Study of the Structure of Bitopological spaces

Dr. Adnan Zarif *
Dr. Suleiman Mahmoud **
Maroa Shallah ***

(Received 27 / 11 / 2021. Accepted 26 / 4 /2022)

□ ABSTRACT □

In 2018,the researchers Gharibah and ALhamido define a new type of open set in Bitopological space that is open set of type $N\alpha$ and define interior and closure set of the type Nα .
In this research we will present a new topological concepts in Bitopplogical space according to the concept of open set of the type Nα such as neighborhood , closure , exterior , boundary and derived set of the type Nα and study the most important properties and relationships achieved by these concepts in bitopological spacses .

Key words: Bitopological space, $N\alpha -$Neighborhood ,$N\alpha -$Closure set ,$N\alpha -$Derived set, $N\alpha -$Exterior set , $N\alpha -$ Boundary set .

* **Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Adnan.zarif@2021**
** **Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Suliman-mmn@yahoo.com**
*** **Master student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria**

دراسة في بنية الفضاءات ثنائية التبولوجيا

د. عدنان ظريف*
د. سليمان محمود**
مروه شلاح***

(تاريخ الإيداع 28 / 11 / 2021. قُبِل للنشر في 26 / 4 /2022)

□ ملخّص □

عرف الباحثان $Gharibah$ و $ALhamido$ في العام 2018 نمطاً جديداً من المجموعات المفتوحة في الفضاء ثنائي التبولوجيا و هي المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ ، و عرفا داخلية و لصاقة مجموعة وفق هذا النمط من المجموعات .

سنقدم في هذا البحث مفاهيم تبولوجية جديدة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا وفق مفهوم المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ مثل مجاورة و لصاقة و خارجية و جبهية و مشتقة مجموعة من النمط $N\alpha$ و دراسة أهم الخواص و العلاقات التي تحققها هذه المفاهيم في الفضاءات ثنائية التبولوجيا.

الكلمات المفتاحية : فضاء ثنائي التبولوجيا ، مجاورة مجموعة من النمط $N\alpha$ ، لصاقة مجموعة من النمط $N\alpha$ ، مشتقة مجموعة من النمط $N\alpha$ ، خارجية مجموعة من النمط $N\alpha$ ، جبهية مجموعة من النمط $N\alpha$.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. Adnan.zarif@2021
** أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. Sulimanm–mmn@yahoo.com
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات–كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية – سورية.

مقدمة :

عمّ $Kelly$ مفهوم الفضاء التبولوجي عام 1963 حيث أدخل مفهوم فضاء ثنائي التبولوجيا كمجموعة غير خالية X مزودة باثنتين من التبولوجيا و يرمز له بالرمز $\left(X ، \tau_1 ، \tau_2\right)$ حيث كل من $\left(X ، \tau_2\right)$ ، $\left(X ، \tau_1\right)$ فضاء تبولوجي [1] و عرف المجموعات المفتوحة و المغلقة في هذا الفضاء ، و عرفت العديد من المفاهيم التبولوجية في الفضاءات ثنائية التبولوجيا مثل موضوعات االفصل و خصائصها و العلاقة فيما بينها من قبل العديد من الباحثين مثل $Murdeshwar$ و $Naimplly$ عام 1966 [2] و $Reilly$ عام 1972 [3] و $Sunder$ عام 1978 [4] و $Roshmi$ و $Hossain$ عام 2019 [5] وعرف $Reilly$ مفهوم التراص عام 1972 [6] و عرف $ALobaidi$ التراص عداً عام 2015 [7] و قدم $previn$ مفهوم الترابط في الفضاءات ثنائية التبولوجيا عام 1967 [8] و في العام 2010 عرف Jabbar و Nasir المجموعات المفتوحة من النمط Nفي الفضاء ثنائي التبولوجيا [9] كما عرف $Gharibah$ و $ALhamido$ عام 2018 المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$ و المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ و درسا الخصائص الأساسية لهذه الأنماط و قدما تعريف داخلية و لصاقة مجموعة وفقاً لهذا النمط من المجموعات المفتوحة في فضاء ثنائي التبولوجيا [10] .

أهمية البحث وأهدافه :

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم دراسة المفاهيم الأساسية في بنية الفضاء ثنائي التبولوجيا و دراسة خواصها و العلاقات فيما بينها و هذا ما يمثل إضافة في مجال الفضاء ثنائي التبولوجيا .

طرائق البحث و مواده :

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية و بشكل خاص ضمن التبولوجيا العامة و بالتالي فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات و التبولوجيا العامة .

نورد فيما يلي بعض الرموز و المصطلحات المستخدمة في البحث :

$(X ، \tau_1 ، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ، eX(A) خارجية مجموعة A ، $bd(A)$ جبهية مجموعة A ، $d(A)$ مشتقة مجموعة A ، $cl(A)$ لصاقة المجموعة A .

– تعاريف أساسية و نتائج معروفة :

تعريف 1 [11] : ليكن $(X، \tau)$ فضاءً تبولوجياً و لتكن A مجموعة جزئية من X يقال عن المجموعة A إنها مجموعة مفتوحة من النمط α (α – مفتوحة) في الفضاء التبولوجي $(X ، \tau)$ إذا تحقق الشرط

$$A \subseteq int\left(cl\left(int A\right)\right)$$

تعريف 2 [1] : لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما و ليكن كل من $\tau_1 ، \tau_2$ تبولوجيا على X عندئذٍ المجموعة $\left(X ، \tau_1 ، \tau_2\right)$ تسمى فضاء ثنائي التبولوجيا و تدعى المجموعة A الجزئية من X مجموعة مفتوحة في $\left(X ، \tau_1 ، \tau_2\right)$ إذا كان $A \in \tau_1 \cup \tau_2$.

تدعى A^c متممة المجموعة A مجموعة مغلقة في الفضاء $\left(X ، \tau_1 ، \tau_2\right)$.

تعريف 3 [9] : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تدعى المجموعة A الجزئية من Xمجموعة مفتوحة من النمط N (N – مفتوحة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا إذا كانت مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $\left(X، \tau_1 \vee \tau_2\right)$ حيث $\tau_1 \vee \tau_2$ هي أضعف تبولوجيا تحوي كل من τ_1، τ_2 أي أن :

$$(\tau_1 \vee \tau_2 \;\; is\ supremum\ topology\ on\ X\ contains\ \tau_1, \tau_2)$$

و تدعى متممة المجموعة المفتوحة من النمط N مجموعة مغلقة من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا .

تعريف 4 [10] : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ تدعى المجموعة A الجزئية من X مجموعة مفتوحة من النمط Nα ($N\alpha$ – مفتوحة) في الفضاء التبولوجي الثنائي إذا كانت مجموعة α – مفتوحة في الفضاء التبولوجي $\left(X، \tau_1 \vee \tau_2\right)$.

متممة المجموعة المفتوحة من النمط Nα هي مجموعة مغلقة من النمط Nα (Nα – مغلقة) في الفضاء ثنائي التبولوجيا .

يرمز لأسرة كل المجموعات المفتوحة من النمط Nα بالرمز $N\alpha . O(X)$.

يرمز لأسرة كل المجموعات المغلقة من النمط Nα بالرمز $N\alpha . C(X)$.

تعريف 5 [10] : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ أي عنصر x من X يدعى نقطة داخلية من النمط Nα للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة G من النمط Nα تحقق العلاقة :

$x \in G \subseteq A$.

تعريف 6 [10] : مجموعة كل النقاط الداخلية من النمط Nα للمجموعة A تدعى داخلية A من النمط Nα و يرمز لها بالرمز $N\alpha - \mathrm{int}(A)$.

إن التمهديتين الآتيتين ضروريتان و سوف نستفيد من التمهدية الأولى في برهان المبرهنات (1) ، (3) ،(4) ، (5) و من التمهيدية الثانية في برهان المبرهنة (2) .

تمهيدية (1) [10] : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن A مجموعة كيفية من نقاطه عندئذٍ تتحقق كل من النتائج الآتية :

1. كل مجموعة مفتوحة في الفضاء ثنائي التبولوجيا هي مجموعة مفتوحة من النمط Nα .
2. اجتماع مجموعات $N\alpha$ – مفتوحة هو مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة .
3. $N\alpha - int(A) \subseteq A$
4. $A \subseteq N\alpha - cl(A)$
5. A مجموعة مفتوحة من النمط Nα إذا و فقط إذا كانت $A = N\alpha - int(A)$
6. A مجموعة مغلقة من النمط Nα إذا و فقط إذا كانت $A = N\alpha - cl(A)$

تمهيدية (2) [10] : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن A و B مجموعتين كيفيتين من نقاطه عندئذٍ تتحقق كل من النتائج الآتية :

1. $A \subseteq B \Rightarrow N\alpha - int(A) \subseteq N\alpha - int(B)$
2. $A \subseteq B \Rightarrow N\alpha - cl(A) \subseteq N\alpha - cl(B)$

3. $N\alpha - int\big(N\alpha - int(A)\big) = N\alpha - int(A)$
4. $N\alpha - cl(A^c) = (N\alpha - int(A))^c$
5. $N\alpha - int(A \cap B) = N\alpha - int(A) \cap N\alpha - int(B)$
6. $N\alpha - cl\big(N\alpha - Cl(A)\big) = N\alpha - Cl(A)$

ملاحظة [10] :

1. كل فضاء تبولوجي هو فضاء ثنائي التبولوجيا

مثال : ليكن $(X ، \tau)$ فضاءً تبولوجياً فإن $(X، \tau ، \tau)$ فضاء ثنائي التبولوجيا .

2. ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء ثنائي التبولوجيا فضاء تبولوجياً لكن يمكن استحداث فضاء تبولوجي منه بأكثر من طريقة .

مثال : ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذٍ $(X، \tau_1 \vee \tau_2)$ فضاء تبولوجي حيث $\tau_1 \vee \tau_2$ هي أضعف تبولوجيا تحوي كل من τ_1، τ_2 أي أن :

$(\tau_1 \vee \tau_2 \ \textit{is supremum topology on } X \textit{ contains } \tau_1, \tau_2)$

النتائج و المناقشة :

تعريف 7 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ ، نقول عن A أنها مجاورة من النمط $N\alpha$ للنقطة x من X إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ مثل G بحيث يكون $x \in G \subseteq A$.

نرمز لأسرة المجاورات من النمط $N\alpha$ للنقطة x بالرمز $V(x)_{N\alpha}$.

تعريف 8 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن النقطة x من X نسمي كل مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ تحوي النقطة xمجاورة مفتوحة من النمط $N\alpha$ للنقطة x .

تعريف 9 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ نقول عن أي x من X أنها نقطة لاصقة من النمط Nα للمجموعة A إذا تحققت العلاقة : $\forall\, v \in V_{N\alpha}(x): v \cap A \neq \emptyset$

تعريف 10 : نسمي مجموعة جميع النقاط اللاصقة من النمط $N\alpha$ بالمجموعة A لصاقة المجموعة A من النمط $N\alpha$و نرمز لها بالرمز $N\alpha - cl(A)$.

ملاحظة : لقد عرَفت اللصاقة من النمط $N\alpha$ في المرجع [10] بشكل مختلف و لكن سنبين في هذا البحث إن التعريف المذكور يمكن استنتاجه من تعريفنا .

تعريف 11 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ نقول عن أي $x \in X$ أنها نقطة تراكم من النمط Nα للمجموعة A إذا تحققت العلاقة : $\forall\, v \in V_{N\alpha}(x) \Longrightarrow v \cap A \neq \{x\} ، \emptyset$

تعريف 12: نسمي مجموعة جميع نقاط التراكم من النمط Nα للمجموعة A مشتقة المجموعة A من النمط Nα و يرمز لها بالرمز $N\alpha - d(A)$.

تعريف 13 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن $A \subseteq X$ نقول عن أي x من X أنها نقطة خارجية من النمط Nα للمجموعة A إذا وجدت مجموعة مفتوحة G من النمط Nα تحقق $x \in G \subseteq X \setminus A$.

تعريف 14 : نسمي مجموعة جميع النقاط الخارجية من النمط Nα للمجموعة A خارجية المجموعة A من النمط Nα و يرمز لها بالرمز $\mathrm{N\alpha} - eX(A)$.

تعريف 15: ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ نقول عن أي x من X أنها نقطة جبهية (حدية) من النمط Nα للمجموعة A إذا قاطعت كل مجاورة $N\alpha$ – مفتوحة للنقطة xكلاً من A و متممة A تقاطعاً غير خالٍ .

تعريف 16 : نقول عن مجموعة جميع النقاط الجبهية من النمط Nα للمجموعة A جبهية المجموعة A من النمط Nα و يرمز لها بالرمز $\mathrm{N\alpha} - bd(A)$.

نتيجة (1) : بالاعتماد على التعاريف السابقة نجد أن :

1. كل مجموعة مفتوحة من النمط $N\alpha$ هي مجاورة من النمط $N\alpha$ لكل نقطة من نقاطها .
2. $N\alpha - eX(A) = N\alpha - int(A^c) = X \setminus \mathrm{N\alpha - cl(A)}$
3. $\mathrm{N\alpha - bd(A) = X \setminus (N\alpha - eX(A) \cup N\alpha - int(A))}$
4. $N\alpha - d(A) \subseteq N\alpha - cl(A)$

مبرهنة 1 : ليكن $(X، \tau_1، \tau_2)$ فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ مجموعة ما عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية

$$N\alpha - int(A^c) = (N\alpha - cl(A))^c$$

البرهان : لدينا $A \subseteq N\alpha - cl(A) \Longleftarrow \Leftarrow A^c \subseteq \big(N\alpha - cl(A)\big)^c$

$$N\alpha - int\big(N\alpha - cl(A)\big)^c \subseteq N\alpha - int(A^c)$$

لكن $N\alpha - cl(A)$ هي مجموعة $N\alpha-$ مغلقة بالتالي $\big(N\alpha - cl(A)\big)^c$ مجموعة $N\alpha$ – مفتوحة بالتالي حسب العلاقة (5) من التمهيدية 1 نجد : $\big(N\alpha - cl(A)\big)^c = N\alpha - int\big(N\alpha - cl(A)\big)^c \Leftarrow$

$$\big(N\alpha - cl(A)\big)^c \subseteq N\alpha - int(A^c) \ldots. (1)$$

لدينا $N\alpha - int(A^c) \subseteq A^c \Longleftarrow (N\alpha - int(A^c)\,)^c \subseteq (A^c)^c \Longleftarrow A \subseteq (N\alpha - int(A^c)\,)^c$

$\Longleftarrow N\alpha - cl((N\alpha - int(A^c)\,)^c \quad N\alpha - cl(A) \subseteq$ (لكن $N\alpha - int(A^c)$ هي مجموعة

$N\alpha$ – مفتوحة $\Longleftarrow$ المجموعة $(N\alpha - int(A^c)\,)^c$ هي مجموعة $N\alpha-$ مغلقة بالتالي

$$N\alpha - cl((N\alpha - int(A^c)\,)^c) = (N\alpha - int(A^c)\,)^c$$

أي : $N\alpha - cl(A) \subseteq (N\alpha - int(A^c)\,)^c \Longleftarrow \ldots(2) \; N\alpha - int(A^c) \subseteq \big(N\alpha - cl(A)\big)^c$

من العلاقتين (1) و (2) نجد : $N\alpha - int(A^c) = (N\alpha - cl(A))^c$

مبرهنة 2 : لتكن A ، B مجموعتين كيفيتين في فضاء ثنائي التبولوجيا $(\mathrm{X}، \tau_1، \tau_2)$ عندئذٍ تكون الخواص الأتية محققة :

1. $\mathrm{A \subseteq B \Longrightarrow N\alpha - d(A) \subseteq N\alpha - d(B)}$
2. $A \subseteq B \Longrightarrow N\alpha - eX(B) \subseteq N\alpha - eX(A)$
3. $N\alpha - d(A \cup B) = N\alpha - d(A) \cup N\alpha - d(B)$
4. $N\alpha - eX(A \cup B) = N\alpha - eX(A) \cap N\alpha - eX(B)$

البرهان :

(1) لتكن $x \in N\alpha - d(A)$ بالتالي حسب التعريف $\forall\ v \in V_{N\alpha}(x) \Rightarrow v \cap A \neq \{x\} ، \emptyset$

و بما أن $A \subseteq B$ فإن $\forall$ $v \in V_{N\alpha}(x) \Rightarrow v \cap B \neq \{x\} ، \emptyset$ بالتالي $x \in N\alpha - d(B)$

ومنه $N\alpha - d(A) \subseteq N\alpha - d(B)$

(2) $A \subseteq B \Leftarrow B^c \subseteq A^c \Leftarrow N\alpha - int(A^c) \subseteq N\alpha - int(B^c) \Leftarrow$
$\Leftarrow N\alpha - eX(B) \subseteq N\alpha - eX(A)$

(3)
$$\begin{aligned} x \in N\alpha - d(A \cup B) &\Leftrightarrow \forall v \in V_{N\alpha}(x): v \cap (A \cup B) \neq \{x\}, \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall\ v \in V_{N\alpha}(x): (v \cap A) \cup (v \cap B) \neq \{x\}, \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall\ v \in V_{N\alpha}(x): (v \cap A) \neq \{x\}, \emptyset\ \ \vee (v \cap B) \neq \{x\}, \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in N\alpha - d(A)\ \vee\ x \in N\alpha - d(B) \\ &\Leftrightarrow x \in N\alpha - d(A) \cup N\alpha - d(B) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} N\alpha - eX(A \cup B) = N\alpha - int((A \cup B)^c) &= N\alpha - int\big((A^c) \cap (B^c)\big) \\ &= N\alpha - int(A^c) \cap N\alpha - int(B^c) \\ &= N\alpha - eX(A) \cap N\alpha - eX(B) \end{aligned}$$

<u>نتيجة 2 :</u> ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية :

$$N\alpha - d(A \cap B) \subseteq N\alpha - d(A) \cap N\alpha - d(B)$$

البرهان : لدينا $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B \Leftarrow$

$N\alpha - d(A \cap B) \subseteq N\alpha - d(A)$ و $N\alpha - d(A \cap B) \subseteq N\alpha - d(B)$

بالتالي $N\alpha - d(A \cap B) \subseteq N\alpha - d(A) \cap N\alpha - d(B)$

<u>مبرهنة 3</u> : ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاءً ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ و لتكن الأسرة $\{F_i \in N\alpha - C(X) ؛ A \subseteq F_i\}$ عندئذٍ $N\alpha - Cl(A) = \cap F_i\ , \forall\ i \in I$.

البرهان : لتكن $x \in \left(N\alpha - CL(A)\right)^c$ بالتالي يوجد مجاورة واحدة على الأقل من النمط $N\alpha$ مثل v_0 تحقق العلاقة $A \cap v_0 = \emptyset$

بما أن v_0 مجاورة من النمط $N\alpha$ للنقطة x في الفضاء (X, τ_1, τ_2) فإن يوجد مجموعة $N\alpha$–مفتوحة G تحقق $x \in G \subseteq v_0$ بالتالي $G \cap A \subseteq v_0 \cap A = \emptyset$ أي $G \cap A = \emptyset \Leftarrow A \subseteq X\backslash G$ لكن المجموعة $X\backslash G$ مجموعة $N\alpha$ – مغلقة وتحوي المجموعة $A \Leftarrow X\backslash G \in \{F_i \in N\alpha - C(X) ؛ A \subseteq F_i\}$

من جهة ثانية $x \in G \Leftarrow \Leftarrow x \notin X\backslash G$ $x \notin \cap F_i \Leftarrow x \in X\backslash \cap F_i$ ومنه
$\subseteq X\backslash \cap F_i \Leftarrow (N\alpha - cl(A))^c$ $\cap F_i \subseteq N\alpha - cl(A) \ldots.(1)$

العكس: لتكن $x \notin \cap F_i \Leftarrow x \notin F_0$ حيث F_0 إحدى المجموعات المغلقة من النمط $N\alpha$ المشكلة للتقاطع بالتالي $x \in X\backslash F_0 = G_0$

G_0 مجموعة $N\alpha$– مفتوحة تحوي النقطة x بالتالي $G_0 \in V_{N\alpha}(x)$ بما أن $A \subseteq F_0$ فإن $A \cap G_0 = \emptyset$

و منه $x \notin N\alpha - cl(A)$ و عليه فإن $N\alpha - cl(A) \subseteq \cap F_i \ldots.(2)$ من (1) و (2) نجد
$N\alpha - cl(A) = \cap F_i$

<u>مبرهنة 4:</u> ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ تتحقق العلاقات الآتية :

.1 $N\alpha - cl(A) = A \cup N\alpha - d(A)$

.2 A مجموعة $N\alpha-$ مغلقة $\Leftrightarrow N\alpha-d(A)\subseteq A$

.3 $N\alpha-bd(A)=N\alpha-cl(A)\cap N\alpha-cl(A^c)$

البرهان :

(1) لدينا $N\alpha-d(A)\subseteq N\alpha-cl(A)$ و $A\subseteq N\alpha-cl(A)$ ومنه

$A\cup N\alpha-d(A)\subseteq N\alpha-cl(A)\ \dots\ (1)$

لتكن $x\in N\alpha-cl(A)$ نميز حالتين :

- $x\in A \Longleftarrow x\in A\cup N\alpha-d(A) \Longleftarrow N\alpha-cl(A)\subseteq A\cup N\alpha-d(A)$
- $x\notin A \Longleftarrow \forall v\in V_{N\alpha}(x): v\cap A\neq\{x\},\emptyset \Longleftarrow x\in N\alpha-d(A) \Longleftarrow x\in A\cup N\alpha-d(A)$

$\Longleftarrow N\alpha-cl(A)\subseteq A\cup N\alpha-d(A)\ \dots\ (2)$ من (1) و(2) نجد $N\alpha-cl(A)=A\cup N\alpha-d(A)$

(2) بفرض A مجموعة $N\alpha-$ مغلقة و لتكن $x\in X\setminus A$ أي $x\in A^c$

A^cمجموعة $N\alpha-$ مفتوحة بالتالي هي مجاورة من النمط $N\alpha$ لكل نقطة من نقاطها و بالإضافة إلى ذلك لدينا

$A\cap A^c=\emptyset \Longleftarrow x\notin N\alpha-d(A) \Longleftarrow N\alpha-d(A)\subseteq A$

العكس: لدينا $N\alpha-cl(A)=N\alpha-d(A)\cup A$ لكن $N\alpha-d(A)\subseteq A \Longleftarrow N\alpha-cl(A)=A$ ومنه

المجوعة A مجموعة $N\alpha-$ مغلقة

(3) حسب تعريف مجموعة النقاط الجبهية من النمط $N\alpha$ نجد :

$$\begin{aligned}N\alpha-bd(A)&=\{x\in X, x\notin N\alpha-int(A)\ and\ x\notin N\alpha-eX(A)\}\\&=\{x\in X, x\notin N\alpha-int(A)\ and\ x\notin N\alpha-int(A^c)\}\\&=\left\{x\in X, x\in \left(N\alpha-int(A)\right)^c\ and\ x\in\left(N\alpha-int(A^c)\right)^c\right\}\\&=\{x\in X, x\in N\alpha-cl(A^c)\ and\ x\in N\alpha-cl(A)\}\end{aligned}$$

لأن $\left(N\alpha-int(A)\right)^c=N\alpha-cl(A^c)$ و$N\alpha-int(A^c)=(N\alpha-cl(A))^c$

$$N\alpha-bd(A)=\{x\in X, x\in N\alpha-cl(A^c)\cap N\alpha-cl(A)\}$$

$$N\alpha-bd(A)=N\alpha-cl(A)\cap N\alpha-cl(A^c)$$

<u>نتيجة 3 :</u> ليكن $\left(X، \tau_1، \tau_2\right)$ فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن $A\subseteq X$ عندئذٍ الخواص الآتية محققة :

.1 $N\alpha-bd(A)=N\alpha-cl(A)\setminus N\alpha-int(A)$

.2 $N\alpha-cl(A)=N\alpha-bd(A)\cup N\alpha-int(A)$

.3 $N\alpha-bd(A)=N\alpha-bd(A^c)$

.4 $N\alpha-eX\left(N\alpha-cl(A)\right)=N\alpha-eX(A)$

البرهان : (1)

$$\begin{aligned}N\alpha-bd(A)&=N\alpha-cl(A)\cap N\alpha-cl(A^c)=N\alpha-cl(A)\cap\left(N\alpha-int(A)\right)^c\\&=N\alpha-cl(A)\cap\left(X\setminus N\alpha-int(A)\right)\\&=N\alpha-cl(A)\cap X\setminus\left(N\alpha-cl(A)\cap N\alpha-int(A)\right)\\&=N\alpha-cl(A)\setminus N\alpha-int(A)\end{aligned}$$

(2) لدينا $N\alpha-int(A)\subseteq A\subseteq N\alpha-cl(A)$

$$\begin{aligned}N\alpha-bd(A)\cup N\alpha-int(A)&=\left(N\alpha-cl(A)\setminus N\alpha-int(A)\right)\cup N\alpha-int(A)\\&=N\alpha-cl(A)\end{aligned}$$

(3) $N\alpha-bd(A^c)=N\alpha-cl(A^c)\cap N\alpha-cl(A)=N\alpha-bd(A)$

(4) $N\alpha - eX\big(N\alpha - cl(A)\big) = N\alpha - int\Big(\big(N\alpha - cl(A)\big)^c\Big)$
$= \big(N\alpha - cl(A)\big)^c = N\alpha - int(A^c) = \Big(N\alpha - cl\big(N\alpha - cl(A)\big)\Big)^c$
$= N\alpha - eX(A)$

<u>مبرهنة 5 :</u> ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ مجموعة كيفية من نقاطه عندئذٍ تتحقق العلاقات الآتية :

1. المجموعة A هي مجموعة Nα – مغلقة $\Leftrightarrow$ $N\alpha - bd(A) \subseteq A$

2. المجموعة A هي مجموعة Nα – مفتوحة $N\alpha - bd(A) \subseteq A^c$ $\Leftrightarrow$

البرهان : **(1)** بفرض A مجموعة Nα – مغلقة $\Leftarrow$ $A = N\alpha - cL(A)$
$N\alpha - bd(A) = N\alpha - cl(A) \setminus N\alpha - int(A) = A \setminus N\alpha - int(A) \subseteq A$
العكس : بفرض $N\alpha - bd(A) \subseteq A \Leftarrow N\alpha - cl(A) \setminus N\alpha - int(A) \subseteq A$
$\Leftarrow N\alpha - cl(A) \subseteq A \Leftarrow N\alpha - cl(A) = A \Leftarrow$ A مجموعة Nα – مغلقة

(2) المجموعة A هي مجموعة Nα – مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A^c مجموعة Nα – مغلقة
أي أن تكون $N\alpha - bd(A^c) \subseteq A^c$ لكن $N\alpha - bd(A) = N\alpha - bd(A^c)$ $\Leftarrow$ المجموعة A هي مجموعة Nα – مفتوحة إذا وفقط إذا كان $N\alpha - bd(A) \subseteq A^c$

<u>نتيجة 4 :</u> ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن $A \subseteq X$ مجموعة كيفية من نقاطه عندئذٍ المجموعة A هي مجموعة Nα – مغلقة و Nα – مفتوحة معاً إذا وفقط إذا كانت $N\alpha - bd(A) = \emptyset$.

البرهان : بفرض أن A مجموعة Nα – مغلقة $\Leftarrow$ $A = N\alpha - cl(A)$ و A مجموعة Nα – مفتوحة $\Leftarrow$
$\Leftarrow A = N\alpha - int(A)$
$N\alpha - bd(A) = N\alpha - cl(A) \setminus N\alpha - int(A) = A \setminus A = \emptyset$
العكس : نفرض $N\alpha - bd(A) = \emptyset \Leftarrow N\alpha - cl(A) \setminus N\alpha - int(A) = \emptyset$
$N\alpha - cl(A) \subseteq N\alpha - int(A) \Leftarrow$
بما أن $A \subseteq N\alpha - cl(A) \Leftarrow A \subseteq N\alpha - cl(A) \subseteq N\alpha - int(A)$
لكن $N\alpha - int(A) \subseteq A \subseteq N\alpha - cl(A)$ بالتالي $A = N\alpha - cl(A) = N\alpha - int(A)$ و منه المجموعة A هي Nα – مغلقة و Nα – مفتوحة معاً .

<u>نتيجة 5</u> : ليكن (X, τ_1, τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا و لتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ الخواص الآتية محققة :

1. $N\alpha - bd(A) \cap N\alpha - int(A) = \emptyset$
2. $N\alpha - bd(A) \cap N\alpha - eX(A) = \emptyset$
3. $N\alpha - int(A) \cap N\alpha - eX(A) = \emptyset$
4. $N\alpha - int(A) \cup N\alpha - bd(A) \cup N\alpha - eX(A) = X$

البرهان :

(1) $N\alpha - bd(A) \cap N\alpha - int(A) = \big(N\alpha - cl(A) \setminus N\alpha - int(A)\big) \cap N\alpha - int(A)$
$= \big(N\alpha - cl(A) \cap N\alpha - int(A)\big) \setminus \big(N\alpha - cl(A) \cap N\alpha - int(A)\big)$
$= \mathrm{N}\alpha - \mathrm{int(A)} \setminus \mathrm{N}\alpha - \mathrm{int(A)} = \emptyset$

(2) $N\alpha - bd(A) \cap N\alpha - eX(A) = N\alpha - bd(A^c) \cap N\alpha - int\,(A^c) = \emptyset$

(3) $N\alpha - int(A) \cap N\alpha - eX(A) = N\alpha - int(A) \cap N\alpha - int(A^c)$

$$= N\alpha - int(A) \cap \left(N\alpha - cl(A)\right)^c$$
$$= N\alpha - int(A) \cap \left(X \setminus N\alpha - cl(A)\right)$$
$$= (N\alpha - int(A) \cap X) \setminus \left(N\alpha - int(A) \cap N\alpha - cl(A)\right)$$
$$= N\alpha - int(A) \setminus N\alpha - int(A) = \emptyset$$

(4) $N\alpha - int(A) \cup N\alpha - bd(A) \cup N\alpha - eX(A) = N\alpha - cl(A) \cup N\alpha - eX(A)$
$$= \ N\alpha - cl(A) \cup N\alpha - int(A^c) \ = N\alpha - cl(A) \cup N\alpha - cl(A))^c = \text{X}$$

الاستنتاجات والتوصيات

إن دراسة هذه المفاهيم التبولوجية تمثل إضافة جديدة في الفضاءات ثنائية التبولوجيا و يمكن البناء عليها في دراسة :

1. موضوعات الفصل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا وفقاً لمفهوم المجموعات المفتوحة من النمط $N\alpha$.
2. مفهوم التراص و التراص عداً .

Reference

[1] – Kelly,J.C.*Bitopological Spaces*.Proce.London Math.Soc.13,1963, 71-89.

[2]-Murdeshwar.M.G and Naimpally.S.A;*Quasi-uniform topological spaces* .Monograph Noordhoff,1966.

[3]- Reilly,I.L*;On bitopological separation properties*.Math,Vol(5),1972, 14-25.

[4]Sunder.L.*Pairwise concepts in bitopological spaces*.Austral.Math.Soc Vol. 26 , 1978,241-250.

[5] - Roshmi ,R. ; Hossain ,M.S. *Properties of Seperation Axiom in Bitopological Space* J.Bangladesh Acad.Sci Vol .43. No . 2 ,2019, 191-195 .

[6]- Reilly,I.L; *Bitopological Local Compactness*,Mathematics.1972, 407-411.

[7]-ALobaidi,A.K.L;*On Almost Countably compact of Bitopological Spaces*.AL-Qadisiyah journal for pure science, Vol. 22, NO. 1 , 2017.

[8] -Pervin , W.J *Connectedness in bitopological spaces*, Indag. Math.,1967 , 369-372.

[9] – Jabbar,N.A.; Nasir,A.*I.Some Types of Commpactness in Bitopological Spaces*, Ibn Al-Haitham J. For pure & Appl.Sci. Vol. 23, 2010,321-327.

[10]– غريبة،طالب؛الحميدو.رياض.*دراسة في الفضاءات متعددة التبولوجيا* ، أطروحة دكتوراه، جامعة البعث 2019.

[10] Gharibah,T.;AL-hamido.R.*Study of Multi-Topological Spaces*,dissertation PHD , ALbaath University 2019.

[11] – Ngastad,O.*On Some Classes of nearly Open Sets.Pacific J.Math*.1 ,1965,961-970.