Maximal Convergence of Faber Series in Morrey-Smirnov Spaces

Dr. Ahmed Kinj*

(Received 10 / 8 / 2022. Accepted 20 / 3 /2023)

□ ABSTRACT □

Let G be a finite, simply connected domain in the complex plane $\mathbb{C}$ bounded by a regular closed curve Γ. It is known that any function $f(z)$ analytic in G can be expanded into a Faber series of the form $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), z \in \bar{G}$, where a_k are Faber series coefficients and $F_k(z)$ are Faber polynomials. In this work, the maximal convergence properties of the partial sums of the Faber series in the Morrey-Smirnov spaces $E^{p,\lambda}(G)$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda \leq 1$ of analytic functions defined on G are investigated.

Keywords: Approximation theory, Faber polynomials, Faber series, Morrey-Smirnov spaces, Maximal convergence

*Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria, a.kinj@tishreen.edu.sy

التقارب الأعظمي لمتسلسلات فابير في فضاءات موري-سميرنوف

د. أحمد كنج*

(تاريخ الإيداع 10 / 8 / 2022. قُبِل للنشر في 20 / 3 /2023)

□ ملخّص □

لتكن G منطقة محدودة وبسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومحاطة بمنحنٍ Γ نظامي ومغلق. من المعلوم أن أي دالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة G تقبل النشر في متسلسلة فابير من الشكل $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), z \in \bar{G}$، حيث a_k أمثال متسلسلة فابير و $F_k(z)$ كثيرات حدود فابير. قمنا في هذا البحث بدراسة خواص التقارب الأعظمي للمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير من أجل الدوال التحليلية في المنطقة G من فضاءات موري –سميرنوف $E^{p,\lambda}(G)$، حيث $1 < p < \infty$ و $0 < \lambda \leq 1$.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، كثيرات حدود فابير، متسلسلة فابير، فضاءات موري–سميرنوف، التقارب الأعظمي.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية a.kinj@tishreen.edu.sy.

مقدمة:

لعبت متسلسلات تايلور دوراً بارزاً في مختلف فروع الرياضيات منذ نشأتها على يد العالم الانكليزي Brook Taylor، فهي تمكننا من نشر أي دالة $f(z)$ تحليلية في القرص المفتوح $T: |z - z_0| < R$ بمتسلسلة قوى من الشكل:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

حيث c_k أمثال متسلسلة تايلور، تعطى بالعلاقة:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{T}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi\,, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

درس G. Faber عام 1903 [1] تعميم متسلسلات تايلور وذلك باستبدال القرص المفتوح T بمنطقة G بسيطة الترابط وتوصل إلى أن أي دالة $f(z)$ تحليلية في منطقة G محدودة، وبسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ومحاطة بمنحنٍ Γ نظامي تقبل النشر في متسلسلة من الشكل:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z)\,, \qquad z \in G\#(1)$$

حيث $F_k(z)$ كثيرات حدود فابير و a_k أمثال متسلسلة فابير.

ازداد الاهتمام بمتسلسلات فابير نظراً لاستخداماتها المختلفة في حل العديد من المسائل الرياضية، وبشكلٍ خاص في نظرية تقريب الدوال العقدية، ونظرية التحويلات المحافظة، ونظرية القيم الحدودية [5 ,4 ,3 ,2]. لذلك كان من الأهمية بمكان دراسة خواص متسلسلات فابير ومناطق تقاربها في مختلف الفضاءات الدالية. فقد توصل Israfilov وآخرون عام 2005 [6] إلى تقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير (1) في فضاءات سميرنوف–أورليتش، كما تمكن Oktay عام 2019 [7] من تحسين التقدير الذي توصل إليه Israfilov. كما دُرس التقارب الأعظمي لمتسلسلة فابير من أجل الدوال التحليلية من فضاءات سميرنوف ذي الأس المتغير من قبل Gursel وآخرون عام 2018 [8].

يُعدّ فضاء موري واحداً من أهم الفضاءات الدَّالية الشهيرة، وقد عرفه الباحث الأمريكي موري في المقال [9] أثناء دراسته لجمل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية من المرتبة الثانية، حيث وضع شرطاً على حلول المعادلات لتكون هذه الحلول مستمرةً بما فيه الكفاية، وما لبث أن تحول هذا الشرط إلى فضاءٍ من الدوال سُمي فيما بعد بفضاء موري.

في الآونة الاخيرة حُلت العديد من المسائل الرياضية في فضاءات موري، نذكر على سبيل المثال [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

قمنا في هذا العمل بدراسة التقارب الأعظمي لمتسلسلة فابير (1) في فضاءات موري–سميرنوف $E^{p,\lambda}(G)$، من أجل الدوال $f(z)$ التحليلية في منطقة G وبشكلٍ خاص، قدّرنا الباقي النوني $R_n(z,f)$ لمتسلسلة فابير

$$R_n(z,f) = f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k F_k(z)\,\#(2)$$

بدلالة التقريب الأفضل للدالة f، ثم بدلالة معامل الملوسة للدالة f في فضاء موري–سميرنوف.

قُسم هذا البحث بالشكل الآتي: ذكرنا بدايةً بأهم المصطلحات والرموز المستخدمة والتعاريف الأساسية، ثم تطرقنا إلى بعض التمهيديات التي استخدمناها للوصول إلى النتائج المرجوة، ليتم بعد ذلك الوصول إلى برهان النتيجة الرئيسية في

هذا العمل بكل سهولة ويسر. ونشير إلى أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث $c, c_1, c_2, \ldots$ كلها موجبة ومختلفة ولا تتعلق بـ n.

أهمية البحث وأهدافه:

تلعب متسلسلات فابير دوراً أساسياً في حل العديد من المسائل الرياضية وبشكل خاص، في نظرية تقريب الدوال العقدية، ونظرية التحويلات المحافظة، ونظرية القيم الحدودية لذا تنبع أهمية البحث من دراسة خواص متسلسلات فابير وتقاربها في فضاءات موري–سميرنوف. أما أهداف البحث فيمكن تلخيصها، بدراسة التقارب الأعظمي لمتسلسلة فابير في فضاءات موري– سميرنوف، وتقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير من أجل الدوال التحليلية من فضاءات موري–سميرنوف بدلالة التقريب الأفضل ثم بدلالة معامل الملوسة في فضاءات موري–سميرنوف.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكلٍ خاص ضمن التحليل العقدي، ونظرية تقريب الدوال العقدية لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكلٍ أساسي على مفاهيم التحليل العقدي، مثل التحويلات المحافظة وكثيرات حدود فابير ومتسلسلات فابير وبعض أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$. يقسم المنحني Γ المستوي العقدي إلى منطقتين إحداهما محدودة G والأخرى غير محدودة G^-. سنفترض، دون المساس بعمومية الدراسة، أن $0 \in G$.

لنرمز بـ D لقرص الواحدة أي، $D = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ و γ_0 دائرة الواحدة و $D^- = \{w \in \mathbb{C}: |w| > 1\}$.

لتكن $w = \varphi(z)$ الدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} > 0$ ، $\varphi(\infty) = \infty$ وسنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

تعاريف ومفاهيم أساسية

<u>تعريف 1</u> [18] **فضاء دوال ليبيغ Lebesgue space**

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وليكن $1 \le p < \infty$ عدداً حقيقياً. يُعرف فضاء ليبيغ $L^p(\Gamma)$ بأنه مجموعة جميع الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ القابلة للقياس على المنحني Γ والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_\Gamma |f(z)|^p \, |dz| < \infty.$$

إنَّ فضاء ليبيغ $L^p(\Gamma)$ يشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |f(z)|^p \, |dz|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>تعريف 2</u> [2] **فضاء دوال سميرنوف Smirnov space**

لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن Γ_r صورة أسرة الدوائر $\gamma_r = \{w \in \mathbb{C}: |w| = r, 0 \leq r < 1\}$ وفق تحويل محافظ ينقل قرص الواحدة D إلى المنطقة G. يُرمز بـ $E^1(G)$ لأسرة جميع الدوال $f: G \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة G، والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|\,|dz| < \infty$$

يُعرف فضاء دوال سميرنوف $E^p(G)$ ، $1 \leq p < \infty$ بالعلاقة:

$$E^p(G) = \{f \in E^1(G):\ f \in L^p(\Gamma)\}$$

إن $E^p(G)$ فضاء باناخ، إذا زوّد بالنظيم $\|f\|_{E^p(G)} = \|f\|_{L^p(\Gamma)}$.

في الحالة الخاصة، التي يكون فيها $G = D$ قرص الواحدة في المستوي العقدي، فإنَّ فضاء سميرنوف $E^p(G)$ يؤول إلى فضاء هاردي $H^p(D)$.

<u>تعريف 3</u> [18] **فضاء دوال موري Morrey space**

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول و $1 \leq p < \infty$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ يُعرف فضاء موري $L^{p,\lambda}(\Gamma)$ بأنه أسرة جميع الدوال $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ القابلة للقياس على المنحني Γ والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)} = \left\{\sup_B \frac{1}{|B \cap \Gamma|^{1-\lambda}} \int_{B\cap\Gamma} |f(z)|^p |dz|\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

حيث sup مأخوذ على كل الأقراص B التي مركزها نقطة من المنحني Γ ونصف قطرها r. كما يرمز $|B \cap \Gamma|$ لقياس ليبيغ للمجموعة $B \cap \Gamma$. في الحالة الخاصة، التي يكون فيها المنحني Γ هو دائرة الواحدة γ_0، فإنَّ فضاء موري $L^{p,\lambda}(\gamma_0)$ يعرف بأنه أسرة الدوال $f: \gamma_0 \to \mathbb{C}$ القابلة للقياس على γ_0 والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\gamma_0)} = \left\{\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\lambda}} \int_I \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p |dt|\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

حيث sup مأخوذ على كل المجالات الجزئية I من المجال $[0,2\pi]$ ويرمز $|I|$ لطول المجال I.

حالات خاصة من فضاء موري:

عندما $\lambda = 1$ فإن فضاء موري $L^{p,1}(\Gamma)$ يؤول إلى فضاء ليبيغ $L^p(\Gamma)$.

عندما $\lambda = 0$ فإن فضاء موري $L^{p,0}(\Gamma)$ يؤول إلى فضاء الدوال المحدودة أساسياً $L^\infty(\Gamma)$.

ومن الجدير بالذكر أنه أياً يكن $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ فإن $L^{p,\lambda_1}(\Gamma) \subseteq L^{p,\lambda_2}(\Gamma)$. الأمر الذي يعني أن $L^{p,\lambda}(\Gamma) \subseteq L^1(\Gamma)$ مهما يكن $0 \leq \lambda \leq 1$.

<u>تعريف 4</u> [15] **فضاء دوال موري–سميرنوف Morrey–Smirnov space**

لتكن G منطقة محدودة وبسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني جوردان Γ محدود الطول وليكن $1 \leq p < \infty$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ يُعرف فضاء موري–سميرنوف $E^{p,\lambda}(G)$ بالعلاقة:

$$E^{p,\lambda}(G) = \{f \in E^1(G) : f \in L^{p,\lambda}(\Gamma)\}.$$

إن فضاء موري–سميرنوف بشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم بالشكل $\|f\|_{E^{p,\lambda}(G)} = \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Gamma)}$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $\lambda = 1$ فإن فضاء موري سميرنوف $E^{p,1}(G)$ يؤول إلى فضاء سميرنوف $E^p(G)$. ومن أجل $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ فإن $E^{p,\lambda_1}(G) \subseteq E^{p,\lambda_2}(G)$.

<u>تعريف 5</u> [19] **التقريب الأفضل Best Approximation**

ليكن $f \in E^{p,ë}(G)$، حيث $1 \le p < \infty$ و $0 \le ë \le 1$ وبفرض أن p_n^* أفضل كثير حدود من الدرجة n على الأكثر تقرب الدالة f. يرمز $E_n(f,G)_{p,ë}$ للخطأ الأصغري لتقريب الدالة f من الدرجة n أي:

$$E_n(f,G)_{p,ë} = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_{L^{p,ë}(\Gamma)}, \#(3)$$

حيث *inf* مأخوذ على $\mathcal{P}_n$ أسرة كل كثيرات الحدود من الدرجة n على الأكثر.

<u>تعريف 6</u> [20] **المنحني ديني− أملس Dini−smooth curve**

لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2ð]$ معامل استمراريتها يعطى بالعلاقة

$$ù(t,h) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \le t \\ t_1,t_2 \in [0,2ð]}} |h(t_1) - h(t_2)|, \qquad t \ge 0$$

يقال عن الدالة h إنها ديني−مستمرة (**Dini−continuous**) إذا كان

$$\int_0^{ð} \frac{ù(t,h)}{t} dt < \infty.$$

ويقال عن المنحنيΓ إنه منحني ديني−أملس إذا كان له التمثيل $\Gamma: ö_0(ô),\ 0 \le ô \le 2ð$ وكانت الدالة $\varphi_0'(ô)$ ديني− مستمرة وتحقق الشرط $\varphi_0'(ô) \ne 0$.

ومن المعلوم أنه إذا كان Γ ديني−أملس فإنه يوجد ثوابت c_1, c_2, c_3, c_4 بحيث يتحقق

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \le |ø'(w)| \le c_2 < \infty, \qquad |w| \ge 1 \\ 0 < c_3 \le |ö'(z)| \le c_4 < \infty, \qquad z \in G^- \end{aligned} \#(4)$$

<u>تعريف 7</u> [19] **معامل الملوسة في فضاء موري Modulus of smoothness in Morrey space**

ليكن $f \in L^{p,ë}(ã_0)$ حيث $r = 1,2,\ldots$. يعرف معامل الملوسة من المرتبة r للدالة f بالعلاقة:

$$ù_{p,ë}^r(f,t) = \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^r(f,.)\|_{L^{p,ë}(\gamma_0)}, \qquad t \ge 0,$$

حيث

$$\Delta_h^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kh)$$

ليكن $f, f_1, f_2 \in L^{p,ë}(ã_0)$. إن معامل الملوسة يحقق الخواص الآتية:

$$\lim_{t \to 0} ù_{p,ë}^r(f,t) = 0$$
$$ù_{p,ë}^r(f_1 + f_2, t) \le ù_{p,ë}^r(f_1,t) + ù_{p,ë}^r(f_2,t)$$
$$ù_{p,ë}^r(f, nt) \le n^r ù_{p,ë}^r(f,t), \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$ù_{p,ë}^r(f, ët) \le (ë+1)^r ù_{p,ë}^r(f,t), \qquad ë > 0.$$

النتائج والمناقشة:

لتكن $K = G \cup \Gamma$ مجموعة متراصة ومترابطة في المستوي العقدي ومتممتها $G^- = K^-$ مجموعة مترابطة. ولتكن المنحنيات $\Gamma_R = \{z \in G^- : |ö(z)| = R\}$، حيث$R > 1$ ولنرمز بـ K_R للمنطقة المحدودة الواقعة داخل Γ_R.

لتكن $w = ö(z)$ الدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق

$$ö(\infty) = \infty, \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{ö(z)}{z} = d > 0\#$$

ولنرمز بـ ø للدالة العكسية للدالة ö. الدالة ö تحليلية في K^- باستثناء النقطة $z=\infty$ التي تشكل قطباً بسيطاً للدالة φ. وبالتالي فإن منشور لورنت للدالة ö في جوار النقطة الشاذة $z=\infty$ له الشكل:

$$ö(z)=dz+d_0+\frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots$$

من أجل عدد صحيح غير سالب $k\geq 0$ يكون لدينا

$$\big(ö(z)\big)^{\mathrm{k}}=\left(dz+d_0+\frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots\right)^k$$

$$=d^kz^k+a_{k-1}^{(k)}z^{k-1}+a_{k-2}^{(k)}\,z^{k-2}+\cdots+a_1^{(k)}z+a_0^{(k)}+\frac{b_1^{(k)}}{z}+\cdots+\frac{b_n^{(k)}}{z^n}+\cdots$$

يسمى كثير الحدود

$$F_k(z)=d^kz^k+a_{k-1}^{(k)}z^{k-1}+a_{k-2}^{(k)}\,z^{k-2}+\cdots+a_1^{(k)}z+a_0^{(k)}$$

كثير حدود فابير من الدرجة k. كما سنرمز

$$-E_k(z)=\frac{b_1^{(k)}}{z}+\cdots+\frac{b_n^{(k)}}{z^n}+\cdots$$

الأمر الذي يعني أن

$$[ö(z)]^k=F_k(z)-E_k(z),\qquad z\in K^-.$$

نعطي فيما يأتي بعض الأمثلة عن كثيرات حدود فابير.

مثال (1) إذا كانت G هي القرص $|z-z_0|<R_0$ فإن $ö(z)=\frac{z-z_0}{R_0}$ ومنه $ö^k(z)=\frac{(z-z_0)^k}{R_0^k}$ أي أن كثيرات حدود فابير في هذه الحالة هي $F_k(z)=\frac{(z-z_0)^k}{R_0^k}$.

مثال (2) إذا كانت $K=[-1,1]$ عندئذٍ $ö(z)=z+\sqrt{z^2-1}$، حيث $z\notin[-1,1]$ بحيث يختار فرع الجذر التربيعي الذي يحقق الشرط

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt{z^2-1}=1$$

بما أن منشور الدالة

$$\frac{1}{ö(z)}=\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}=z-\sqrt{z^2-1}$$

في جوار النقطة $z=\infty$ لايحتوي على قوى لـ z صحيحة غير سالبة، فإن لمنشور كلاً من الدالتين $ö^k(z)$ و $ö^k(z)+\frac{1}{ö^k(z)}$ في جوار النقطة $z=\infty$ نفس الحدود ذات القوى الصحيحة غير السالبة .

$$\frac{1}{ö^k(z)}+ö^k(z)=\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^k+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^k$$

من جهة أخرى، نعلم أن كثيرات حدود تشبيتشيف من النوع الأول يمكن تمثيلها بالعلاقة [21,P.15]

$$T_k(z)=\frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^k+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^k\right],\qquad |z|>1$$

وبالمقارنة بين $ö^k(z)+\frac{1}{ö^k(z)}$ و كثيرات حدود تشبيتشيف $T_k(z)$ نستنتج أن منشور الدالة $ö^k(z)+\frac{1}{ö^k(z)}$ في جوار اللانهاية يحتوي فقط على حدود ذات قوى غير سالبة لـ z. الأمر الذي يعني أن الدالة $ö^k(z)+\frac{1}{ö^k(z)}$ هي كثيرة حدود فابير في حالة $K=[-1,1]$، كما أن كثيرات حدود فابير في هذه الحالة هي كثيرات حدود تشبيتشيف مضروبة بـ 2.

من المعلوم أنَّ أي دالة $f(z)$ من الفضاء $E^1(K_R)$ تقبل النشر في متسلسلة فابير [22,P.199]

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z), \quad z\in K, \#(5)$$

حيث الأمثال a_k تعطى بالعلاقة:

$$a_k=\frac{1}{2ði}\int_{\gamma_0}\frac{f(ø(w))}{w^{k+1}}dw, \qquad k=0,1,2,\dots \quad .\#(6)$$

قمنا في هذا العمل بدراسة الباقي النوني لمتسلسة فابير (5) أي،

$$R_n(z,f)=f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{F}_k(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \mathrm{F}_k(z)\ , \qquad z\in K.\#(7)$$

بتعويض العلاقة (6) في (7) نحصل على:

$$R_n(z,f)=\frac{1}{2ði}\int_{ã_0} f(ø(t))\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt.$$

ليكن p_n كثير حدود من الدرجة n على الأكثر، عندئذٍ

$$R_n(z,f)=\frac{1}{2ði}\int_{ã_0}\{f(ø(t))-p_n(ø(t))\}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}\right]dt.\#(8)$$

وبالاستفادة من العلاقة

$$F_k(z)=[ö(z)]^k+E_k(z), \qquad z\in K^-$$

نجد أن:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{F_k(z)}{t^{k+1}}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{[ö(z)]^k}{t^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(z)}{t^{k+1}}$$

ومن العلاقة (8) وبوضع $z=ø(w)$ يمكننا أن نكتب:

$$|R_n(z,f)|\le\frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{w^k}{t^{k+1}}\right||dt|$$

$$+\frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(ø(w))\frac{1}{t^{k+1}}\right||dt|.\#(9)$$

حيث الدالة $E_k(ø(w))$ معرفة بالعلاقة

$$E_k(ø(w))=\frac{1}{2ði}\int_{|ô|=r} ô^k F(ô,w)\,dô, \qquad |w|\ge r>1\ ,\#(10)$$

و

$$F(ô,w)=\frac{ø'(ô)}{ø(ô)-ø(w)}-\frac{1}{ô-w}, \qquad |ô|>1, \qquad |w|>1.$$

بالاستفادة من تقدير ليبديف [21] لدينا

$$\frac{1}{2ði}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|\,|dô|\le\sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}}, \qquad r>1, \qquad |w|\ge r>1.\#(11)$$

من أجل برهان النتيجة الأساسية في هذا البحث نحتاج إلى متراجحة هولدر في فضاء موري الآتية:

مبرهنة مساعدة (1) [23, P.8] ليكن $1 \leq p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $0 < \text{ë} \leq 1$. إذا كان $f \in L^{p,\text{ë}}(\tilde{A})$ و $g \in L^{q,\text{ë}}(\tilde{A})$ عندئذٍ تتحقق متراجحة هولدر الآتية:

$$\|fg\|_{L^1(\Gamma)} \leq c\|f\|_{L^{p,\text{ë}}(\Gamma)}\|g\|_{L^{q,\text{ë}}(\Gamma)}. \#(12)$$

نعطي فيما يأتي المبرهنة الأساسية في هذا البحث والتي تختص بتقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير في فضاءات موري –سميرنوف بدلالة التقريب الأفضل.

مبرهنة (1) ليكن $1 < p < \infty$ و $0 < \text{ë} \leq 1$. إذا كان $f \in E^{p,\text{ë}}(K_R)$، حيث $R > 1$. عندئذٍ يقدر الباقي النوني $R_n(z,f)$ لمتسلسلة فابير للدالة f بالمتراجحة الآتية:

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{c}{R^{n+1}(R-1)} E_n(f,K_R)_{p,\text{ë}} \sqrt{n \ln n}, \qquad z \in K$$

حيث c ثابت لايتعلق بـ n.

البرهان: ليكن $z \in \Gamma_r$، حيث $1 < r < R$ وليكن $p_n(z)$ كثير الحدود الأفضل تقريباً من الدرجة n على الأكثر للدالة $f \in E^{p,\text{ë}}(K_R)$، وباستخدام العلاقة (9) لدينا:

$$|R_n(z,f)| \leq \frac{1}{2\eth}\int_{|t|=R} \left|f(\text{ø}(t)) - p_n(\text{ø}(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

$$+\frac{1}{2\eth}\int_{|t|=R} \left|f(\text{ø}(t)) - p_n(\text{ø}(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\text{ø}(w))\frac{1}{t^{k+1}}\right| |dt|. \#$$

للتسهيل سنضع،

$$I_1 = \frac{1}{2\eth}\int_{|t|=R} \left|f(\text{ø}(t)) - p_n(\text{ø}(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{w^k}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

و

$$I_2 = \frac{1}{2\eth}\int_{|t|=R} \left|f(\text{ø}(t)) - p_n(\text{ø}(t))\right| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(\text{ø}(w))\frac{1}{t^{k+1}}\right| |dt|$$

وبالتالي

$$|R_n(z,f)| \leq I_1 + I_2. \#(10)$$

أولاً: سنقوم بتقدير العلاقة I_1، بإجراء التحويل $\hat{\imath} = \text{ø}(t)$ نحصل على

$$I_1 = \frac{1}{2\eth}\int_{\Gamma_R} |f(\hat{\imath}) - p_n(\hat{\imath})| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\text{ö}(z)]^k}{[\text{ö}(\hat{\imath})]^{k+1}}\right| |\text{ö}'(\hat{\imath})||d\hat{\imath}|.$$

وبالاستفادة من (4) و (12)

$$I_1 \leq \frac{c_4}{2\eth}\int_{\Gamma_R} |f(\hat{\imath}) - p_n(\hat{\imath})| \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\text{ö}(z)]^k}{[\text{ö}(\hat{\imath})]^{k+1}}\right| |d\hat{\imath}|$$

$$\leq \frac{c_5}{2\eth}\|f(\hat{\imath}) - p_n(\hat{\imath})\|_{L^{p,\text{ë}}(\Gamma_R)} \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[\text{ö}(z)]^k}{[\text{ö}(\hat{\imath})]^{k+1}}\right\|_{L^{q,\text{ë}}(\Gamma_R)}$$

$$= \frac{c_5}{2ð}\|f(î)-p_n(î)\|_{L^{p,ë}(\Gamma_R)}\left\|\frac{|ö(z)|^{n+1}}{|ö(î)|^{n+1}(|ö(î)|-|ö(z)|)}\right\|_{L^{q,ë}(\Gamma_R)}$$

$$= \frac{c_5}{2ð}E_n(f,K_R)_{p,ë}\left\|\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}\right\|_{L^{q,ë}(\Gamma_R)} = \frac{c_6}{2ð}E_n(f,K_R)_{p,ë}\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على تقدير لـ I_1 بالمتراجحة الآتية:

$$I_1 \le \frac{c_6}{2ð}E_n(f,K_R)_{p,ë}\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)}.\#(14)$$

الآن، سنقوم بتقدير العلاقة I_2، باستخدام العلاقة (10) نكتب

$$I_2 = \frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2ð}\int_{|ô|=r}\frac{ô^k}{t^{k+1}}\,F(ô,w)\,dô\right||dt|$$

$$\le \frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\left\{\frac{1}{2ð}\int_{|ô|=r}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{ô^k}{t^{k+1}}\right||F(ô,w)|\,|dô|\right\}|dt|$$

$$\le \frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\left\{\frac{1}{2ð}\int_{|ô|=r}\left|\frac{ô^{n+1}}{t^{n+1}(t-ô)}\right||F(ô,w)|\,|dô|\right\}|dt|$$

$$\le \frac{1}{2ð}\int_{|ô|=r}|ô|^{n+1}|F(ô,w)|\left\{\frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\frac{1}{|t|^{n+1}|t-ô|}|dt|\right\}|dô|$$

$$\le \frac{r^{n+1}}{2ðR^{n+1}}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|\left\{\frac{1}{2ð}\int_{|t|=R}\left|f(ø(t))-p_n(ø(t))\right|\frac{1}{|t-ô|}|dt|\right\}|dô|.$$

بتغير المتحول في التكامل الأخير وباستخدام العلاقات (4) و (11) و (12) نجد أن

$$I_2 \le \frac{r^{n+1}}{2ðR^{n+1}}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|\left\{\frac{1}{2ð}\int_{\Gamma_R}|f(î)-p_n(î)|\frac{|ö'(î)|}{|ö(î)-ö(z)|}|dî|\right\}|dô|$$

$$\le \frac{c_7\,r^{n+1}}{4ð^2R^{n+1}}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|\left\{\|f(î)-p_n(î)\|_{L^{p,ë}(\Gamma_R)}\left\|\frac{ö'(î)}{ö(î)-ö(z)}\right\|_{L^{q,ë}(\Gamma_R)}\right\}|dô|$$

$$\le \frac{c_8\,r^{n+1}}{4ð^2R^{n+1}}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|E_n(f,K_R)_{p,ë}\,\frac{1}{R-r}\,|dô|$$

$$= \frac{c_8\,r^{n+1}}{4ð^2R^{n+1}(R-r)}E_n(f,K_R)_{p,ë}\int_{|ô|=r}|F(ô,w)|\,|dô|$$

وبالاستفادة من العلاقة (11) نحصل على المتراجحة الآتية:

$$I_2 \le \frac{c_8\,r^{n+1}}{4ð^2R^{n+1}(R-r)}E_n(f,K_R)_{p,ë}\sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}}.\#(15)$$

بتعويض العلاقتين (14) و (15) في العلاقة (13) نجد أن:

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c_6}{2ð}E_n(f,K_R)_{p,ë}\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}(R-r)} + \frac{c_8\,r^{n+1}}{4ð^2R^{n+1}(R-r)}E_n(f,K_R)_{p,ë}\sqrt{\frac{r^2}{r^4-1}\ln\frac{r^2}{r^2-1}}\#(16)$$

بوضع $z \in K$ و $r = 1 + \frac{1}{n}$ في المتراجحة (16) نحصل على

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c_9}{R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p,ë} \;\; \sqrt{n \ln n}\,.$$

بالاستفادة من المبرهنة الأساسية في هذا البحث توصلنا إلى النتيجة الآتية والتي تعطينا تقديراً للباقي النوني لمتسلسلة فابير بدلالة معامل الملوسة في فضاء موري.

نتيجة (1) ليكن $1 < p < \infty$ و $0 < ë \le 1$. إذا كان $f \in E^{p,ë}(K_R)$، حيث $R > 1$ فإن الباقي النوني $R_n(z,f)$ لمتسلسلة فابير للدالة f يحقق المتراجحة الآتية:

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c}{R^{n+1}(R-1)}\; ù^r_{p,ë}\left(f_0^+, \frac{1}{n+1}\right)\; \sqrt{n \ln n}\,, \qquad z \in K.$$

حيث c ثابت لايتعلق بـ n.

البرهان: توصلنا في المبرهنة (1) إلى التقدير الآتي:

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c_9}{R^{n+1}(R-r)} E_n(f,K_R)_{p,ë} \;\; \sqrt{n \ln n} \;\#(17)$$

وبالاستفادة من [14] لدينا

$$\|f - p_n\|_{L^{p,ë}(\Gamma)} \le \; ù^r_{p,ë}\left(f_0^+, \frac{1}{n+1}\right).$$

حيث $f_0(w) = f\big(ø(Rw)\big)$

ومن العلاقة (3) نستنتج أن:

$$E_n(f,G)_{p,ë} \le c\; ù^r_{p,ë}\left(f_0^+, \frac{1}{n+1}\right)$$

بالتعويض في العلاقة (17) نجد أن:

$$|R_n(z,f)| \le \frac{c}{R^{n+1}(R-1)}\; ù^r_{p,ë}\left(f_0^+, \frac{1}{n+1}\right)\; \sqrt{n \ln n}$$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى تقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير في فضاءات موري –سميرنوف من أجل الدوال التحليلية في منطقة بسيطة الترابط ومحاطة بمنحنٍ ديني–أملس بدلالة التقريب الأفضل، ثم بدلالة معامل الملوسة في فضاءات موري. ونوصي بإتمام العمل بتقدير الباقي النوني لمتسلسلة فابير– لورنت في فضاءات موري–سميرنوف من أجل الدوال التحليلية في منطقة ثنائية الترابط محاطة بمنحنيين أملسين.

References:

[1] FABER, G. *Uber polynomische Entwickelungen*, Math. Ann., vol. 57, N°.3, 1903, 389-408.

[2] ISRAFILOV, D., TESTICI, A. *Approximation in Smirnov classes with variable exponent*, Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 60, N°.9, 2015, 1243-1253.

[3] ISRAFILOV, D., TESTICI, A. *Approximation in weighted Smirnov classes*, Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 60, N°.1, 2015, 45-58.

[4] TESTICI, A. *Some theorems of approximation theory in weighted smirnov classes with variable exponent*, Comput. Methods Funct. Theory, 2020, 39-61.

[5] JAFAROV, S. *Approximation by rational functions in Smirnov–Orlicz classes, J. Math. Anal. Appl.*, vol. 379, N°. 2, 2011, 870-877.

[6] ISRAFILOV, D., OKTAY, B., AKGUN, R. *Approximation in Smirnov–Orlicz classes*, Glasnik Matematicki, vol. 40, N°. 60, 2005, 87-102.

[7] OKTAY, B. *Maximal convergence of Faber series in Smirnov- Orlicz classes,* Journal of Mathematical Analysis, vol. 10, N°.6, 2019, 23-31.
[8] GURSEL, E., ISRAFILOV, D., AYDIN, E. *Maximal Convergence of Faber Series in Smirnov Classes with Variable Exponent*, Bull Braz Math Soc, 2018.
[9] MORREY, C. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations,* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 43, N°. 1, 1938, 126-166.
[10] ALMEIDA, A., SAMKO, S. *Appropximation in generalized Morrey spaces*, Georgian Math. J., vol. 25, N°.2, 2018, 155-168.
[11] ALMEIDA, A., SAMKO, S. *Approximation in Morrey spaces,* J. Funct. Anal., vol. 272, N°, 2017, 2392-2411.
[12] JAFAROV, S. *Direct and converse theorems of the theory of approximation in Morrey spaces*, Proceedings of IAM, vol. 9, N°. 1, 2020, 83-94.
[13] JAFAROV, S. *Derivatives of trigonometric polynomials and converse theorem of the constructive theory of functions in Morrey spaces*, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, vol. 5, N°.1, 2019, 137-145.
[14] ISRAFILOV, D., TOZMAN, N. *Approximation by polynomials in morrey-smirnov classes,* East J. Approx., vol. 14, N°.3, 2008, 255-269.
[15] KINJ, A., ALI, M., MAHMOUD, S. *Approximation by rational functions in Morrey-Smirnov classes,* Kuwait J. Sci., vol. 45, N°. 2, 2018, 1-7.
[16] KINJ, A., ALI, M., MAHMOUD, S. *Approximation Properties of de la Vallée-Poussin sums in Morrey spaces, SQU Journal for Science,* vol. 22, N°. 2, 2017, 89-95.
[17] KINJ, A., ALI, M., MAHMOUD, S. *Approximation of Complex Functions from Morrey space on Dini smooth Curves*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series, vol. 38, N°. 4, 2016, 61-73.
[18] KUFNER, A., JOHN, O., FUCIK, S. Functions Spaces, Leyden, The Netherland, Walter de Gruyter, 2012, 494.
[19] DEVORE, R., LORENTZ, G. Constructive Approximation, Springer Berlin, Heidelberg, 1993, 449.
[20] POMMERENKE, C. Boundary behavior of conformal maps, Springer-Verlage, 1992, 300.
[21] MASON, J., HANDSCOMB, D. Chebyshev polynomials, CRC press, 2003, 360.
[22] SUETIN, P. Series of Faber Polynomials, Amsterdam, Cordon and Breach Publishers, 1998, 320.
[23] BILALOV, B., GASYMOV, T., GULYEVA, A. *On the solvability of the Riemann boundary value problem in Morrey- Hardy classes,* Turkish Journal of Mathematics, vol. 40, 2016, 1085-1101.