود التي تعتمد على تعريفات هذه البيانات الخاصة.

## References:

- [1] POGLIANI, L. *From molecular connectivity indices to semiempirical connectivity terms: Recent trends in graph theoretical descriptors*. Chemical Reviews, Vol. 100, 2000, 3827-3858.
- [2] RANDIĆ, M. *Aromaticity of Polycyclic Conjugated Hydrocarbons*. Chemical Reviews, Vol. 103, 2003, 3449-3606.
- [3] MUNIR, M, NAZEER, W, KANG, S. M, QURESHI, M. I, NIZAMI, A. R, KWUN, Y. C. *Some Invariants of Jahangir Graphs*. Journal Symmetry, Vol. 9, 2017, doi:10.3390/sym9010017.
- [4] WIENER, H. *Structural determination of paraffin boiling point*. Journal of American chemical society, Vol. 69, 1947, 17-20.

- [5] AGRAWAL, V. K, BANO, S, MATHUR, K. C, KHADIKAR, P. *Novel application of Wiener vis-à-vis Szeged indices: Antitubercular activities of quinolones*. Proc. Indian Acad. Sci. (Chem.Sci.), Vol. 112, 2000, 137-146.
- [6] AVIHOO, A, BARASH, D. *Shape Similarity Measures for the Design of small RNA Switches*. Journal Biomolecular Structure and Dynamics, Vol. 24, 2006, 17-24.
- [7] SHAHEEN, R, MAHFUD, S, ALHAWAT. Q. *Some Invariants of Cartesian Product of a Path and a Complete Bipartite Graphs*. International Journal of Discrete Mathematics, Vol. 4, 2019, 61-70.
- [8] SHAHEEN, R, MAHFUD, S. *Graph theory*, 1<sup>st</sup>, ed, Tishreen university, Syria, 2011, 383.
- [9] DEUTSCH, E, KLAUZAR, S. *M-Polynomial, and degree-based topological indices*. Iran. J. Math. Chem, Vol. 6, 2015, 93–102.
- [10] BOLLOBAS, B, ERDÖS, P. *Graphs of extremal weights*. Ars Combin, Vol. 50, 1998, 225 – 233.
- [11] GUTMAN, I, TRINAJSTIC, N. *Graph theory and molecular orbitals total  $\phi$ -electron energy of alternant hydrocarbons*. Chem. Phys. Lett, Vol, 17, 1972, 535–538.
- [12] GUPTA, V. K, LOKESHA, V, SHWETHA, S. B, RANJINI, P. S. *On the symmetric division deg index of graph*, Southeast Asian Bull.Math, Vol. 40, 2016, 59 – 80.
- [13] AHMAD, M. S, NAZEER, W, KANG, S. M, JUNG, C. Y. *M-polynomials and Degree based Topological Indices for the Line Graph of Firecracker Graph*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, 2017, 2749-2776.
- [14] FURTULA, B, GRAOVAC, A, VUKIĆEVIĆ, D. *Augmented Zagreb index*. J. Math. Chem, Vol. 48, 2010, 370 – 380.
- [15] SHIRDEL, G. H, POUR, H. R, SAYADI, A. M. *The hyper-Zagreb index of graph operations*. Iran. J. Math. Chem, Vol. 4, 2013, 213–220.
- [16] GHORBANI, M, AZIMI, N. *Note on multiple Zagreb indices*. Iran. J. Math. Chem, Vol 3, 2012, 137–143.
- [17] HERNÁNDEZ, J. C, MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A, RODRÍGUEZ, J. M, SIGARRETA, J. M. *Harmonic Index and Harmonic Polynomial on Graph Operations*. Symmetry 2018, 10, 456, doi:10.3390/sym10100456.
- [18] MILIĆEVIĆ, A, NIKOLIĆ, S. *On variable Zagreb indices*. Croat. Chem. Acta, Vol 77, 2004, 97–101.
- [19] Britto Antony Xavier, G, Suresh, E, Gutman, I. *Counting relations for general Zagreb indices*. Kragujev. J. Math, Vol 38, 2014, 95–103.
- [20] VUKIĆEVIĆ, D, Gašperov, M. *Bond additive modeling I. Adriatic indices*. Croat. Chem. Acta, Vol 83, 2010, 243–260.
- [21] Iranmanesh, M, A, Saheli, M. *On the harmonic index and harmonic polynomial of Caterpillars with diameter four*. Iran. J. Math. Chem. VOL 5, 2014, 35–43.
- [22] Estrada, E, Torres, L, Rodríguez, L, Gutman, I. *“An atom bond connectivity index”*. Indian Journal of Chemistry, VOL 37, 1998, 849-855.