

The Cauchy – Pompeiu's Representation Formula In The Octal Of Unit Disk

Dr. Hasan Baddour*
Dr. Abd Albasset Younso**
Anas Qr***

(Received 21 / 6 / 2022. Accepted 25 / 10 /2022)

□ ABSTRACT □

In this research, we found the integral Cauchy – Pompeiu's formula in the octal of unit disk \mathbb{D}_4 of the complex plain, for the class $C^1(\mathbb{D}_4; \mathbb{C}) \cup C(\overline{\mathbb{D}_4}; \mathbb{C})$, by editing the Cauchy – Pompeiu's representation in the unit disk, using the reflection method, to determine the Integral's Cauchy – Pompeiu's Operator, in this domain, the integral Cauchy – Pompeiu's formula in a domain Ω , separated onto two integrals, the first is on the boundary of Ω , and represents an analytic function on Ω , the second is on the domain Ω , and represents the Cauchy – Pompeiu's Operator.

Keywords: operator theory – Cauchy pompeiu's operator – octal unit disk – integral's representation – Schwartz's problem – complex analysis.

* Professor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria.

** Doctor – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria.

*** PHD student – Department of Mathematics – Faculty of Science – Tishreen University – Lattakia – Syria – Email: anas.deebkar@tishreen.edu.sy.

صيغة كوشي - بومبيو التكاملية في ثمن قرص الواحدة

د. حسن بدور *

د. عيد الباسط يونسو **

أنس قر ***

(تاريخ الإيداع 21 / 6 / 2022. قُبل للنشر في 25 / 10 / 2022)

□ ملخص □

في هذا البحث قمنا بتعيين صيغة كوشي - بومبيو التكاملية في ثمن قرص الواحدة \mathbb{D}_4 من المستوي العقدي، لصف الدوال $C^1(\mathbb{D}_4; \mathbb{C}) \cap C(\mathbb{D}_4; \bar{\mathbb{C}})$ وذلك بتعديل الصيغة الموجودة مسبقاً في قرص الواحد، باستخدام طريقة الانعكاس، بُغية إيجاد مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في هذه المنطقة، إذ تنقسم صيغة كوشي بومبيو التكاملية في منطقة Ω إلى مجموع تكاملين، أحدهما على حدود المنطقة ويمثل دالة تحليلية في Ω ، أما التكامل الثاني فهو تكامل على المنطقة Ω ، ويمثل مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في Ω .

الكلمات المفتاحية: نظرية المؤثرات - مؤثر كوشي بومبيو - ثمن قرص الواحدة - التمثيل التكاملي - مسألة شوارتز - التحليل العقدي.

* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** دكتور - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

*** طالب دكتوراه - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية anas.deebkar@tishreen.edu.sy

مقدمة:

تُعد نظرية المؤثرات فرعاً مهماً من فروع التحليل الدالي، تدرس خصائص المؤثرات (خطي ، محدود ، مستمر ، تقليص ، ...) على الفضاءات الشهيرة مثل فضاء الدوال المستمرة $C(D; \mathbb{C})$ في المنطقة D ، وفضاء الدوال القابلة للمكاملة $L(D; \mathbb{C})$ ، وغيرها، في هذا البحث سنوجد $T_{\mathbb{D}_4}$ ، مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في ثمن قرص الواحدة من المستوي العقدي \mathbb{D}_4 ، وذلك بتعديل صيغة كوشي - بومبيو التكاملية في قرص الواحدة.

دراسات مرجعية:

- * قام H.Begehr و T.Vaitekhovich عام (2009) بتعيين صيغة كوشي - بومبيو في نصف الحلقة [1].
- * قام B.Shupeyeva عام (2012) بتعيين صيغة كوشي - بومبيو في ربع الحلقة [2].
- * قام B.Shupeyeva عام (2016) بتعيين صيغة كوشي - بومبيو في النصف العلوي للمسدس ذو الرؤوس $\pm 2, \pm 1 + i\sqrt{3}$ [3].
- * قام H.Begehr عام (2018) بتعيين صيغة كوشي - بومبيو في المنطقة الناتجة من اقتطاع دائرة من دائرة أخرى تُمسها داخلاً وغير مشتركتين بالمركز [4].

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في أن مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في المنطقة $D \subset \mathbb{C}$ ، يُساعد في تعيين حل مسألة شوارتز الحدية الآتية [5]:

$$\begin{cases} w_{\bar{z}} = f & \text{in } D \\ \text{Re}(w) = \gamma & \text{on } \partial D \end{cases}$$

وذلك بالاستفادة من المساواة:

$$\partial_{\bar{z}} T f = f$$

ويهدف البحث إلى:

- تعيين صيغة كوشي - بومبيو التكاملية في ثمن قرص الواحدة من المستوي العقدي $\mathbb{D}_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$
- تعيين مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في هذه المنطقة $T_{\mathbb{D}_4}$.

طرائق البحث ومواده:

يشمل البحث مبرهنات وتعريف تربط بين نظرية المؤثرات و التحليل الدالي و التمثيل التكاملي ويستند بشكل أساسي على تعديل صيغة كوشي - بومبيو التكاملية المعرفة على منطقة نظامية كيفية D ، لتتوافق مع ثمن قرص الواحد في المستوي العقدي .

التعاريف الأساسية:

نذكر فيما يأتي مجموعة من التعاريف الأساسية وبعض الملاحظات التي تساعدنا في فهم المصطلحات العلمية الواردة في البحث :

تعريف (1) المنطقة النظامية [6]:

تُدعى المنطقة $D \subset \mathbb{C}$ ، منطقة نظامية إذا كانت مفتوحة ومحدودة و حدودها منحني أملس أو اجتماع منته لمنحنيات ملساء، وموجه بعكس عقارب الساعة.
نذكر أمثلةً للمناطق النظامية : الدائرة، الحلقة، نصف الحلقة، وربيعها، نصف الدائرة، وربيعها، المثلث، المستطيل، متوازي الأضلاع، ...

صيغة كوشي - بومبيو التكاملية [7]:

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ منطقة نظامية، ولتكن الدالة $w \in C^1(D; \mathbb{C}) \cap C(\bar{D}; \mathbb{C})$ ، عندئذٍ لكل $z \in D$ و $\zeta = \xi + i\eta$ تُمثل الدالة $w = w(z)$ بإحدى الصيغتين:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

ملحوظة:

عندما $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ ، تصبح صيغتنا كوشي - بومبيو السابقتان على النحو الآتي:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

ومنه، يمكننا كتابة صيغة كوشي - بومبيو التكاملية بشكل آخر [8]، على النحو الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} w(z) & ; z \in D \\ 0 & ; z \notin \bar{D} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\zeta}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \begin{cases} w(z) & ; z \in D \\ 0 & ; z \notin \bar{D} \end{cases}$$

تعريف (2) مؤثر كوشي - بومبيو [7]:

لتكن $D \subset \mathbb{C}$ منطقة نظامية، يُدعى المؤثر التكاملي

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad ; \quad \zeta = \xi + i\eta$$

بمؤثر كوشي - بومبيو في المنطقة D ، حيث $f \in L_1(D; \mathbb{C})$.

تعريف (3) مسألة شوارتس الحديثة [5]:

إن حل مسألة شوارتس الحديثة هو عملية إيجاد دالة w ، في المنطقة $D \subset \mathbb{C}$ ، تحقق المعادلة :

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}} w = f & \text{in } D \\ \operatorname{Re}(w) = \gamma & \text{on } \partial D \end{cases}$$

حيث $f \in L_1(D; \mathbb{C})$ ، $\gamma \in C(\partial D, \mathbb{C})$ هما دالتان مفروضتان.

ملحوظة: تُعدّل صيغة كوشي - بومبيو التكاملية من منطقة إلى أخرى، لتحقيق الشرط الحدّي لمسألة شوارتز.

النتائج والمناقشة:

يُعرّف ثمن قرص الوحدة بالشكل الآتي:

$$\mathbb{D}_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

ولنفرض:

$$\partial_1 \mathbb{D}_4 \text{ للقطعة المستقيمة } [0,1]$$

$$\partial_2 \mathbb{D}_4 \text{ للقوس } [1, e^{\frac{\pi}{4}i}]: \tau \rightarrow e^{ti} \text{ حيث } \tau \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\partial_3 \mathbb{D}_4 \text{ للقطعة المستقيمة } [e^{\frac{\pi}{4}i}, 0]$$

سنستخدم طريقة الانعكاس، لتعديل صيغة كوشي - بومبيو التكاملية، وتعريفها في المنطقة \mathbb{D}_4 .

نفرض $z, \zeta \in \mathbb{D}_4$ ، حيث $z \neq \zeta$ ، إنّ انعكاس z بالنسبة للقطعة المستقيمة $\partial_3 \mathbb{D}_4$ يعطي $i\bar{z}$ ، ومنه يكون انعكاس

z و $i\bar{z}$ بالنسبة لمحور الترتيب هما $-\bar{z}$ و iz على الترتيب،

وانعكاس النقاط: $z, i\bar{z}, -\bar{z}, iz$ بالنسبة لمحور الفواصل هي $-z, -i\bar{z}, -z, -i\bar{z}$ على الترتيب،

مع مراعاة كيفية z من \mathbb{D}_4 ، نحصل على ثماني مجموعات هي:

$$\mathbb{D}_{4,0} = \mathbb{D}_4$$

$$\mathbb{D}_{4,1} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\} = \{i\bar{z}; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,2} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} = \{iz; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,3} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\} = \{-\bar{z}; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,4} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\} = \{-z; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,5} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} = \{-i\bar{z}; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,6} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\} = \{-iz; z \in \mathbb{D}_4\}$$

$$\mathbb{D}_{4,7} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \frac{7\pi}{4} < \arg z < 2\pi \right\} = \{\bar{z}; z \in \mathbb{D}_4\}$$

من الواضح أنّ:

$$\bigcup_{k=0}^{k=7} \overline{\mathbb{D}_{4,k}} = \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$$

إنّ انعكاس النقاط الآتية:

$$z, i\bar{z}, iz, -\bar{z}, -z, -i\bar{z}, -iz, \bar{z}$$

بالنسبة لقوس دائرة الوحدة \mathbb{D} يعطي على الترتيب النقاط الآتية:

$$\frac{1}{z}, \frac{i}{z}, \frac{i}{z}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{z}, -\frac{i}{z}, -\frac{i}{z}, \frac{1}{z}$$

مع مراعاة كيفية z من \mathbb{D}_4 ، نحصل على ثماني مجموعات أخرى هي:

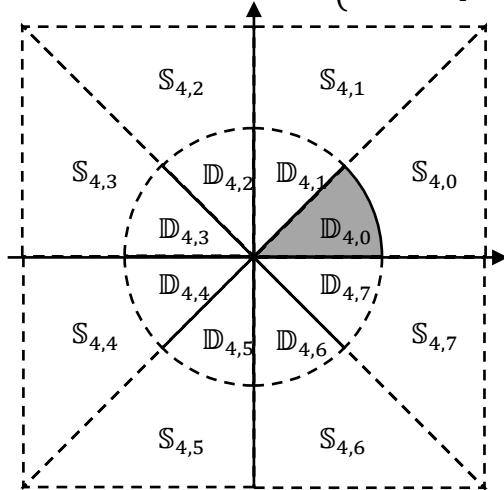
$$\begin{aligned} S_{4,0} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\} = \left\{ \frac{1}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,1} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ \frac{i}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,2} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} = \left\{ \frac{i}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,3} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi \right\} = \left\{ -\frac{1}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,4} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4} \right\} = \left\{ -\frac{1}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,5} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} = \left\{ -\frac{i}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,6} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\} = \left\{ -\frac{i}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \\ S_{4,7} &= \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1, \frac{7\pi}{4} < \arg z < 2\pi \right\} = \left\{ \frac{1}{z}; z \in \mathbb{D}_4 \right\} \end{aligned}$$

ونلاحظ أن:

$$\bigcup_{k=0}^{k=7} \overline{S_{4,k}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq 1\}, \quad \bigcup_{k=0}^{k=7} [\overline{S_{4,k}} \cup \overline{\mathbb{D}_{4,k}}] = \mathbb{C}$$

حيث:

$$\overline{S_{4,k}} \cup \overline{\mathbb{D}_{4,k}} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{k\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{(k+1)\pi}{4} \right\}; k = 0, 1, 2, \dots, 7$$



مبرهنة 1: كل دالة $w \in C^1(\mathbb{D}_4; \mathbb{C}) \cap C(\overline{\mathbb{D}_4}; \mathbb{C})$ تُمثل بالشكل الآتي:

$$w(z) = \frac{2}{\pi i} \int_{0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}} \left\{ \operatorname{Re}[w(\zeta)] \cdot \left[\frac{\zeta^4 + z^4}{\zeta^4 - z^4} + \frac{\zeta^4 z^4 + 1}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{4}{\pi} \int_{0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}} \operatorname{Im}[w(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{\pi i} \int_1^0 \operatorname{Re} \left[w \left(t. e^{\frac{\pi}{4}i} \right) \right] \cdot \left[\frac{t^3}{t^4 + z^4} + \frac{t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] dt \\
 & + \frac{4}{\pi i} \int_0^1 \operatorname{Re} [w(t)] \cdot \left[\frac{t^3}{t^4 - z^4} + \frac{t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] dt \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \cdot \left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4 - z^4} + \frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4 \bar{\zeta}^4 - 1} \right] \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

البرهان:

نطبق صيغة كوشي - بومبيو التكاملية على النقاط الآتية:

$$z, i\bar{z}, iz, -\bar{z}, -z, -i\bar{z}, -iz, \bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{i}{z}, \frac{i}{\bar{z}}, -\frac{1}{z}, -\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{i}{z}, -\frac{i}{\bar{z}}, \frac{1}{z}$$

مع ملاحظة أن جميع النقاط السابقة تقع خارج \mathbb{D}_4 ، باستثناء z ، فهي تنتمي إلى \mathbb{D}_4 ، نجد:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \dots (1.1)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - \bar{z}} \dots (1.2)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + z} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + z} \dots (1.3)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + \bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + \bar{z}} \dots (1.4)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - iz} - \frac{1}{\pi} \int_D w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - iz} \dots (1.5)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - i\bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - i\bar{z}} \dots (1.6)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + iz} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + iz} \dots (1.7)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + i\bar{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + i\bar{z}} \dots (1.8)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \frac{1}{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - \frac{1}{z}} \dots (1.9)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \frac{1}{\bar{z}}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - \frac{1}{\bar{z}}} \dots (1.10)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + \frac{1}{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + \frac{1}{z}} \dots (1.11)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + \frac{1}{\bar{z}}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + \frac{1}{\bar{z}}} \dots (1.12)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \frac{i}{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - \frac{i}{z}} \dots (1.13)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \frac{i}{\bar{z}}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - \frac{i}{\bar{z}}} \dots (1.14)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + \frac{i}{z}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + \frac{i}{z}} \dots (1.15)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta + \frac{i}{\bar{z}}} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta + \frac{i}{\bar{z}}} \dots (1.16)$$

بجمع (1.1) و (1.3) من جهة، و بجمع (1.2) و (1.4) من جهة أخرى نجد:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 - z^2} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 - z^2} d\xi d\eta \dots (1.1')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 - \bar{z}^2} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 - \bar{z}^2} d\xi d\eta \dots (1.2')$$

بجمع (1.5) و (1.7) من جهة، و بجمع (1.6) و (1.8) من جهة أخرى نجد:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 + z^2} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 + z^2} d\xi d\eta \dots (1.3')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 + \bar{z}^2} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta}{\zeta^2 + \bar{z}^2} d\xi d\eta \dots (1.4')$$

بجمع (1.9) و (1.11) من جهة، و بجمع (1.10) و (1.12) من جهة أخرى نجد:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta z^2}{z^2 \zeta^2 - 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta z^2}{z^2 \zeta^2 - 1} d\xi d\eta \dots (1.5')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2 \zeta^2 - 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2 \zeta^2 - 1} d\xi d\eta \dots (1.6')$$

بجمع (1.13) و (1.15) من جهة، و بجمع (1.14) و (1.16) من جهة أخرى نجد:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta z^2}{z^2 \zeta^2 + 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta z^2}{z^2 \zeta^2 + 1} d\xi d\eta \dots (1.7')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2 \zeta^2 + 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{2\zeta \bar{z}^2}{\bar{z}^2 \zeta^2 + 1} d\xi d\eta \dots (1.8')$$

بجمع (1.1') و (1.3') من جهة، و بجمع (1.2') و (1.4') من جهة أخرى نجد:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} d\xi d\eta \dots (1.1'')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - \bar{z}^4} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - \bar{z}^4} d\xi d\eta \dots (1.2'')$$

بجمع (1.5') و (1.7') من جهة، و بجمع (1.6') و (1.8') من جهة أخرى نجد:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} d\xi d\eta \dots (1.3'')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4 \zeta^4 - 1} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4 \zeta^4 - 1} d\xi d\eta \dots (1.4'')$$

بجمع (1.1'') و (1.3'') من جهة، و بجمع (1.2'') و (1.4'') من جهة أخرى نجد:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] d\zeta \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] d\xi d\eta \dots (1.1''')$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_4} w(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - \bar{z}^4} + \frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4 \zeta^4 - 1} \right] d\zeta \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - \bar{z}^4} + \frac{4\zeta^3 \bar{z}^4}{\bar{z}^4 \zeta^4 - 1} \right] d\xi d\eta \dots (1.2''')$$

يمكننا صياغة (1.1''') بالشكل الآتي:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}}} w(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] d\zeta \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 w(t \cdot e^{\frac{\pi i}{4} t}) \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 + z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] dt \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 w(t) \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 - z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] dt \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] d\xi d\eta \dots (*)$$

بأخذ مرافق طرفي (1.2''') وإعادة صياغة الناتج نحصل على:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}}} \overline{w(\zeta)} \cdot \left[\frac{4}{1 - \bar{\zeta}^4 z^4} + \frac{4z^4}{z^4 - \bar{\zeta}^4} \right] \frac{d\zeta}{\zeta} \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \overline{w(t \cdot e^{\frac{\pi i}{4} t})} \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 + z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] dt \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \overline{w(t)} \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 - z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] dt \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \cdot \left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4 - z^4} + \frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4 \bar{\zeta}^4 - 1} \right] d\xi d\eta \dots (**)$$

حيث:

$$|\zeta| = 1 \Rightarrow \zeta \cdot \bar{\zeta} = 1, d\bar{\zeta} = -\frac{d\zeta}{\bar{\zeta}^2}$$

$$\text{Im}(\zeta) = 0 \Rightarrow \zeta = \bar{\zeta} = t$$

ب طرح (***) من (*) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 w(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}}} \left\{ w(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^4}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^4 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] - \overline{w(\zeta)} \cdot \left[\frac{4}{1 - \zeta^4 z^4} + \frac{4z^4}{z^4 - \zeta^4} \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_1^0 \left\{ w\left(t \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 + z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] \right. \\
 & \left. + \overline{w\left(t \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right)} \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 + z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] \right\} dt \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left\{ w(t) \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 - z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] + \overline{w(t)} \cdot \left[\frac{4t^3}{t^4 - z^4} + \frac{4t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] \right\} dt \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] \right. \\
 & \left. - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \cdot \left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4 - z^4} + \frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4 \bar{\zeta}^4 - 1} \right] \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

نضع $w(\zeta) = \text{Re}[w(\zeta)] + i\text{Im}[w(\zeta)]$ في المساواة السابقة، فنجد:

$$\begin{aligned}
 w(z) = & \frac{2}{\pi i} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}}} \left\{ \text{Re}[w(\zeta)] \cdot \left[\frac{\zeta^4 + z^4}{\zeta^4 - z^4} + \frac{\zeta^4 z^4 + 1}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] \right\} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{4}{\pi} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}}} \text{Im}[w(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \\
 & + \frac{4}{\pi i} \int_1^0 \text{Re} \left[w\left(t \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) \right] \cdot \left[\frac{t^3}{t^4 + z^4} + \frac{t^3 z^4}{z^4 t^4 + 1} \right] dt \\
 & + \frac{4}{\pi i} \int_0^1 \text{Re}[w(t)] \cdot \left[\frac{t^3}{t^4 - z^4} + \frac{t^3 z^4}{z^4 t^4 - 1} \right] dt \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} \left\{ w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] \right. \\
 & \left. - \overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)} \cdot \left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4 - z^4} + \frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4 \bar{\zeta}^4 - 1} \right] \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

من المبرهنة السابقة، يمكننا تعيين مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي المعدل في المنطقة \mathbb{D}_4 ، بالشكل الآتي:

$$T_{\mathbb{D}_4} f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_4} \left\{ f(\zeta) \cdot \left[\frac{4\zeta^3}{\zeta^4 - z^4} + \frac{4\zeta^3 z^4}{z^4 \zeta^4 - 1} \right] - \overline{f(\zeta)} \cdot \left[\frac{4\bar{\zeta}^3}{\bar{\zeta}^4 - z^4} + \frac{4\bar{\zeta}^3 z^4}{z^4 \bar{\zeta}^4 - 1} \right] \right\} d\xi d\eta$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى:

- تعديل صيغة كوشي - بومبيو التكاملي لتتوافق مع ثمن قرص الوحدة.
- تعيين مؤثر كوشي - بومبيو التكاملي في ثمن قرص الوحدة \mathbb{D}_4 .

نوصي باستمرار البحث من خلال:

- ◀ دراسة بعض خصائص المؤثر الذي قمنا بتعيينه $T_{\mathbb{D}_4}$.
- ◀ تعيين صيغة كوشي - بومبيو التكاملي في مناطق جديدة.
- ◀ إيجاد مؤثر كوشي - بومبيو في مناطق جديدة غير قرص الوحدة ودراسة خصائصه.

References:

- [1] H.Begehr, T.Vaitekhovich, Harmonic boundary value problems in half disc and half ring, *Functiones et Approximatio*, 40.2,(2009), pp.251-282.
- [2] B. Shupeyeva, "Harmonic boundary value problems in a quarter ring domain", *Advances in Pure and Applied Mathematics*, vol.3, no. 4, pp. 393–419, (2012).
- [3] B.Shupeyeva, Dirichlet Problem for Complex Poisson Equation in a Half Hexagon Domain, *Journal of Complex Analysis*,(2016).
- [4] H. Begehr, S.Burgumbayeva, B.Shupeyeva, Harmonic Green Functions for a Plane Domain With two Touching Circles as Boundary, *Advanced Mathematical Models & Applications*, vol.3, no.1, pp. 18–29, (2018).
- [5] Y. Wang, Boundary value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains, Ph.D. thesis, FU Berlin, (2011), <http://www.diss.fuberlin.de/diss/receive.FUDISS-thesis-000000021359>.
- [6] B.Shupeyeva, Some Basic Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Quarter Ring and Half Hexagon, Ph.D. thesis, FU Berlin,(2013).
- [7] T.Vaitsiakhovich, Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in a ring domain, PhD thesis, FU Berlin, 2008; www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis-000000003859.
- [8] H.Begehr, , T.Vaitekhovich, Schwarz problem in lens and lune. *Complex Var. Ell. Eq.*, **59**(1), 76–84 (2014).