مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

الخطوة السريعة للتحكم الآلي في النظم

الدكتور محمود عثمان*

(قبل للنشر في 1997/5/11)

□ الملخّص □

في هذه المقالة درست النقاط التالية:

- اعطاء فكرة عن المفهوم العام للتحكم
- دراسة النموزج الرياضي:

$$X(t+1)=A\,X(t)+b\,U(t+1)$$

حيث
$$X(0)=X_0 \quad ,X(T)=X_T$$

X_0 نقطة البداية و X_T نقطة النهاية

ومع تحقق الشرط التالي: $\|U(t)\|\leq 1 \; ; t=1,2,3,........T$

الهدف من دراسة النظام هو ايجاد اقل عدد من الخطوات T نستطيع بواسطتها نقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T

- اعطاء فكرة عن مجموعة الوصول الى الهدف
- وضع خوارزمية تعتمد على طريقة هندسية لنقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T
- تحويل النموزج الرياضي الى مسائل البرمجة الخطية
- وضع خوارزمية تعتمد على طريقة حسابية يمكن برمجتها على الآلات الحاسبة لنقل النظام من الموقع X_0 وحتى الموقع X_T
- وضع مثال تطبيقي نبين فيه ايجاد عدد الخطوات لنقل النظام من نقطة البداية وحتى نقطة النهاية

*أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (20) العدد (7)1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Basic Science Series Vol (20) No (7) 1998

Fast auto control system

Dr.Mahmoud Othman*

(Accepted 11/5/1997)

□ ABSTRACT □

In this article, we study the following points :

1- He could give a general idea about control system .

2- Study of MATHS. system .

$$X(t+1) = A\,X(t) + b\,U(t+1)$$
$$X(0) = X_0\ ,\ X(T) = X_T$$

as X_0 is (start point), and X_T (finish point)

This procedure is according to the followig condition .

$$U(t) < 1 \quad ; t = 1,2,3 \ldots\ldots T$$

The purpose of the study of the system is to find out the minimum time necessary to move from X_0 to X_T .

3- To give an idea about the set operations necessary to get at the goal .

4- To find out an engineering Algorithm to let the system move from X_0 to X_T .

5- To transfer the MATHS. system to liner programming formula .

6- To find out Algureitem , following the MATHS. mode, using computors to move the system from X_0 to X_T .

7- To give practical example to show necessary steps for moving from start point to finish point .

*Assistant prof at mathematics department – faculty of sciences – tishreen university – lattakia- Syria.

2- تمهيد:

خلال القرن العشرين .هذا القرن المتميز بالحركة والطموحات قام علم التحكم الآلي بتحويل الكثير من الآمال والأحلام الى وقائع محسوسة ، **حيث يعتبر علم التحكم في النظم موضوعا ذو** اختصاصات متعددة ، فهو يدخل في مجال الكهرباء والميكانيك والطيران والكيمياء والذرة والادارة والهندسة الحيوية والطاقة البيئية وكثير من الحقول الاخرى ، **لهذا فان موضوع التحكم الآلي يأخذ دورا** هاما في مختلف الأختصاصات العلمية كما ان امكانية تطوره ونموه تبدو بدون نهاية.

3- تعريف نظم التحكم:

يمكن تعريف نظم التحكم بأنها عناصر تدفق الطاقة وان ترتيب عناصر التحكم هذه ومدى تعقيدهاومظهره يختلف مع الغاية منها او نوعية الدالة المستخدمة فيها. **وبشكل عام يمكن تقسيم نظم التحكم الى نوعين:**

أ- نظم ذات حلقة مفتوحة open - loop control system

ب - نظم ذات حلقة مغلقة closed - loop control system

فنظم التحكم ذات الحلقة المغلقة تقوم بتحويل الإخراج(OUTPUT) حتى مساواته بالإدخال (INPUT) أي حتى يصبح الخطأ المرتكب مساوياً للصفر وذلك بالأعتماد على التغذية الخلفية (feed back)

4- نظام التحكم في الأنسان:

يمكن ايجاد عدد من الصفات التي ترتبط بين نظم التحكم ذات **التغذية الخلفية وتصرف الأ نسان** فنظم التحكم ذات التغذية الخلفية المتلائمة قادرة على تغير ادائها للوصول الى اداء امثل تحت شروط مختلفة .وهي اليوم موقع دراسة واهتمام كبيرين ، ومثل هذه النظم **قريبة من القابلية المتكيفة للإنسان وبالطبع فأن جسم الانسان هو بحق نظام معقد جداً ونظام تحكم ذو تغذية خلفية متلائم الى حد بعيد.**

٥- تطبيقات نظام التحكم:

لقد دخلت نظم التحكم ذات التغذية الخلفية في كل جوانب الحياة اليومية ففي المنزل الثلاجة التي يستخدم فيها نظام التحكم بدرجة الحرارة وكذلك نظام التدفئة المركزية والفرن الكهربائي وكلها تعمل وفق مبدأ متشابه .

ويزداد اليوم استخدام مفاهيم التحكم الحديثة في العديد من المسائل ، ففي مجال النقل تستخدم نظم التحكم الآلي بالقطارات ، اما في مجال الطيران والفضاء فان نظم التحكم تستخدم بشكل كبير.وفي مجال الهندسة الحيوية فتستخدم من اجل تركيب وتعويض الاعضاء المفقودة في جسم الا نسان .

٦- كتابة المعادلات الرياضية:

ان دقة التحليل ومن ثم التصميم تعتمد على جودة التمثيل الرياضي لخواص عناصر النظام المختلفة وتعطى عادة جملة معادلات تفاضلية خطية مستمرة او غير مستمرة .وضمن هذه المقالة سوف نقوم بدراسة النظم الخطية المتقطعة(disecrete control system) وحيدة المدخل وذات امثال ثابتة.

٧- النموذج الرياضي:

لتكن جملة المعادلات التفاضلية الخطية التي تصف النظام :

$$X(t+1)=AX(t)+bU(t+1) \quad ;t=0,1,2,3,......T-1 \qquad (1)$$

مع وجود شرطي البداية والنهاية (2) $X(0)=X_0$ و $X(T)=X_T$

حيث $X(t) \in R^n$ هو شعاع المكان(الموقع) للنظام

$U(T)$ يمثل التوجيه المؤثر وهو عدد

$A \in R_n^n$ مصفوفة ذات امثال ثابتة.

$b \in R^n$ شعاع ذو n بعداً

مع تحقق الشرط التالي (3) $|U(t)| \leq 1$

الهدف من هذه المسألة :

ايجاد شعاع التوجيه : $U=\{ u(1),U(2),U(3),...........U(T)\}$

بحيث نستطيع نقل النظام من نقطة البداية X_0 وحتى الموقع X_T من اجل عدد محدود من الخطوات T----------> min مع تحقق الشرط (3)

8-حل المسألة اعتمادا على فكرة مجموعة الوصول الى الهدف :

يمكننا كتابة جملة المعادلات (١) مع تحقق الشرط (٢) على الشكل التالي:

$$X(1)=AX(0)+bU(1)=AX_0+bU(1)$$

$$X(2)=A[AX_0+bU(1)]+bU(2)=A^2X_0+AbU(1)+bU(2)$$

$$X(3)=A^3X0+A^2bU(1)+AbU(2)+bU(3)$$

.

.

.

$$X(T)=X_T=A^TX_0+A^{T-1}bU(1)+A^{T-2}bU(2)+...........+bU(T)$$

$$===>X_T-A^T X_0=\sum_{i=1}^{T} A^{T-I}\, b\, U(i)$$

$$\Longrightarrow C(T)=\sum_{i=1}^{T} r_i U(i) \qquad (4)$$

حيث $\quad r_i = A^{T-i}$ و $C(T)= X_T - A^T X0$

والمطلوب ايجاد $T \text{-------}> \min$ بحيث تكون الجملة (٤) قابلة للحل مع تحقق الشرط (٣)

تعريف: نسمي المجموعة:

$$R_T=\{ c \setminus c = \sum_{i=1}^{T} r_i U(i) \;\; ; |u(i)| \leq 1\}$$

مجموعة الوصول الى الهدف وبفرض T^* هي اقل عدد من الخطوات لحل المسألة يكون لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي حتى تكون المتراجحة $T \leq T^*$ محققة هو ان يكون $C(T^*) \in R_T$

لزوم الشرط:

بفرض $T^* \leq T$ يكون لدينا

$$C(T^*)=U(1)r_1+U(2)r_2+.............+U(T^*)\, r_{T^*}+0\, r_{T^*+1}+........+0\, r_T$$

$$\Longrightarrow C(T^*)=\sum_{i=1}^{T} r_i U(i) \;\; ; |U(i)| \leq 1$$

$$\Longrightarrow C(T^*) \in R_T$$

كفاية الشرط :

بفرض $C(T^*) \in R_T$ يكون لدينا

$$C(T^*)=\sum_{i=1}^{T} ri\, U(i) \;\; ; |U(i)| \leq 1$$

وبالتالي نحصل على التوجيه $U=\{U(1),U(2),U(3),.........U(T)\}$ الذي ينقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T أقل من T خطوة وفي أسوأ الحالات مساوياً ل T أي أن $T^* \leq T$ وهو المطلوب

- خواص المجموعة R_T

إن مجموعة الوصول الى الهدف R_T تملك الخواص التالية:

١- مجموعة محدبة

٢- محدودة ومغلقة

٣- متناظرة بالنسبة ل 0

٤- $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset R_4 \;......\subset R_T$

وقد برهن عن هذه الخواص في {[1],[2],[3],[4]} إن هذه الخواص تساعدنا على تكوين مجموعة الوصول والتفتيش فيمااذا كانت $C(T) \in R_T$ وبالتالي نستطيع وضع الخوارزمية التالية:

خوارزمية ١ لحل المسألة:

- خطوة(١) نعطي T=1
- خطوة (٢) نشكل C(T)
- خطوة(٣) نكون مجموعة الوصول R_T

- خطوة(٤) نتحقق إذا كان $C(T) \in R_T$ فاذاكانت محققة نذهب الى الخطوة (٦)
- خطوة (٥) نعطي T تزايد بمقدار ١ أي T=T+1 ثم نذهب الى الخطوة ٢
- خطوة (٦) $T^*=T$

وبالرغم من أهمية مجموعة الوصول الى الهدف ، لكن لايوجد الكثير عن هذه المجموعة ولقد تم وضع طريقة هندسية في[1] لتكوين هذه المجموعة ولكن لا يوجد لهذه الحالة تطبيقات علىالآلات الحاسبة في هذه المقالة تمكنت من ايجاد طريقة حسابية يمكن برمجتها،نسطيع بواسطتها من ايجاد T----->min

تعريف :

نسمي شعاع التوجيه $U=\{U^*(1),U^*(2),..........U^*(T^*)\}$ توجيه أمثل للنظام وذلك إذا تمكنا من نقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T من أجل أقل عدد من الخطوات T^*.

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون $U=\{u(1)\}$ توجيه امثل من أجل الخطوة الأولى أي T=1 هو ان تتحقق العلاقة $C(T) \in R_T$

لزوم الشرط:

بفرض $U=\{U(1)\}$ توجيه امثل للنظام أي أن $T^*=T=1$ وبالتالي يمكننا من نقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T من أجل T=1 وبالتالي يكون $C(T) \in RT$

كفاية الشرط :

بفرض $C(T) \in R_T$ من أجل T=1 وبالتالي فان $U^*=\{u^*(1)\}$ هو توجيه امثل للنظام ، حيث نتمكن من نقل النظام من الموضع X_0 وحتى الموضع X_T من اجل خطوة واحدة .

نتيجة ١: نقول ان الشعاع $U^*=\{U^*(1),U^*(2),........U^*(T^*)\}$ توجيه امثل للنظام اذا وفقط إذا تحقق الشرط $U(T^*) \in R_T$

يمكن برهان هذه النتيجة بالاعتماد على المبرهنة السابقة عن طريق التدرج .

٩-تحويل المسألة إلى مسائل البرمجة الخطية:

بفرض : $U=\{u(1),U(2),...........U(T)\}$

$D(T)=[A^{T-1}b,A^{T-2}b,........,Ab,b]$

تكتب المسألة 3-1 على النحو التالي:

$$D(T)\,U=C(T) \qquad (5)$$

$$\left|U(t)\right| \leq 1 \quad ;t=1,2,....T \qquad (6)$$

والمطلوب ايجاد شعاع التوجيه $U=\{U(1),U(2),........U(T)\}$ الذي يحقق جملة المعادلات (٥) مع تحقق الشرط (٦) .

مبرهنة :

يكون $U=\{U(1)\}$ توجيه امثل للنظام من اجل T=1 إذا تحقق الشرط التالي:

$C_i(1)/b_i=k$ حيث k عدد ثابت و $|k| \leq 1$

C_i و b_i هما مركبات الشعاعين $C(T)$ و b على التوالي.

البرهان:

من أجل T=1 فيكون لدينا $D(1)=bU(1)=C(1)$

وبالتالي فان $U(1)=C_i(1)/b_i$ فاذا كان $C_i(1)/b_i=k$ حيث k عدد ثابت و $|k| \leq 1$ وذلك من اجل $i=1,2,.....n$ فأن المسألة 5-6 تكون قابلة للحل ويكون $U=\{u(1)\}$ توجيه امثل

۹-۱ ايجاد بسيطة مكافئة للمسألة المطروحة:

ندخل شعاعين :

$V=\{V(1),V(2),.........V(T)\}$ و $W=\{W(1),W(2),.........W(T)\}$ بحيث يكون

$$U(t)=V(t)-W(t) \quad ;t=1,2,3,.......T \qquad (٧)$$

$$|U(t)|= V(t)+W(t) \quad ; t=1,2,3,........T \qquad (8)$$

$$0 \leq U(t) \leq 1 \qquad , 0 \leq W(t) \leq 1;t=1,2,....T \qquad (9)$$

نلاحظ ان الشرط (٨) يكون محققا فقط عندما يكون V(t) أو W(t) مساويا للصفر انظر [6] وبالتالي يمكن كتابة المسألة (6-5) على النحو التالي:

$$D(T)(V-W)=C(T)$$

$$V(t)+W(t) \leq 1 \quad ; t=1,2,3,........T$$

أو على النحو التالي:

$$R(T)\begin{pmatrix} V \\ \\ W \end{pmatrix} = C(T) \qquad (10)$$

حيث $R(T)= D(T),- D(T)$

$$V(t)+U(t) \leq 1 \quad ; t=1,2,........T \qquad (11)$$

يمكن البرهان ان المسألة (10-11) مكافئة للمسألة التالية:

$$R(T)\begin{pmatrix} V \\ \\ W \end{pmatrix} = C(T) \qquad (12)$$

$$0 \leq V(t) \leq 1 \quad , 0 \leq W(t) \leq 1 \;;t=1,2,.........T \qquad (13)$$

البرهان:

نقول عن مسألتين انهما متكافئتان إذا كان اي حل للمسألة الأولى هو حل للثانية والعكس صحيح بفرض $\{V,W\}$ حلا للمسألة الأولى فإذا لم يكن حلاً للمسألة الثانية فأن $U(t)>1$ او $V(t)>1$ وهذا يناقض الشرط (11) وبالتالي فهو حلاً للمسألة الثانية وبسهولة يمكن البرهان ان أي حل للمسألة الثانية هو حل للمسألة الأولى

خوارزمية (٢) لايجاد التوجيه الأمثل:

نلاحظ ان المسألة (12-13) يمكن جعلها من مسائل البرمجة الخطية وذلك بأضافة دالة الهدف ، وبما ان جملة المعادلات ١٢ كلها مساواة لذلك يمكننا ان تضيف مجاهيل اصطناعية y1 للمعادلة الاولى و y2 للمعادلة الثانية و.....yn للمعادلة الأخيرة وبفرض $y=(y1,y2,.....yn)'$ تكتب المسألة السابقة على النحو التالي:

$$\begin{pmatrix} R(T) & En \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \\ y \end{pmatrix} = C(T) \qquad (13)$$

$$0 \leqslant V(t) \leqslant 1 \;, 0 \leqslant W(t) \leqslant 1 \;;\; t=1,2,....T \qquad (14)$$

وتصبح دالة الهدف :

$$Z=y1+y2+y3+.............Yn \text{ ----------> } \min \qquad (15)$$

وبالتالي نستطيع وضع الخوارزمية التالية:

خطوة (١) نتحقق فيما إذا كان ثابت $C_i(1)/b_i = k=$ حيث $|k| \leqslant 1$ و $i=1,2,...n$ فاذا كان الشرط محقق يكون $U(1)$ هو الحل الأمثل من اجل الخطوة $T=1$ ثم نذهب الى الخطوة (٧)

خطوة (٢) نعطي $T=2$

خطوة (٣) نوجد $R(T)$ و $C(T)$

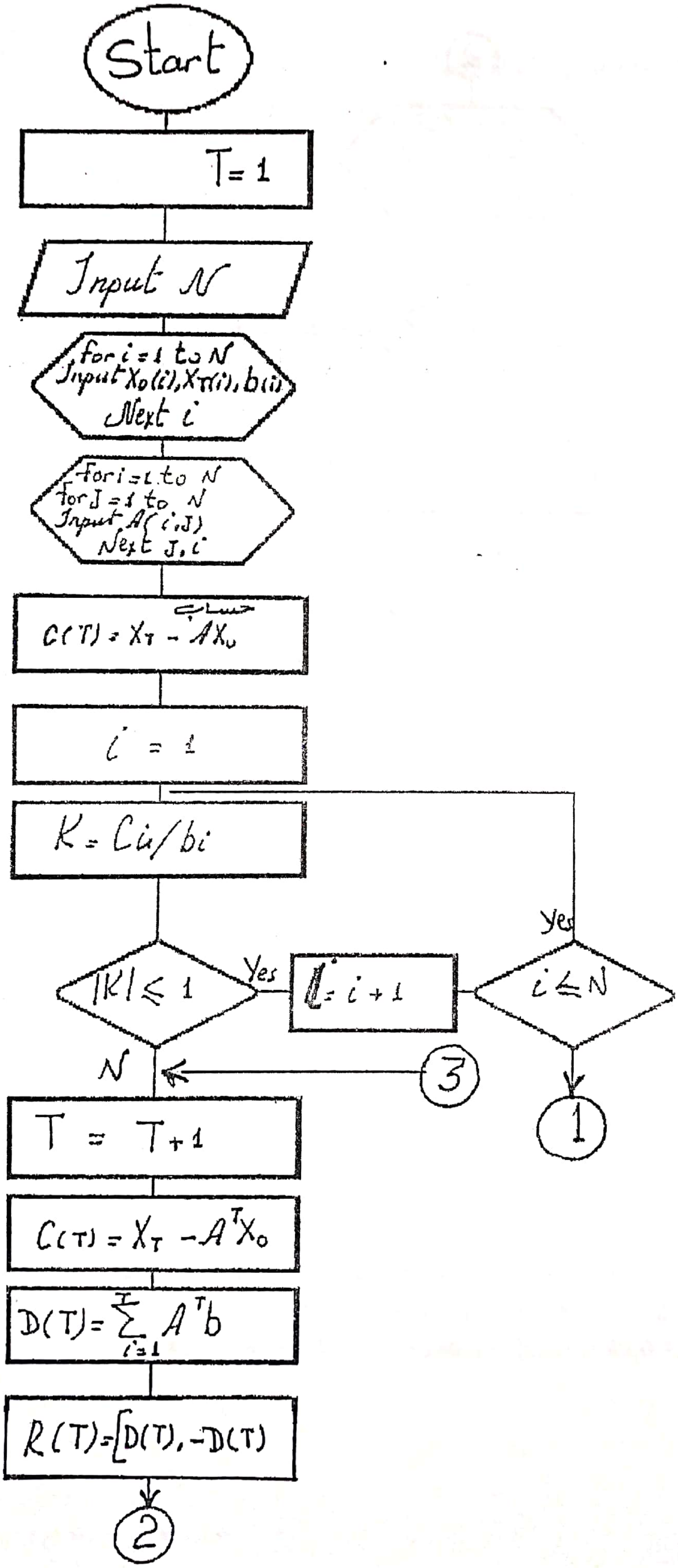
خطوة (٤) نكون خوارزمية سيمبلكس للمسألة(13-15)

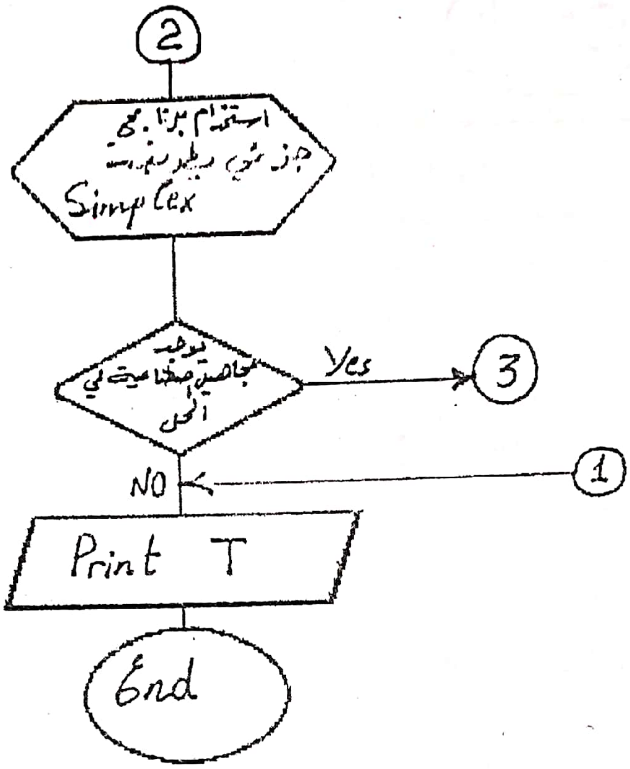
خطوة (٥) ندخل حل اولي مؤلف من المجاهيل الاصطناعيةفاذا تمكنا من اخراج جميع المجاهيل الاصطناعية من الحل تكون T هي اقل عدد الخطوات ثم نذهب الى الخطوة ٧

خطوة (٦) نعطي T تزايد بمقدار واحد اي $T=T+1$ ثم نذهب الى الخطوة (٣)

خطوة (٧) النهاية

ويمكننا تمثيل هذه الخوارزمية بالمخطط النهجي التالي:


Start
T= 1
Input N
for i = 1 to N
Input X0(i), XT(i), b(i)
Next i
For i = 1 to N
for J = 1 to N
Input A(i,J)
Next J, i
حساب
C(T) = XT - AX0
i = 1
K = Ci/bi
|K| ≤ 1
Yes
i = i + 1
i ≤ N
Yes
N
3
1
T = T+1
C(T) = XT - A^T X0
D(T) = Σ A^T b
i=1
R(T) = [D(T), -D(T)
2


2
استخدام برنامج
جزئي بطريقة
Simplex
يوجد
محاصيل صناعية في
الحل
Yes
3
NO
1
Print T
End

١٠ -مثال:

ليكن النظام معطى بالجملة التالية:

$$X(t+1)=A\,X(t)+bU(t+1)$$

$$X_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad X_T=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

حيث $|U(t)|\leq 1$

المطلوب ايجاد T^* اقل عدد من الخطوات والتي نستطيع بواسطتها لنقل النظام من الموقع X_0 وحتى الموقع X_T

الحل :

خطوة (١) من اجل $T=1$ يكون لدينا $C(1)=(4,4)$ و $b=(0,1)$ وبالتالي الخطوة الأولى في الخوارزمية غير محققة

خطوة (٢) نعطي $T=2$

خطوة (٣) نكون

$$C(2)=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad R(2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

خطوة (٤) نكون خوارزمية سيمبلكس:

	V(1)	V(2)	W(1)	W(2)	y1	y2	b
y1	1	0	-1	0	1	0	4
y2	1	1	-1	-1	1	1	4
	-2	-1	2	1	0	0	-٨

وبتطبيق طريقة سيمبلكس الموجودة في [5] يكون لدينا

a=h1=2

b=min {6/1,5/1}=5

نختار في هذه الحالة الخطوة a فيبقى المتغير Y1 في الحل لذلك نقول ان $T=2$ لاتصلح لنقل النظام من الموقع X_0 وحتى الموقع X_T

خطوة (٥) نعطي T تزايداً بمقدار واحد فتصبح $T=3$ ثم نعود الى الخطوة (٣) ونوجد من جديد R(3) و C(3) وبعد الاستمرار في الحل نجد انه من اجل $T^*=11$ فأن الحل يكون خالي من المجاهيل الاصطناعية وبالتالي فأن T^* تكون اقل عدد من الخطوات .

من اجل T=11انظر [7] فيكون شعاع التوجيه :

U={ -0.33,0,0,0,0,0,0.33,1,1,1,1} وتكون المسارات الموافقة له:

X_1={0,0,-0.33,-0.66,-1,-1.33,-1.66,-2,-2,-1,1,4}

X2={0,-0.33,-0.33,-0.33,-0.33,-0.33,-0.33,0,1,2,3,4}

المراجع:

....

1-DESOER C.,WING J. - Minimal time control of discrete system with a nonnlinear plant,IEEE Transactions onn automatic control, AC 18,1,1963.

2-DESOER C . ,WING J .- The minimal time regulator proplem for linear sempled date systeme . General Theory, Journal of Franklin Institute,272,3,1961.

3-DESOER C . ,WING J. An optimal strategy for saturting sampled date system, IRE transactionns on automtic control ,AC 6 , 1,1961.

4-LIN J. - Detrmination of reachabble set for a linear discrete system, IEEE Transactionns on automatic control ,AC 15,13,1970

5- DAVID G. LUENBERGER - Introduction to linear and nonlinear programming copyight -1973 by Addison-Wesley Publishing Company ,Inc

6- Canon ,M.D.cullum,C.D.Jr,and Polak ,E.1970 Theory of optimal control6and Mathematical programming (New york:MeGraw-Hill)

7- محمود عثمان – طريقة لتحديد التحكم الأمثل للفقات الوقود في الجمل الخطية المتقطعة.
مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية لعام 1994