مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (21) العدد (8) 1999
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Basic Science Series Vol. (21) No (8) 1999

التقارب فوق البيان وتقارب ε - الحلول المثلى

الدكتور محمد سويقات*
الدكتور حسن بدور**
كوثر نزيهة***

(ورد إلى المجلة في 1998/8/29، قبل للنشر في 1999/3/1)

□ الملخّص □

في هذه النشرة، نبرهن أن متتالية من الدوال (f_n) في فضاء توبولوجي X تتقارب وفق مفهوم فوق البيان نحو f إذا وفقط إذا كانت متتالية المقاطع $(M_{\alpha_n}^{f_n})$ تتقارب وفق مفهوم كوراتوفسكي نحو المقطع M_α^f من أجل كل متتالية α_n متقاربة نحو α في R، وبالأسلوب نفسه نناقش الحالة التي تكون فيها متتالية الدوال (f_n) محدبة ، ثم نعتمد هذه النتائج في برهان أن مجموعة الحلول $(\varepsilon - \arg\min f_n)$ تتقارب وفق كوراتوفسكي نحو مجموعة الحلول $(\varepsilon - \arg\min f)$ إذا وفقط إذا كانت المتتالية (f_n) متقاربة وفق مفهوم فوق البيان نحو f ؛ نحصل على نتائج أخرى تتعلق بـ ε–التفاضلات الجزئية و ε–مساقط نقطة من الفضاء X على مجموعة فيه .

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
*** طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (21) العدد (8) 1999
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research –Basic Science Series Vol. (21) No (8) 1999

Epi –convesgence et convergence des ε- solutions d'optimization .

Dr. Mohamed SOUEYCATT*
Dr.Hasan BADDOUR**
Kouther NAZEEHA***

(Reçu le 29/8/1998, Accepté le 1/3/1999)

❐ RÉSUMÉ ❐

Dans cet article , nous démontrons qu'une suite de fonctions (f_n) *dans un espace topologique* X *, converge vers* f *au sens de l'epi-graphe si et seulement si la suite de tranches* $\left(M_{\alpha_n}^{f_n}\right)$ *converge vers* $\mathrm{M}_\alpha^{\mathrm{f}}$ *au sens de Kuratowski , pour toute* $\alpha_n \xrightarrow{n} \alpha$ *dans R. Puis nous étudions le cas convexe de la même façon . Nous appliquons ces resultats pour montrer que l'ensemble des solutions* $(\varepsilon - \arg\min f_n)$ *converge vers* $(\varepsilon - \arg\min \mathrm{f})$ *au sens de kuratowski si, et seulement si la suite* (f_n) *converge vers* f *au sens de l'epi-graphe . Nous obtenons des resultats analogues dans les espaces de Banach réflexifs par rapport à la notion de Mosco – épi graphique . ainsi que des resultats concernant les* ε*-sous differentiels et les* ε*-projections d'un point de* X *sur un sous –ensemble de* X*.*

* Enseignant, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tichrine, Lattaquié, Syrie.
** Professeur, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tichrine, Lattaquié, Syrie.
*** Etudiante de Magistère, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tichrine, Lattaquié, Syrie.

مقدّمة :

أدى التحليل البياني في السنوات الأخيرة دوراً هاماً في دراسة الحلول المثلى للمسائل ، وكان مفهوم التقارب فوق البيان ، الذي هو أحد عناصر هذا التحليل ، من أكثر المفاهيم اعتماداً في دراسة تقارب متتالية من الدوال ، سواء كانت من الناحية النظرية أو التطبيقية ، وذلك في مجالات متعددة .

لتكن : $\{ f_n \ ; f: X \to \overline{R} \ , \ n \in N \}$ متتالية من الدوال ، حيث X فضاء تبولوجي ، ولنعتبر المسألة التالية :

$$(P) := \inf_{x \in X} f(x)$$

من المعروف أنه في الحالة العامة لا يوجد حلول للمسألة (p) ؛ أي أن مجموعة الحلول يمكن أن تساوي المجموعة الخالية ، لذلك كان من المفيد الاهتمام بالحلول التقريبية أكثر من الحلول الدقيقة ، والتي تشكل دائماً مجموعة غير خالية .

لنفرض أن المسألة (p) تأخذ الشكل التالي :

$$(P_n) := \inf_{x \in X} f_n(x)$$

والسؤال المطروح هو : إذا كانت المسألة (p_n) تتقارب نحو (p) ، أو f_n تتقارب نحو f وفق مفهوم ما للتقارب ، فهل مجموعة الحلول إذا وجدت (الحلول المقربة إلى ε) للمسألة (p_n) تتقارب نحو مجموعة الحلول إذا وجدت (الحلول المقربة إلى ε) للمسألة (p) ؟

في عملنا هذا سيتم الجواب على هذا السؤال وأسئلة أخرى تتعلق بالحلول المقربة إلى $\varepsilon > 0$ ، لدوال محدبة أو غير محدبة .

في الفقرة الأولى نعطي بعض التعاريف والمصطلحات التي نحتاجها في دراستنا .

أما في الفقرة الثانية ، فسندرس العلاقة بين تقارب متتالية من الدوال وفق مفهوم فوق البيان ، وتقارب مقاطعها الموافقة وفق مفهوم كوراتوفسكي ، حيث كانت أولى الدراسات في هذا المجال للرياضي (Wijsman , 1964) في فضاءات منتهية البعد ، ثم درست من قبل (Mosco , 1971) في فضاءات باناخ الانعكاسية ، وكذلك من قبل (Wets, 1983) (Volle , 1986) و (Soueycatt , 1987) في فضاءات منتهية البعد ودوال متراصة . أما في عملنا ، فسندرس المسألة في فضاءات تبولوجية أعم وفي الحالة غير المحدبة ، ثم نطبقها في دراسة تقارب الحلول (ε ــ الحلول) للمسائل المطروحة .

في الفقرة الثالثة نعالج الحالة المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى وفق مفهوم موسكو للتقارب ، ونحصل على نتائج عديدة في دراسة تقارب ε ــ الحلول المثلى لبعض المسائل .

I. تعاريف ومصطلحات :

ليكن X فضاءً تبولوجياً ، و A مجموعة جزئية من X ، و M أسرة جزئية من مجاورات المجموعة A . نسمي الأسرة M قاعدة لجملة مجاورات المجموعة A ، إذا كان من أجل أي مجاورة W للمجموعة A يوجد عنصر V من M ، بحيث يكون $A \subseteq V \subseteq W$. وإذا كانت $A = \{x\}$ فإننا نحصل على قاعدة لجملة مجاورات النقطة x .

– نقول إن الفضاء التبولوجي (X, τ) يتمتع بقابلية العد من المرتبة الأولى ، إذا كانت كل نقطة x من X تملك قاعدة لجملة مجاوراتها على الأكثر قابلة للعد .

– سنعتبر (X, τ) فضاءً تبولوجياً يتمتع بقابلية العد من المرتبة الأولى ، و f دالة معرفة على X ، وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

نسمي فوق البيان (epi-graphe) للدالة f ، ونرمز له بـــ $epi\, f$ المجموعة:

$$epi\, f := \{ (x , r) \in X \times R / f(x) \leq r \}$$

– نقول: إن الدالة f محدبة (نصف مستمرة من الأدنى) إذا كانت المجموعة $epi f$ محدبة(مغلقة).

– نقول عن الداله f : إنها خاصة إذا كانت :

$$dom\, f := \{x \in X / f(x) < +\infty\} : \text{حيث } dom\, f \neq \phi$$

– من أجل $\alpha \in R$ نعرف مقطع الدالة f ذا الارتفاع α ، ونرمز له بـــ M_α^f بالعلاقة :

$$M_\alpha^f := \{ x \in X / f(x) \leq \alpha \}$$

– نرمز بـــ $\Gamma(x)$ لمجموعة الدوال المحدبة ، نصف المستمرة من الأدنى والخاصة على X.

– من أجل كل $f \in \Gamma(x)$ نعرف مرافقه $f^* \in \Gamma(x^*)$ (X^* الفضاء الثنوي لـــ X) بالعلاقة:

$$f^*(x^*) := \sup \{ <x , x^*> - f(x) \, ; x \in X \}$$

حيث $<.,.>$ يدل على شكل ثنائي الخطية للفضاءين X , X^* المتوضعين ثنوياً .

– نرمز بـــ $V(f)$ للعدد : $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ وبـــ $V(f_n)$ للعدد : $\inf\limits_{x \in X} f_n(x)$.

– نرمز بـــ $argmin\, f$ لمجموعة حلول المسألة (p): $argmin\, f := \{ x \in X / f(x) = V(f) \}$.

– من أجل كل $\varepsilon > 0$ نرمز بـــ $(\varepsilon\text{-}argmin\, f)$ لمجموعة الحلول المقربة إلى ε للمسألة (p):

$$\varepsilon\text{-}argmin\, f := \{ x \in X ; f(x) \leq \max \{ V(f) + \varepsilon , -1/\varepsilon \} \}$$

– من أجل $\varepsilon > 0$ نسمي ε ــ تحت ــ التفاضل (ε - sous – différentiel) للدالة f في نقطة $x_0 \in domf$ ، ونرمز له بـــ $\partial_\varepsilon f(x_0)$ كما في (Hiriart-Urruty,1982) المجموعة :

$$\partial_\varepsilon f(x_0) = \{ x^* \in X^* / f(x) \geq f(x_0) + < x - x_0 , x^* > - \varepsilon : \forall x \in X \}$$
$$= \{ x^* \in X^* / f(x_0) + f^*(x^*) - < x_0 , x^* > \leq \varepsilon \}$$

نلاحظ انه من أجل $\varepsilon = 0$ نحصل على تحت ــ التفاضل لـــ f في النقطة x_0 ،ويكون :

$$\partial f(x_0) = \{ x^* \in X^* / f(x) \geq f(x_0) + < x - x_0 , x^* >: \forall x \in X \}$$

راجع (Hiriart-Urruty, 1982)

- (التقارب فوق البيان , epi-convergence): لتكن $\{f_n , f ; X \to R , n \in N\}$ متتالية من الدوال في (X , τ) ، وتأخذ قيمها في $\overline{R}$. نقول : إن (f_n) تتقارب وفق τ ـ فوق البيان نحو f إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$\text{i)}\ \forall x \in X, \forall (x_n)_{n\in N} \in X, x_n \underset{n}{\overset{\tau}{\rightarrow}} x / \liminf_n f_n(x_n) \geq f(x)$$

$$\text{ii)}\ \forall x \in X, \exists (\zeta_n)_{n\in N} \in X, \zeta_n \underset{n}{\overset{\tau}{\rightarrow}} x / \limsup_n f_n(\zeta_n) \leq f(x) .$$

ونكتب اختصاراً : $f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n$ أو $f = \tau\text{-}epi\text{-}\lim_n f_n$

ينسب هذا التعريف إلى الرياضيين (De.Giorgi, 1979) و (Attouch , 1984).

- (تقارب كوارتوفسكي Kouratofiskey-convergence , [Attouch , 1984]):

لتكن $\{A_n , A ; n \in N\}$ متتالية من المجموعات في X . نقول : إن (A_n) تتقارب نحـــو A وفق مفهوم كوراتوفسكي إذا كان : $\tau\text{-}\limsup_n A_n \subseteq A \subseteq \tau\text{-}\liminf_n A_n$

حيث: $\tau\text{-}\limsup_n A_n := \{x \in X; \exists (n_k)_{k\in N}, \exists (x_k)_{k\in N}, \forall k \in N, x_k \in A_{n_k}$ و $x_k \underset{k}{\overset{\tau}{\rightarrow}} x\}$

$$\tau\text{-}\liminf_n A_n := \{x \in X; \exists (x_n)_{n\in N} / x_n \in A_n \forall n \in N, x_n \underset{n}{\overset{\tau}{\rightarrow}} x\}$$

ونكتب اختصاراً : $A = \tau\text{-}\lim_n A_n$.

في ضوء التعريفين السابقين ، أعطى الرياضي أتوش في النظريـــة (39 . 1) , [Attouch 1984] الشكل الهندسي لمفهوم التقارب فوق البيان ، والتي تنص : الشرط اللازم والكافي حتـــى تكون $(f_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو f وفق مفهوم التقارب فوق البيان في الفضاء X ، هو أن تكون المتتالية $(epi\, f_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو $epi\, f$ وفق مفهوم كوراتوفسكي فـــي الفضـــاء $X \times R$.

(تقارب موسكو فوق البيان Mosco-epi-convergence , [Mosco, 1971]) بفـــرض X فضاء باناخ انعكاسي، ولتكن $\{f_n , f : X \to \overline{R} ; n \in N\}$ متتالية من الدوال من $\Gamma(x)$. نقـــول: إن (f_n) تتقارب وفق مفهوم موسكو فوق البيان نحو f إذا تحقق الشرطان :

$$i)\ \forall x \in X, \forall (x_n) \in X, x_n \underset{n}{\overset{w}{\rightarrow}} x / f(x) \leq \liminf_n f_n(x_n).$$

$$ii)\ \forall x \in X / \exists \zeta_n \underset{n}{\overset{s}{\rightarrow}} x, \limsup_n f_n(\zeta_n) \leq f(x).$$

حيث $s(w)$ تشير إلى التبولوجيا القوية (الضعيفة) في X . ونكتب اختصاراً:

$f_n \xrightarrow{M} f$ أو $f = M - \lim_{n\ e} f_n$.

- لتكن $\{A_n , A ; n \in N\}$ متتالية من المجموعات في X . نقول : إن (A_n) تتقارب وفـــق موسكو نحو A إذا تحقق الشرط التالي: $S - \limsup_n A_n \subseteq A \subseteq w - \liminf_n A_n$

ونكتب اختصاراً : $A_n \xrightarrow{M} A$ أو $A = M - \lim A_n$.

- نقول:إن (f_n) تكون $equi\text{-}s.c.i$ في x من X^n إذا وفقط إذا تحقق الشرط:أيـــاً كـــان $\varepsilon > 0$ يوجد جوار U لــــ x ،بحيث يكون من أجل كل $n \in N$، فإن : $\inf_{y\in U} f_n(y) \geq f_n(x) - \varepsilon$.

(II) دراسة العلاقة بين التقارب فوق البيان وتقارب المقاطع :

سندرس في هذه الفقرة تقارب متتالية من دوال غير محدبة بالضرورة وفق مفهوم فوق البيـــان ، بدلالة تقارب مقاطعها وفق مفهوم كوراتوفسكي،ثم نناقش حالة التحدب،ونطبق هذه الدراسة علـى استقرارية ε ــ الحلول للمسائل المثلى. لنذكر بالمبرهنة التالية لــــــ (Soueycatt , 1987) ، والتي تعطي وصفا للتقارب فوق البيان بدلالة تقارب المقاطع .

مبرهنه 2.1 ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً مَتوراً (métrisable) ، ولتكن $\{f_n , f : X \to \overline{R} ; n \in N\}$ متتالية من الدوال عندئذٍ :

1) إذا كان $V(f) = \lim_n V(f_n)$ ، فإن $(a) \Leftarrow (b)$ ، حيث :

$$(a)\ \mathrm{M}_\alpha^f = \tau\text{-}\lim_n \mathrm{M}_\alpha^{f_n} ;\ \forall \alpha \rangle V(f).$$

$$(b)\ f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n.$$

2) إذا كان $\mathrm{M}_\alpha^f = \overline{\{x \in \mathrm{X}; f(x)\langle \alpha\}}$ ، فإن $(c) \Leftarrow (d)$ ، حيث :

$$(c)\ f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n.$$

$$(d)\ \mathrm{M}_\alpha^f = \tau\text{-}\lim_n \mathrm{M}_\alpha^{f_n} ;\ \forall \alpha \rangle V(f).$$

فيما يلي نقدم تعميماً للمبرهنة السابقة ، معتمدين على مفــــهوم تقــــارب كوراتوفكســـي لمتتاليـــة مجموعات فوق البيان للمتتالية (f_n) :

مبرهنة 2.2 : ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً يتمتع بقابلية العد من المرتبة الأولى ، ولتكن $\{f_n , f : X \to \overline{R} ; n \in N\}$ متتالية من الدوال ، بحيث يكون :

$$\mathrm{M}_\alpha^f = \overline{\{x \in \mathrm{X}; f(x)\langle \alpha\}}$$

عندئذٍ ، الشرطان التاليان متكافئان :

$$(i)\ \mathrm{M}_\alpha^f = \tau\text{-}\lim_n \mathrm{M}_\alpha^{f_n} ;\ \forall \alpha \rangle V(f).$$

$$(ii)\ f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n.$$

البرهان : إن $(ii) \Leftarrow (i)$ ينتج مباشرة من المبرهنة 2.1 الاقتضاء $(c) \Leftarrow (d)$ ؛ لذلك علينا برهان الاقتضاء $(i) \Leftarrow (ii)$ ؛ أي يجب أن نبرهن أن :

$$\tau - \lim_n \sup epif_n \subseteq epif \subseteq \tau - \lim_n \inf epif_n$$

ليكن $(x,\beta) \in \lim_n \sup epif_n$ ،ولنفرض جدلاً أن $(x , \beta) \not\in epif$ أي أن $f(x) > \beta$ إذاً حسب تعريف $\lim_n \sup epif_n$ توجد متتالية $(n_k)_{k\in N}$ من N ،وتوجد (x_k,β_k) من $X\times R$ ، بحيث يكــون : $f_{n_k}(x_k) \le \beta_k$ و $(x_k,\beta_k) \underset{k}{\overset{X\times R}{\to}} (x,\beta)$.لنختر α بحيث تكون $\alpha \in]sup\{\beta, V(f)\}, f(x)[$ عندئــذٍ: $V(f) < \alpha$. ومن أجل k كبير بما فيه الكفاية يكون $\beta_k \le \alpha$ ، وبالتالي يكون : $x_k \in \mathrm{M}_\alpha^{f_{n_k}} ; \forall k \ge k_0$ و $x_k \xrightarrow[k]{\tau} x$. إن الشرط $M_\alpha^{f_n} \xrightarrow[n]{} M_\alpha^f$ يعطي $x \in M_\alpha^f$ ؛ أي أن $f(x) \le \alpha$ ، وهذا يناقض $f(x) > \alpha$ إذاً $(x,\beta) \in epif$ ، وهو المطلوب .

بفرض $(x,\beta)\in epif$ ، ولنبرهن أن $(x,\beta)\in \liminf_n epif_n$ بما أن $f(x)\le\beta$ ، فإن $V(f)\le\beta$ ، وهنا نميز حالتين $V(f)=\beta$ ، $V(f)<\beta$

1. $V(f)<\beta$ لدينا $f(x)\le\beta$ ، وبالتالي $x\in M_\beta^f$ ، إن تقارب المتتالية $(M_\beta^{f_n})$ نحو M_β^f من أجل $V(f)<\beta$ يؤدي إلى وجود متتالية $(x_n)_{n\in N}$ من $(M_\beta^{f_n})$ ، حيث يكـــون $f_n(x_n)\le\beta$ و $x_n \xrightarrow[n]{\tau} x$ ؛ أي أن : $(x_n,\beta)\in epif_n$ و $(x_n,\beta)\xrightarrow[n]{X\times R}(x,\beta)$ ، إذاً $(x,\beta)\in\liminf_n epif_n$

2. $\beta=V(f)$ عندئذ من أجل $\varepsilon_m>0$ و $\varepsilon_m \xrightarrow[m]{} 0$ يكون $V(f)<\beta+\varepsilon_m$ بفرض $\beta_m=\beta+\varepsilon_m$. عندئذٍ $\beta_m\xrightarrow[m]{}\beta$ و $V(f)<\beta_m$. بما أن $(x,\beta)\in epif$ فإن $(x,\beta_m)\in epif$ ، وبالتالي من أجل m ثابتة يكون $x\in M_{\beta_m}^f$ ، وحسب الفرض توجد متتالية $(x_{n,m})_{n\in N}$ من $M_{\beta_m}^{f_n}$ ، بحيث يكون $f_n(x_{n,m})\le\beta_m$ و $x_{n,m}\xrightarrow[n]{\tau}(x_m=x)\xrightarrow[n]{\tau}x$. وبتطبيق المبرهنة 1.18 في (Attouch , 1984) على المتتالية $(x_{n,m})_{n,m\in N}$ ، والتي تنص [إذا كانت المتتالية $(x_{\nu,\mu})_{\nu,\mu\in N}$ في X بحيث يكون $x_{\nu,\mu}\xrightarrow[\nu]{\tau}x_\mu\xrightarrow[\mu]{\tau}x$ عندئذ يوجد تطبيق $\nu\mapsto\mu(\nu)$ متزايد ويسعى إلى $+\infty$ بحيث يكون $x_{\nu,\mu(\nu)}\xrightarrow[\nu]{\tau}x$] . إذاً يوجد تطبيق $n\mapsto m(n)$ متزايد ، ويسعى إلى $+\infty$ ، بحيث يكون $x_{n,m(n)}\xrightarrow[n]{\tau}x$. وبما أن ذلك صحيح من أجل كل m ، نستطيع أن نكتب $f_n(x_{n,m(n)})\le\beta$ ، وأن $(x_{n,m(n)},\beta)\in epif_n$ مع $(x_{n,m(n)},\beta)\xrightarrow[n]{X\times R}(x,\beta)$ ، ومنه ينتج أن $(x,\beta)\in\liminf_n epif_n$ ، وهو المطلوب .

وهنا نعطي تطويراً آخر لهذه المبرهنة بالشكل التالي :

<u>مبرهنة 2.3 :</u> ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً يتمتع بقابلية العد من المرتبة الأولى ، ولتكن $\{f_n , f: X\to \overline{R}\,; n\in N\}$ متتالية من الدوال ، بحيث يكون :

$$M_\alpha^f=\overline{\{x\in X; f(x)<\alpha\}}$$

عندئذٍ ، الشروط التالية متكافئة :

$$(i)\ M_\alpha^f=\tau\text{-}\lim_n M_\alpha^{f_n};\ \forall\alpha>V(f)$$

$$(ii)\ f=\tau\text{-}\lim_{n}{}_{e}\, f_n.$$

$$(iii)\ \forall\alpha_n\xrightarrow[n]{}\alpha\ /\ M_\alpha^f=\tau-\lim_n M_{\alpha_n}^{f_n},\ \forall\alpha>V(f).$$

<u>البرهان :</u> لنبرهن أن $(i)\Leftarrow(iii)\Leftarrow(ii)\Leftarrow(i)$ ، إن $(ii)\Leftarrow(i)$ محققة حســـب المبرهنـــة السابقة ، و $(i)\Leftarrow(iii)$ محققة من أجل $\alpha_n=\alpha$ ، إذاً يكفي برهان $(iii)\Leftarrow(ii)$

سنبرهن أنه من أجل كل $\alpha_n\xrightarrow[n]{}\alpha$ فإن : $\limsup_n M_{\alpha_n}^{f_n}\subseteq M_\alpha^f\subseteq\liminf_n M_{\alpha_n}^{f_n}$. ليكـــن x من $\limsup_n M_{\alpha_n}^{f_n}$ عندئذٍ ، توجد المتتالية $(n_k)_{k\in N}$ و $(x_k)_{k\in N}$ ، بحيث يكون من أجل كـــل $k\in N$.

$x_k \in \mathrm{M}_{\alpha_{n_k}}^{f_{n_k}}$ و $x_k \xrightarrow[k]{\tau} x$ ، وبالتالي فإن $f_{n_k}(x_k) \le \alpha_{n_k}$. وبأخذ النهاية السفلى للطرفين نجـــد $\liminf_n f_{n_k}(x_k) \le \alpha$ ، وحسب تعريف التقارب فوق البيان الشرط *(i)* نحصل على :
أي أن $f(x) \le \liminf_n f_{n_k}(x_k) \le \alpha$ ، $x \in \mathrm{M}_\alpha^f$ ، *وبالتالي* $\limsup_n \mathrm{M}_{\alpha_n}^{f_n} \subseteq \mathrm{M}_\alpha^f$.

لتكن $0 < \beta < \alpha$ ،وليكن x من M_α^f ، *وبما أن* $f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n$ توجد متتاليـــــة (x_n) بحيـــث يكون $x_n \xrightarrow[n]{\tau} x$ و $\limsup_n f_n(x_n) \le f(x) < \beta < \alpha$. واضح أن $f_n(x_n) \le \alpha_n$ من أجل n كبـــيرة بما فيه الكفاية ؛ أي أن $x_n \in \mathrm{M}_{\alpha_n}^{f_n}$ ، وهذا يبين أن $\liminf_n \mathrm{M}_{\alpha_n}^{f_n} \supseteq \mathrm{M}_\beta^f$ ، وبجعل β تســـعى نحو α .

وباستخدام مفهوم تقارب المجموعات المتزايدة نحصل على :

$$\overline{\bigcup_{\beta\langle\alpha} \mathrm{M}_\beta^f} \subseteq \overline{\{x \in \mathrm{X}, f(x)\langle\alpha\}} \quad \text{لكن} \quad \mathrm{M}_\beta^f \xrightarrow{\beta\langle\alpha} \overline{\bigcup_{\beta\langle\alpha} \mathrm{M}_\beta^f} \subseteq \liminf_n \mathrm{M}_{\alpha_n}^{f_n}$$

مما سبق وحسب الفرض $\mathrm{M}_\alpha^f = \overline{\{x \in \mathrm{X}; f(x)\langle\alpha\}}$ نجد أن $\mathrm{M}_\alpha^f \subseteq \liminf_n \mathrm{M}_{\alpha_n}^{f_n}$.

ملاحظة 2.4 : برهن الرياضيون (Beer , Wets and Rockafellar ,1991) في نشرتهم[2]، أنه إذا كان X فصولاً فإن الشرط التـــالي محقـــق : $f = \tau - \lim_{n\ e} f_n \Leftrightarrow$ توجـــد متتاليـــة $\alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha$ بحيث يكون $\mathrm{M}_\alpha^f = \tau\text{-}\lim_n \mathrm{M}_\alpha^{f_n}$. مما سبق يمكننا أن نصوغ المبرهنة التالية :

مبرهنة 2.5 : ليكن X فضـــاءً فصـــولاً ، ويتمتـــع بقابليـــة العـــد مـــن المرتبـــة الأولـــى ، و $\{f_n , f : X \to \overline{R} ; n \in N\}$ متتالية من الدوال

عندئذٍ ، *الشروط التالية متكافئة* . $(i)\ \forall \alpha > V(f), \exists \alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha \,/\, M_\alpha^f = \tau - \lim_n M_{\alpha_n}^{f_n}$

$(ii)\ \mathrm{M}_\alpha^f = \tau\text{-}\lim_n \mathrm{M}_\alpha^{f_n},\ \forall \alpha\ \rangle V(f).$

$(iii)\ f = \tau\text{-}\lim_{n\ e} f_n .$

$(iv)\ \forall \alpha_n \xrightarrow[n]{} \alpha \,/\, M_\alpha^f = \tau - \lim_n M_{\alpha_n}^{f_n}, \forall \alpha > V(f).$

<u>البرهان</u> : ينتج مباشرة من المبرهنة 2.3 والملاحظة 2.4 .

نلاحظ أن الشرط $\mathrm{M}_\alpha^f = \overline{\{x \in \mathrm{X}; f(x)\langle\alpha\}}$ يلزمنا في المبرهنات السابقة ، وسنرى أنـــه ليـــس ضرورياً في حالة التحدب ، وهذا ما تبينه المبرهنة التالية :

مبرهنة 2.6 (حالة التحدب) :ليكن X فضاءً تبولوجياً يتمتع بقابلية العد من المرتبـــة الأولـــى وخطياً ، ولتكن $\{ f_n , f : X \to \overline{R}, n \in N\}$ متتالية من الـــدوال المحدبـــة ، عندئـــذٍ تبقـــى المبرهنات 2.2 ، 2.3 و 2.5 محققة .

<u>البرهان</u> : يكفي أن نبين *أن* f نهاية المتتالية (f_n) يحقق المســـاواة : $\mathrm{M}_\alpha^f = \overline{\{x \in \mathrm{X}, f(x)\langle\alpha\}}$.
بما أن (f_n) متتالية محدبة ومتقاربة نحو f ، فإنه حسب المبرهنـــة (Attouch , 1984)2.1 تكون f دالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى ، وبالتالي تكون M_α^f مجموعة محدبة ومغلقـــة ؛ ومنه : $\overline{\{x \in \mathrm{X}, f(x)\langle\alpha\}} \subset M_\alpha^f$. لنبرهن العكس ، أيا كانت x من M_α^f فإن $f(x) \le \alpha$.

وبما أن $\alpha > V(f)$ فإنه يوجد $x_0 \in X$، حيث يكون $f(x_0)<\alpha$، لنضع

$x_n=t_n x+(1-t_n)x_0$ حيث $(\forall n\in N)\ 0<t_n<1$ و $t_n \xrightarrow[n]{} 1$ عندئذٍ:

$x_n \xrightarrow[n]{\tau} x$ و $f(x_n)=f(t_n x+(1-t_n)x_0)\leq t_n f(x)+(1-t_n)f(x_0)<\alpha$

$$<\alpha t_n+(1-t_n)\alpha=\alpha$$

أي أن $x_n \in \{x\in X : f(x)<\alpha\}\ (\forall n\in N)$، الأمر الذي يعني أن

$x \in \overline{\{x\in X : f(x)<\alpha\}}$ ، وبالتالي يتم المطلوب .

كتطبيقات للنتائج السابقة نقوم بدراسة تقارب ε–الحلول في المبرهنة التالية:

<u>مبرهنة 2.7 :</u> (استقرارية ε ـ الحلول)

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً يتمتع بقابلية العد من المرتبة الأولى وخطياً ، ولتكن :

$\{f_n, f : X\to\overline{R},\ n\in N\}$ متتالية من الدوال ،المحدبة بحيث يكون: $argmin\, f\neq\phi$.عندئـذ،

كل شرطين من الشروط التالية يعطيان الآخر :

$$(i)\ f=\tau\text{-}\lim_{n}{}_{e}\, f_n$$

$$(ii)\ V(f)=\lim_{n}V(f_n)$$

$$(iii)\ \forall\varepsilon>0\ ;\ \varepsilon\text{-}argmin\, f=\tau\text{-}\lim_{n}(\varepsilon\text{-}argmin\, f_n)$$

<u>البرهان :</u> لدينا بالتعريف من أجل $\varepsilon>0$:

$$\varepsilon\text{-}argmin\, f:=\{x\in X\,;f(x)\leq max\{-1/\varepsilon,\ V(f)+\varepsilon\}\}=\mathrm{M}_{\alpha}^{f}$$

$$\varepsilon\text{-}argmin\, f_n:=\{x\in X\,;f_n(x)\leq max\{-1/\varepsilon, V(f_n)+\varepsilon\}\}=\mathrm{M}_{\alpha_n}^{f^n}$$

حيث : $\alpha_n=max\{-1/\varepsilon,\ V(f_n)+\varepsilon\}\ ,\ \alpha=max\{-1/\varepsilon,\ V(f)+\varepsilon\}$

(i) و $(ii)\Rightarrow(iii)$: حسب (ii) نجد أن $\alpha_n\xrightarrow[n]{}\alpha$ بالمقارنة مع المبرهنة 2.3 يتم المطلوب.

(ii) و $(iii)\Rightarrow(i)$: أيضا اعتمادا على المبرهنة (2.3) يتم المطلوب .

إذا المطلوب برهانه هو (i) و $(iii)\Rightarrow(ii)$: لنبرهن أولاً أن : $V(f)\geq\limsup_{n}V(f_n)$ لدينـــا

حسب (i) أياً كان x من X توجد متتالية (ζ_n) من X ، بحيث يكون :

$$\limsup_{n} f_n(\zeta_n)\leq f(x),\text{ و }\ \zeta_n\xrightarrow[n]{}x$$

من جهة أخرى لدينا دوماً : $V(f_n)\leq f_n(\zeta_n)$ ، بأخذ النهاية العليا للطرفيـــن ، وباســتخدام

العلاقة السابقة نجد : $\limsup_{n}V(f_n)\leq\limsup_{n}f_n(\zeta_n)\leq f(x)$

بما أن هذه العلاقة صحيحة من أجل كل $x\in X$ ، فإن : $\limsup_{n}V(f_n)\leq V(f)$

لنبرهن الآن أن : $V(f)\leq\liminf_{n}(V(f_n))$

لدينا دوماً : $$argmin\, f=\bigcap_{\varepsilon>0}(\varepsilon\text{-}argmin\, f)$$

وحسب الشرط *(iii)* يكون من أجل كل $x \in argmin\, f$ توجد متتالية (x_n) من $(\varepsilon\text{-}argmin\, f_n)$ ، بحيث يكون : $x_n \xrightarrow[n]{\tau} x$ و $f_n(x_n) \le V(f_n)+\varepsilon$

وبالتالي : $V(f) = f(x) \le \liminf_n f_n(x_n) \le \liminf_n V(f_n)+\varepsilon$ ، وبما أن $\varepsilon > 0$ عدد كيفــي ،

نستنتج أن : $V(f) \le \liminf_n V(f_n)$ ، وهو المطلوب .

(III) . دراسة ε . الحلول وفق مفهوم تقارب موسكو :

في هذه الفقرة نعتبر X فضاء باناخ انعكاسي $\{f_n, f: X \to \overline{R},\ n \in N\}$ متتالية من الــدوال من $\Gamma(x)$. سبق أن عرفنا التقارب وفق مفهوم موسكو في الفقرة (I) ، وقلنا : إن $epi\, f_n \xrightarrow{M} epi\, f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{M} f$. بطريقة مماثلة لبرهان المبرهنة (2.7) فــي الفقــرة *(II)* نحصل على المبرهنة التالية :

<u>مبرهنة 3.1 :</u> لتكن $\{f_n, f: X \to \overline{R}\ ,\ n \in N\}$ متتالية من الدوال مــن $\Gamma(X)$. عندئــذ ، تحقق أي شرطين من الشروط التالية يؤدي إلى تحقق الثالث :

i) $f_n \xrightarrow{M} f$.

ii) $V(f_n) \to V(f)$.

iii) $\varepsilon\text{-}argmin\, f_n \xrightarrow{M} \varepsilon\text{-}argmin\, f;\ \forall \varepsilon > 0$.

تعود أهمية التقارب وفق مفهوم موسكو فوق البيان ، إلى إثبات أنه يوجد تقابل واحد لواحد بيــن $\Gamma(X)$ و $\Gamma(X^*)$ ، وهذا ما تبينه المبرهنة التالية :

<u>مبرهنة 3.2</u> : (Mosco , 1971) ليكن X فضاء باناخ انعكاسياً ، ولتكن :

$$\Gamma(X) \supset \{f_n, f: X \to \overline{R},\ n \in N\} \text{ و } \Gamma(X^*) \supset \{f_n^*, f^*: X^* \to \overline{R},\ n \in N\}$$

عندئذٍ ، الشرطان التاليان متكافئان :

(i) $f_n \xrightarrow{M} f$

(ii) $f_n^* \xrightarrow{M} f^*$

كنتيجة من المبرهنة 3.2 نحصل على المبرهنة التالية :

<u>مبرهنة 3.3 :</u> ليكن X فضاء باناخ انعكاسياً و $(f_n)_{n \in N}$ متتالية من الدوال المحدبـــة الخاصــة ونصف المستمرة من الأدنى ، لنفرض أن (f_n^*) تكون *equi–s.c.i* في 0 ، وأن :

$$f_n \xrightarrow{M} f \text{ عندئذ : } V(f_n) \xrightarrow[n]{} V(f)$$

<u>البرهان</u> : لدينا $f_n \xrightarrow{M} f$. إذاً حســب المبرهنـــة 3.2 تكــون $f_n^* \xrightarrow{M} f^*$ ، وبمــا أن (f_n^*) $equi-s.c.i$ في 0 ، إذاً بتطبيق المبرهنة 2.59 لـ (Attouch , 1984) ، والتــي تنص [يفرض (X, τ) فضاء تبولوجي و $\{f_n, f: X \to \overline{R},\ n \in N\}$ متتالية من الدوال ،عندئــذ كل شرطين من الشروط التالية يعطي الثالث $(i)\ f = \tau - \lim_{n\ e} f_n$ ، $(ii)\ f = \lim_n f_n$ ، (iii) المتتالية (f_n) هي متتالية $equi-s.c.i$ في x] .

نحصل على التقارب البسيط للمتتالية (f_n^*) نحو f^* في 0 ؛ أي: $f_n^*(0) \xrightarrow[n]{} f^*(0)$. من جهة أخرى لدينا حسب تعريف الدالة المرافقة :

$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{< x,x^* > -f(x)\} = -\inf\{- < x,x^* > +f(x)\}$ ،وبالتالي $f^*(0) = -V(f)$ ،

وبالطريقة نفسها نجد $f_n^*(0) = -V(f_n)$ ، بذلك يتم المطلوب .

من المبرهنتين 3.1 و 3.3 لدينا النتيجة المباشرة التالية :

نتيجة 3.4: بفرض أن $\{f_n , f ; n \in N\}$ من $\Gamma(X)$ ، وبفرض أن (f_n^*) تكون $equi-s.c.i$ في 0 ،عندئذٍ ، الشرطان التاليان متكافئان :

$i)\ f_n \xrightarrow{M} f.$

$ii)\ \varepsilon\text{-}argmin\, f_n \xrightarrow{M} \varepsilon\text{-}argmin\, f;\ \forall \varepsilon > 0.$

بالاعتماد على المبرهنة (3.1) ، وعلى تعريف ε ــ تحت ــ التفاضل ، نحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.5 : ليكن X فضاء باناخ انعكاسياً و $\{f_n , f ; n \in N\}$ من $\Gamma(X)$ ، عندئذ :

إذا كان : $f_n \xrightarrow{M} f$ و $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$ ، وذلك من أجل كل x من X ، فإنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يكون : $\partial_\varepsilon f_n(x) \xrightarrow{M} \partial_\varepsilon f(x)$

البرهان : من تعريف $\partial_\varepsilon f_n(x)$ لدينا :

$$\partial_\varepsilon f_n(x) := \{x^* \in X^* / f_n^*(x^*) - < x , x^* > + f_n(x) \le \varepsilon\}$$

وبما أن X فضاء باناخ انعكاسي ،و $f_n \in \Gamma(x)$ يكون $(f_n)=(f_n^{**})$. انظر (Moreau, 1966) ، وبالتالي يكون :

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon f_n(x) &:= \{x^* \in X^* / f_n^*(x^*) + f_n^{**}(x) - < x , x^* > \le \varepsilon\}\\ &= \{x^* \in X^* / f_n^*(x^*) - < x , \zeta^* > \le f_n^*(\zeta^*) + < x , x^* > + \varepsilon\}\end{aligned}$$

(ذلك من أجل كل $\zeta^* \in X^*$) .

بفرض أن $F = f^*(.) - < x , . >$ و $F_n = f_n^* - < x , . >$.عندئذ يكون :

$\partial_\varepsilon f_n = \varepsilon\text{-}argmin\, F_n$ وبالشكل نفسه يكون : $\partial_\varepsilon f = \varepsilon\text{-}argmin\, F$

من جهة أخرى لدينا : $V(F_n) = V\{f_n^*(x^*) - < x , x^* >\}$

$$= -\sup_{x^* \in X^*}\{< x , x^* > - f_n^*(x^*)\} = -f_n^{**}(x) = -f_n(x).$$

وبالطريقة نفسها نجد : $V(F) = -f(x)$.

وبحسب الفرض فإن $-f_n(x) \to -f(x)$ ، وبالتالي يكون : $V(F_n) \xrightarrow[n]{} V(F)$

وبما أن $f_n \xrightarrow{M} f$ ، فإنه حسب المبرهنة 3.2 يكون $f_n^* \xrightarrow{M} f^*$ ، وحسب النظرية 2.15 لــ (Attouch , 1984) والتي تنص [إذا كان g مستمراً وكان $f_n \xrightarrow{M} f$ فــإن $f_n + g \xrightarrow{M} f + g$] إذا:

$$f_n^*(.) - < x , . > \xrightarrow{M} f^*(.) - < x , . >$$

وبالتالي يكون $F_n \xrightarrow{M} F$ ، وبرهنا سابقاً أن $V(F_n) \xrightarrow[n]{} V(F)$ ، وبالتالي حسب المبرهنة 3.1 يكون $\partial_\varepsilon f_n(x) \xrightarrow{M} \partial_\varepsilon f(x)$.

ملاحظة 3.6 : بطريقة برهان المبرهنة السابقة نفسها نستطيع صياغة النتيجة التالية :

بفرض $f_n \xrightarrow{M} f$ ، وأنه من أجل كل x من X توجد متتالية (x_n) في X ، بحيث يكون : $x_n \xrightarrow[n]{\tau} x$ و $f_n(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x)$. عندئذ يكون: $\partial f_n(x_n) \xrightarrow{M} \partial f(x)$.

سننهي هذه الفقرة بدراسة ε ـــ الحلول المثلى لمسألة تتعلق بمساقط نقطة x من X على مجموعة ما في X.

تعريف 3.7 : لتكن A مجموعة محدبة في X ، ولتكن x_0 نقطة ما من X ،نعرف ε ـــ مسقط النقطة x_0 على $A \subseteq X$ ، ونرمز له بـــ $\varepsilon\text{-}p(x_0, A)$ بالعلاقة :

$$\varepsilon\text{-}P(x_0, A) = \{x \in A / \|x - x_0\| \leq d(x_0, A) + \varepsilon\}$$

حيث $d(x_0, A)$ تشير إلى المسافة بين x_0 والمجموعة A ، وتعرف بـــ :

$$d(x_0, A) = \inf_{y \in A} \|y - x_0\|$$

من التعريف السابق ، ومن تقارب موسكو فوق البيان لمتتالية من الـــدوال f_n نحـــو f ، حيـــث: $f_n = \|x - \cdot\| + \delta_{A_n}(\cdot)$ و $f = \|x - \cdot\| + \delta_A(\cdot)$ ، نحصل على المبرهنة التالية :

مبرهنة 3.8: لتكن $\{A_n, A, n \in N\}$ متتالية من المجموعات المحدبة المحتواة في X ، عندئذٍ ، الشرطان التاليان متكافئان :

$i)$ $A_n \xrightarrow{M} A$.

$ii)$ $\varepsilon\text{-}p(x, A_n) \xrightarrow{M} \varepsilon\text{-}p(x, A)\ ;\ \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0$.

البرهان لتكن x ثابتة من X ، ولنعرف : $f_n := \|x - \cdot\| + \delta_{A_n}(\cdot),\ f := \|x - \cdot\| + \delta_A(\cdot), n \in N$

حيث $\delta_A(.)$ الدالة المشيرة (indécatrice) للمجموعة A [تـــساوي 0 إذا كـــانت $x \ni A$، وتـــــاوي $+\infty$ إذا كـــانت $x \not\in A$]. يمكــــن البرهـــــان بســـــهولة أن $A_n \xrightarrow{M} A \Leftrightarrow \delta_{A_n}(.) \xrightarrow{M} \delta_A(.)$. وبما أن التطبيق $x \mapsto \|x\|$ مســـتمرٌ ، إذاً حســـب النظرية 2.15 لـــ (Attouch , 1984) ينتج أن $f_n \xrightarrow{M} f$

وبشكل واضح لدينا : $V(f) = d(x, A)$, $V(f_n) = d(x, A_n)$

من جهة أخرى لدينا:

$$\varepsilon\text{-}p(x, A_n) := \{y \in A_n / \|x - y\| \leq d(x, A_n) + \varepsilon\}$$
$$= \{y \in A_n / \|x - y\| \leq V(f_n) + \varepsilon\} = \varepsilon\text{-}\operatorname{argmin} f_n$$

$(ii \Leftarrow i)$ بفرض $A_n \xrightarrow{M} A$ ،فإنه حسب النظرية 3.33 لـــ (Attouch , 1984) يكون :

أياً كان x من X ، فإن $d(x, A_n) \xrightarrow[n]{} d(x, A)$ ؛ أي أن : $V(f_n) \xrightarrow[n]{} V(f)$.

مما تقدم وحسب (i) و (ii) من المبرهنة 3.1 نحصل على المطلوب .

$(i \Leftarrow ii)$ لدينا : $P(x, A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\varepsilon\text{-}P(x, A_n)$ وحسب (ii) يكون :

$$P(x, A) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \liminf_n (\varepsilon\text{-}P(x, A_n))$$

لتكن $y \in P(x, A)$ ، عندئذ يمكن أن نعرف متتالية (ε_n) موجبة في R ، و (y_n) في X ،

بحيث يكون $0 \xrightarrow[n]{} 0 \leq \varepsilon_n$, $y_n \in \varepsilon_n - p(x, A_n)$ (من أجل كل n من N) و $y_n \underset{n}{\overset{\tau}{\rightarrow}} y$ ،

وهذا يبرهن أن : $d(x, A_n) \xrightarrow[n]{} d(x, A)$ ، أي أن : $V(f_n) \xrightarrow[n]{} V(f)$ ،

وبالتالي حسب (ii) و (iii) في المبرهنة (3.1) ينتج أن $(ii) \Leftarrow (i)$ ، وهو المطلوب .

REFERENCES المراجع

1. Attouch.H,(1984):Variational convergence for functions and operators pitman applicable mathematics , Pitman, London .
2. Beer.G,wets.Rand Rockafellar.T.R,(1991) : A characterization of epi-convergence in terms of convergence of level sets. to appear : proc. Amer. Moth. Soc.
3. De.Giorgi.E,(1979) : Convergence problems for functions and operators ; proc. int. Meet , on recent methods in non linear . Analysis Roma Pitagora ed. Bolo gua.
4. Hiriart-urruty.J-B,(1982) : ε - Subdifferential calculus convex analysis and optimazation . Research Notes in mathmatics-series 157 Pitman .and functions . Bull . Amer . Math . soc . 70.
5. Moreau-J.J,(1966): Fonctionnelles convexes , séminaire du collège de France .
6. Mosco.U,(1971):On the continuty of the young -Fenchel transformation, Journ . Math . Anal . Appl . 35 , 518 – 35 .
7. Soueycatt.M,(1987): Epi-convergence et convergence des sections . Application àla stabilité des ε - point-selles des fonctions convexes-concaves , AVAMAC 87 , VOL. 1 exp . n° 7 .
8. Volle.M,(1986): Thèse de Doctorat d'Etat .contribution à la dualité en optimization et à l'épi-convergence , université de Pau et des Pays de l'Adour .FRANCE .
9. Wets.R,(1983) : Aformula for the level sets of epi-limits and some applications. In math . Theory of optimization,eds. P. cecconi and T. Zolezzi, springer verlag , lectures Notes in Mathmatics .
10. Wijsman.R.A,(1964): Convergens of sequences of convex sets ; cones , and functions .Bull .Amer . Math . soc . 70.