Linear Convergence of the Proximal Point Algorithm for Finding Solutions of Structured Convex Optimization Problems in Hilbert Spaces.

Dr. Mohamed Soueycatt *
Dr. Boushra Abbas**
Baydaa Slameh***

(Received 16 / 1 / 2022. Accepted 15 / 5 /2022)

□ ABSTRACT □

The aim of this research to prove that the linear convergence towards an optimal solution to a structured convex optimization problem in real infinite dimensional Hilbert spaces is in good agreement with the proximal point algorithm. As we show that the proximal point algorithm which is an iterative procedure produces a sequence of better a pproximations to the fixed point of the resolvent operator. And we prove that this sequence is bounded and converges globally towards an optimal solution to the problem of structured convex optimizations and we also prove linear convergence towards the optimal solution of the problem.

Keywords: Proximal point algorithm, maximal monotone operator, resolvent operator, linear rate convergence.

*Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria. soueycatt55@hotmail.com
** Assistant Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria. abbas.boushra@yahoo.com
*** Master student, Department of mathematics, Faculty of Sciences,Tishreen University , Lattakia , Syria. baydaaslameh08@gmail.com

التقارب الخطي لخوارزمية النقطة الأقرب في إيجاد الحلول لمسائل أمثليات محدبة مركبة في فضاءات هلبرت

د. محمد سويقات *

د. بشرى عباس **

بيداء سلامة ***

(تاريخ الإيداع 16 / 1 / 2022. قُبِل للنشر في 15 / 5 /2022)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث هو إثبات أن التقارب الخطي نحو حل أمثل لمسألة أمثليات محدبة مركبة في فضاءات هلبرت حقيقية غير منتهية الأبعاد يتوافق بشكل جيد مع خوارزمية النقطة الأقرب. إذ نبين أن خوارزمية النقطة الأقرب و هي إجراء تكراري ينتج متتالية من تقريبات أفضل للنقطة الثابتة لمؤثر الحال. و نقوم بإثبات أن هذه المتتالية محدودة و تتقارب تقارباً شاملاً نحو حل أمثل لمسألة الأمثليات المحدبة المركبة و نثبت أيضاً التقارب الخطي نحو الحل الأمثل للمسألة.

الكلمات المفتاحية: خوارزمية النقطة الأقرب، مؤثر مضطرد أعظمي، المؤثر الحال، التقارب بنسبة خطية.

* أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. sueycatt55@hotmail.com

** مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. abbas.boushra@yahoo.com

***طالبة ماجستير – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.baydaaslameh08@gmail.com

مقدمة:

علم الأمثليات هو علم يبحث في إيجاد القيم الصغرى و العظمى لتوابع معينة ضمن ضوابط معينة، وتأتي أهمية هذا العلم من كون النماذج الرياضية للعديد من التطبيقات في مجالات نظرية وعملية متنوعة تصاغ على شكل مسائل أمثليات [1,2,3,8,10] . تشكل مسائل الأمثليات المحدبة صفاً من علم الأمثليات ذا أهمية كبيرة من حيث تطبيقاته المتنوعة، إذ تُعنَى مسائل الأمثليات المحدبة بإيجاد النقاط الصغرى لدالة هدف محدبة.

تلعب المؤثرات المضطردة الأعظمية ومسألة إيجاد أصفار لهذه المؤثرات دوراً هاماً في علم الأمثليات المحدبة، إذ يمكن صياغة مسألة أمثليات محدبة على شكل مسألة إيجاد أصفار لمؤثر تحت التفاضل الموافق، وهو مؤثر مضطرد أعظمي.

تعد خوارزمية النقطة الأقرب إحدى أهم الطرائق و أكثرها تطبيقاً من الناحيتين النظرية و العملية من أجل حل مسألة إيجاد أصفار مؤثر مضطرد أعظمي، كما تم تطبيق هذه الخوارزمية من أجل حل مسألة إيجاد النقاط الصغرى لتابع محدب و نصف مستمر من الأدنى و خاص على سبيل المثال [4,5].

قمنا في هذا المقال بتطبيق خوارزمية النقطة الأقرب لإيجاد الحلول لمسألة أمثليات محدبة مركبة حيث أن تابع الهدف فيها هو عبارة عن مجموع لتابعين أحدهما محدب ونصف مستمر من الأدنى وخاص و الآخر محدب و قابل للاشتقاق. تشكل هذه المسألة النموذج الرياضي لمجموعة واسعة من التطبيقات العلمية مثل استعادة الإشارة ومسائل المربعات الصغرى المقيدة و مسائل تنظيم فورييه وغيرها [4,6,7] .

أهمية البحث أوهدافه:

يهدف هذا البحث إلى تطبيق خوارزمية النقطة الأقرب لحل مسألة أمثليات محدبة مركبة في فضاء هلبرت حقيقي غير منتهي الأبعاد، إذ نقوم بإثبات أن المتتالية الناتجة تتقارب تقارباً شاملاً نحو حل أمثل لهذه المسألة و تحقق نسبة تقارب خطية.

تكمن أهمية البحث من خلال تطبيقاته المتنوعة ذلك أن مسائل الأمثليات في فضاءات هلبرت الحقيقية تشكل النموذج الرياضي لعدد كبير من التطبيقات المتنوعة كالتحكم الأمثل و المعادلات التفاضلية الجزئية و سيكون له أهمية في دراسة و تقديم أبحاث جديدة.

طرائق البحث ومواده:

يلعب مفهوم المؤثر المضطرد الأعظمي ومسألة إيجاد أصفاره دوراً أساسياً في بحثنا، لذا نقدم أهم التعاريف والمفاهيم المتعلقة بالمؤثر المضطرد الأعظمي ومسألة إيجاد أصفار له، كذلك نقدم شرحاً حول خوارزمية النقطة الأقرب باعتبارها الخوارزمية الأساسية التي نستخدمها في هذا المقال.

1. تعاريف ومفاهيم أساسية :

نقدم في هذه الفقرة بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالمسألة المطروحة، ولمعرفة المزيد حول هذه المفاهيم يمكن العودة إلى [6,7,9,13,14].

تعريف : ليكن H فضاء هلبرت حقيقي مع النظيم $\|.\|$ و الجداء الداخلي $<,>$ ،

و ليكن $f: \mathrm{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعاً ما، و $T: \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ مؤثرا ما .

− يقال عن مجموعة $S \subseteq \mathrm{H}$ إنها محدبة convex set إذا كان لكل $x, y \in S$ ولكل عدد

$\alpha \in [0,1]$ يتحقق الشرط الآتي : $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$

- يعرف المجال الفعلي effective domain للتابع f بالشكل الآتي:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathrm{H} \ ; \ f(x) < +\infty\}$$

- يقال عن f إنه تابع خاص proper function إذا كان $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.
- يعرف فوق البيان epi-graph للتابع f ويرمز له بالرمز $\operatorname{epi} f$ بالشكل:

$$\operatorname{epi} f = \{(x,\alpha) \in \mathrm{H} \times \mathbb{R} \ ; \ f(x) \leq \alpha\}$$

- يقال عن التابع f إنه تابع محدب convex function إذا كان لكل $x, y \in \mathrm{H}$ ولكل عدد $\alpha \in [0,1]$ يتحقق الآتي: $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$
- يقال عن f إنه تابع نصف مستمر من الأدنى lower semi-continuous function إذا تحقق الشرط الآتي: $\operatorname{liminf}_{y \to x} f(y) \geq f(x) \ ; x, y \in H$

ملاحظة:

f محدب إذا وفقط إذا كان فوق بيانه $\operatorname{epi} f$ مجموعة محدبة.

f نصف مستمر من الأدنى إذا وفقط إذا كان فوق بيانه $\operatorname{epi} f$ مجموعة مغلقة closed set.

- يقال عن النقطة $\bar{x} \in \mathrm{H}$ إنها نقطة صغرى minimal point للتابع $f: \mathrm{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ إذا كان:

$$\forall x \in \mathrm{H} \ : \ f(x) \geq f(\bar{x})$$

- يقال عن المؤثر $\mathrm{T}: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ إنه وحيد القيمة إذا كان يقابل نقطة من H بنقطة وحيدة من H.
- يعرف بيان المؤثر T الوحيد القيمة بالشكل: $\operatorname{grap} \mathrm{T} = \{ (x,y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H} \ ; y = \mathrm{T}x\}$
- يقال عن $\mathrm{T}: \mathrm{H} \to 2^{\mathrm{H}}$ إنه متعدد القيم إذا كان يقابل نقطة من H بمجموعة جزئية من H.
- يعرف بيان المؤثر المتعدد القيم بالشكل: $\operatorname{grap} \mathrm{T} = \{ (x,y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H} ; y \in \mathrm{T}x \}$
- ويعرف مجاله الفعلي بأنه مجموعة النقاط: $\operatorname{dom} \mathrm{T} = \{ x \in \mathrm{H} \ ; \mathrm{T}x \neq \emptyset \}$
- تعرف مجموعة أصفار المؤثر T بأنها مجموعة النقاط: $\operatorname{Zero}(\mathrm{T}) = \{ x \in \mathrm{H} \ ; 0 \in \mathrm{T}x\}$
- يقال عن المؤثر المتعدد القيم إنه مضطرد (monotone operator) إذا كان :

$$\forall \ (x,y) \, , (u,v) \in \operatorname{grap} \mathrm{T} \implies \langle x-u, y-v \rangle \geq 0 \qquad (1)$$

- و يقال عن المؤثر المضطرد إنه أعظمي (maximal monotone) إذا كان بيانه غير محتوى تماماً ببيان أي مؤثر مضطرد آخر.
- يقال عن المؤثر الوحيد القيمة T إنه تقليص (nonexpansive) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \ x, y \in \operatorname{dom} \mathrm{T} : \| \mathrm{T}x - \mathrm{T}y \| \leq \| x - y \| \qquad (2)$$

- يقال عن المؤثر T^{-1} إنه يحقق شرط ليبشتز (Lipschitz)إذا وجد عدد موجب $a > 0$ بحيث يتحقق الآتي:

$$\forall \ \mathrm{T}^{-1} y = x \, , \mathrm{T}^{-1} v = u \ ; \ \| x - u \| \leq a \, \| y - v \| \qquad (3)$$

- يعرف المؤثر الحال لمؤثر مضطرد أعظمي (resolvent of T) بالشكل:

$\mathrm{J}_c(x) = (\mathrm{I} + c\mathrm{T})^{-1}(x)$ وهو مؤثر وحيد القيمة وتقليص. حيث I المؤثر المطابق .

تعريف مؤثر تحت التفاضل (sub-differential operator) :

ليكن $f: \mathrm{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعاً محدباً ونصف مستمر من الأدنى وخاص. يعرف مؤثر تحت التفاضل للتابع f ويرمز له بالرمز ∂f بالشكل الآتي:

$$\partial f(x) = \{ u \in \mathrm{H} : f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle \ ; y \in \mathrm{H} \}$$

و يعد من المؤثرات المضطردة أعظمياً.

تعد مسألة إيجاد أصفار مؤثر مضطرد أعظمي من المسائل الهامة من الناحيتين النظرية والعملية. نقدم فيما يلي فكرة حول هذه المسألة:

– ليكن $T: H \to H$ مؤثراً مضطرداً أعظمياً ، تُعنَى مسألة إيجاد أصفار مؤثر مضطرد أعظمي بإيجاد العناصر $x \in H$ التي تحقق:

$$0 \in Tx \qquad (4)$$

ترتبط مسألة إيجاد النقاط الصغرى لتابع محدب بمسألة إيجاد أصفار مؤثر تحت التفاضل له، وذلك من خلال مبرهنة فيرما [4] والتي نذكرها فيما يلي:

مبرهنة فيرما : ليكن f تابعاً محدباً ونصف مستمر من الأدنى وخاص. عندئذ:

$$\forall\, x \in H: \quad x \in Argmin\ f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x)$$

ومن كون مؤثر تحت التفاضل مضطرد أعظمي، إذاً نجد أن إيجاد الحلول لمسائل الأمثليات المحدبة يؤول إلى إيجاد الحلول لمسائل إيجاد أصفار مؤثرات مضطردة أعظمية موافقة. لذلك كان لا بد من الاهتمام بالمؤثرات المضطردة الأعظمية ومسائل إيجاد أصفارها وطرائق إيجاد الحلول لهذه المسائل.

قدم Minty في عام 1962 [11] طريقة من أجل إيجاد الحلول للمسألة (4) ، تعتمد هذه الطريقة على أنه في أي فضاء هلبرت، من أجل كل عنصر $x \in H$ وكل عدد $c > 0$ توجد نقطة وحيدة $u \in H$ تحقق:

$$x - u \in cTu \quad \Leftrightarrow x \in cTu + u$$

إذن حسب Minty تؤول المسألة (4) إلى مسألة إيجاد النقطة الثابتة للمؤثر الحال. أي أن:

$$J_{cT}(x) = x \iff 0 \in Tx \ ; \ \forall\, x \in H \qquad (5)$$

وبالتالي تكون x صفراً للمؤثر المضطرد الأعظمي T إذا وفقط إذا كانت x نقطة ثابتة للمؤثر الحال J_{cT}.

اقترح روكافولار في عام 1976 [12] خوارزمية النقطة الأقرب، و هي طريقة تكرارية لإيجاد الحلول للمسألة (4) أو ما يكافئها إيجاد النقاط الثابتة للمؤثر الحال J_{cT} .

خوارزمية النقطة الأقرب هي طريقة تكرارية تبدأ من نقطة مفروضة كيفية $x^0 \in H$ وتنتج متتالية $\{x^k\}$ في H من العلاقات الآتية:

$$x^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(x^k) \qquad (6)$$

حيث $c_k > 0$; $\{c_k\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة.

إذا كان $T = \partial f$ مؤثر تحت التفاضل لتابع محدب ونصف مستمر من الأدنى وخاص، عندئذ تصبح العلاقة (6) بالشكل الآتي:

$$x^{k+1} = argmin \left\{ f(x) + \frac{1}{2c_k} \| x - x^k \|^2 \right\} \qquad (7)$$

أثبت روكافولار [12] أن المتتالية الناتجة من العلاقات (6) تتقارب بضعف نحو صفر للمؤثر T بمعنى أنه يكون:

$$\lim_{k\to\infty} \| Tx^k - Tx^* \| = 0$$

كما أثبت روكافولار [12] أن المتتالية الناتجة من (6) تتقارب بقوة نحو صفر للمؤثر T بمعنى أنه يكون: $\lim\limits_{k\to\infty} \| x^k - x^* \| = 0$

وذلك تحت شرط أن يكون المؤثر T مضطرد بقوة (strongly monotone) و متتالية الأعداد الموجبة محدودة بعيداً عن الصفر.

كذلك قام روكافولار في المبرهنة 2.1 ,[12] بإثبات أنه إذا كان المؤثر T^{-1} ليبشتز مستمر عند الصفر عندئذ تتقارب المتتالية $\{x^k\}$ الناتجة من العلاقات (6) بنسبة خطية نحو الحل المطلوب أي أن:

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq \theta_k \| x^k - x^* \| \quad ; 0 < \theta_k < 1$$

قام غولار في المبرهنة 3.1 ,[5] بدراسة المسألة $\min_{x \in H} f(x)$ حيثُ $f: H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ محدب و نصف مستمر من الأدنى و خاص، وقام بإثبات أنه إذا كان $\sigma_k = \sum_1^k c_k \; ; \sigma_k \to \infty$ فإن:

$$f(x^k) - f^* = o\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)$$

قام الباحثان Yuan,Tao في المبرهنة3.5 , [15] بإثبات أنه إذا كان T^{-1} ليبشتز مستمر عند الصفر وكانت $\alpha > 0$ و $(c_k \geq k > 0)$;$\{c_k\}$ محدودة بعيداً عن الصفر، عندئذٍ تتقارب المتتالية الناتجة من خوارزمية النقطة الأقرب بنسبة خطية نحو صفر لمؤثر مضطرد أعظمي.

النتائج والمناقشة:

المسألة المطروحة هي إيجاد النقطة $x \in H$ التي تكون حلاً لمسألة أمثليات من الشكل الآتي:

$$\min_{x \in H} \{ f_1(x) + f_2(x) \} \qquad (P)$$

باعتبار أن $f_1 : H \to]-\infty, +\infty]$ تابع محدب ونصف مستمر من الأدنى وخاص؛ و $f_2 : H \to \mathbb{R}$ تابع محدب وقابل للاشتقاق.

حسب مبرهنة فيرما نجد أن حل المسألة المطروحة يؤول إلى حل المسألة المكافئة الآتية:

$$0 \in \partial f_1(x) + \nabla f_2(x) \qquad (8)$$

حيث $\partial f_1 : H \to 2^H$ مؤثر مضطرد أعظمي، و $\nabla f_2 : H \to H$ مؤثر ليبشتز مستمر(و ذلك من خواص مؤثر التدرج gradient لتابع محدب وقابل للاشتقاق أنه ليبشتز مستمر).

من أجل $x \in H$ ، لنرمز بـ $\partial f_1(x) = T_1 x$ و $\nabla f_2(x) = T_2 x$ وبالتالي يؤول حل المسألة (8) إلى إيجاد أصفار المؤثرين الآتية :

$$0 \in T_1 x + T_2 x \quad ; x \in H \qquad (9)$$

نرمز لمجموعة حلول المسألة (9) بالرمز G، أي أن:

$$G = \{ x^* \in H : 0 \in T_1 x^* + T_2 x^* \}$$

قام الباحثان Combettes , Wajs في [4] باستخدام طريقة التجزئة الأقرب الأمامية الخلفية (Proximal Forward-Backward Splitting) من أجل إيجاد الحلول للمسألة (P) وهي طريقة تكرارية على النحو الآتي:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \left(prox_{\gamma_k f_1}\left(x^k - \gamma_k(\nabla f_2(x^k) + b_k) \right) + a_k - x^k \right) \qquad (10)$$

وقاما بالتوصل إلى أن المتتالية الناتجة من (10) تتقارب بضعف نحو حل للمسألة (P) و أنها تتقارب بقوة تحت الشرط الآتي : $\lim_{x \to \infty} d_G(x^k) = 0$ حيث ترمز G إلى مجموعة حلول المسألة (P) و تشير $d_G(x^k)$ إلى المسافة بين حدود المتتالية و بين المجموعة G .

والسؤال المطروح هو حل المسألة (P) باستخدام خوارزمية النقطة الأقرب و تحقيق نسبة تقارب خطية نحو الحل الأمثل . في هذا المقال نقوم بالإجابة على هذا السؤال ، مما سبق نلاحظ أنه إذا كان لمؤثر الحال المتعلق بالمؤثرين المرافقين

نقطة ثابتة تكون هذه النقطة صفر لمجموع المؤثرين المرافقين و بالتالي حسب فيرما تكون هذه النقطة حل أمثل للمسألة المطروحة و قمنا بإثبات ذلك بالاستفادة من [4] ومن المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة :

ليكن H فضاء هلبرت و $x \in \mathrm{H}, \mathrm{c} > 0$ عندئذٍ تكون $x \in \mathrm{G}$ أي حل للمسألة (P) إذا و فقط إذا كانت

$$x = \mathrm{J}_{\mathrm{cT}_1}(x - \mathrm{cT}_2 x) = (\mathrm{I} + \mathrm{cT}_1)^{-1}(x - \mathrm{cT}_2 x) \qquad (11)$$

البرهان :

إذا كانت $x \in \mathrm{G}$ فإن : $0 \in \mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 x$ و باعتبار أن T_2 مؤثر وحيد القيمة عندئذٍ من تعريف المؤثر المتعدد القيم يكون لدينا

$(0 - \mathrm{T}_2 x) \in \mathrm{T}_1 x$ و بالتالي $(-\mathrm{cT}_2 x) \in c\mathrm{T}_2 x\,; c > 0$ و بالتالي بإضافة و طرح العنصر x من العنصر $-c\mathrm{T}_2 x$ نحصل على $(x - \mathrm{cT}_2 x) \in x + \mathrm{cT}_1 x$

و بالتالي $(x - \mathrm{cT}_2 x) \in (\mathrm{I} + \mathrm{cT}_1)x$ و بما أن الصورة العكسية لمؤثر متعدد القيم هي مؤثر وحيد القيمة الأمر الذي يعني $x = (\mathrm{I} + \mathrm{cT}_1)^{-1}(x - \mathrm{cT}_2 x)$ و الأمر الذي يعني أن x هي نقطة ثابتة لمؤثر الحال المتعلق بمجموع المؤثرين $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ أي أن $x = \mathrm{J}_{\mathrm{cT}_1}(x - \mathrm{cT}_2 x)$.

الآن إذا كانت $x \in \mathrm{H}$ نقطة ثابتة لمؤثر الحال الأمر الذي يعني $x = \mathrm{J}_{\mathrm{cT}_1}(x - \mathrm{cT}_2 x)$ و بالتالي

$x = (\mathrm{I} + \mathrm{cT}_1)^{-1}(x - \mathrm{cT}_2 x)$ و بالتالي $(x - \mathrm{cT}_2 x) \in (\mathrm{I} + \mathrm{cT}_1)x$ و بالتالي

$(x - \mathrm{cT}_2 x) \in x + \mathrm{cT}_1 x$ و بالتالي $(x - x) \in c(\mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 x)\,; c > 0$ و بالتالي

$0 \in \mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 x$ الأمر الذي يعني $x \in \mathrm{G}$ أي حل للمسألة (P) .

و بالتالي حسب المبرهنة المساعدة السابقة و مبرهنة فيرما فإن النقطة x هي حل أمثل للمسألة المطروحة حيثُ بالعودة إلى فرضيات المسألة $\mathrm{T}_1 = \partial f_1 \;, \mathrm{T}_2 = \nabla f_1$ نجد :

$$0 \in \partial f_1(x) + \nabla f_2(x) \iff x \in argmin\left(f_1(x) + f_2(x)\right)$$

و ينتج من ذلك إمكانية حل المسألة (P) من خلال خوارزمية النقطة الأقرب و ذلك باستخدام العلاقة التكرارية التالية:

$$x^{k+1} = \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k) \quad ; c_k > 0 \qquad (12)$$

$$\iff x^{k+1} = (\mathrm{I} + \mathrm{c_k T_1})^{-1}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k)$$

بدايةً نبين وجود علاقة بين المتتالية $\{x^k\}$ الناتجة من العلاقات (12) و مجموعة الحلول المسألة (9) و هي خاصية مهمة نضمن من خلالها محدودية المتتالية و التقارب الشامل لها نحو الحل المطلوب.

مبرهنة 1.

لتكن $\{x^k\}$ متتالية ناتجة من العلاقات (12) و بفرض $\{c_k\}$ متتالية متزايدة تحقق $(c_k \uparrow c_\infty \le \infty)$ و لتكن $x^* \in \mathrm{G}$ حل للمسألة (9) عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \le \| x^k - x^* \|^2 + c_k(-2\beta + c_k) \| \mathrm{T}_2 x^k - \mathrm{T}_2 x^* \|^2 \quad (13)$$

البرهان :

لدينا : لدينا من العلاقة (12) : $x^{k+1} = \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k)$

و بما أن x^* هي حل للمسألة (9) بالتالي هي نقطة ثابتة لمؤثر الحال (11) أي تحقق

$x^* = \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^* - \mathrm{c_k T_2} x^*)$ و بالتالي نجد :

$$\| x^{k+1} - x^* \| = \| \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k) - \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^* - \mathrm{c_k T_2} x^*) \| \quad (14)$$

و بما أن $\mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}$ مؤثر تقليص فإن الطرف الأيمن في (14) يحقق الشرط (2) أي :

$$\| \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k) - \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^* - \mathrm{c_k T_2} x^*) \| \quad \leq \; \| (x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k) - (x^* - \mathrm{c_k T_2} x^*) \| \qquad (15)$$

بتعويض (15) في العلاقة (14) نجد:

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq \| (x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k) - (x^* - \mathrm{c_k T_2} x^*) \|$$

و منه نجد : $\| x^{k+1} - x^* \| \leq \| (x^k - x^*) - c_k(\mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^*) \|$

الآن بتربيع الطرفين للعلاقة الأخيرة و حسب خواص الجداء الداخلي نجد :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2 - 2c_k < x^k - x^*, \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* > + \; {c_k}^2 \| \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* \|^2 \qquad (16)$$

بما أن $\mathrm{T_2} x = \nabla f_2(x)$ هو مؤثر ليبشتز مستمر بثابت $\frac{1}{\beta} \in]0.+\infty[$ أي يحقق الشرط :

$$\| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \| \leq \frac{1}{\beta} \| x - \acute{x} \| \quad ; \forall \, x, \acute{x} \in \mathrm{H}$$

نضرب الطرفين بالحد : $\beta \, \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \|$ نجد :

$$\beta \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \|^2 \leq \| x - \acute{x} \| \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \| \qquad (17)$$

بما أن الطرف الأيمن للعلاقة (17) يحقق متراجحة كوشي _ شوارتز نجد :

$$< x - \acute{x} \, , \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} > \leq \; \| x - \acute{x} \| \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \| \qquad (18)$$

بطرح العلاقتين (17) و (18) طرفا لطرف نجد :

$$\beta \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \|^2 - < x - \acute{x} \, , \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} > \; \leq 0$$

و منه : $\beta \| \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} \|^2 \leq < x - \acute{x}, \mathrm{T_2} x - \mathrm{T_2} \acute{x} > \qquad (19)$

بأخذ $\acute{x} = x^*$, $x = x^k$ في (19) و بضربها بالعدد $-2\mathrm{c_k}$ نجد :

$$-2c_k \beta \| \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* \|^2 \geq \; -2c_k \; < x^k - x^*, \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* > \qquad (20)$$

الآن بتعويض العلاقة (20) في العلاقة (16) نجد :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2 - 2\beta c_k \| \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* \|^2 + {c_k}^2 \| \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* \|^2$$

و منه نحصل على العلاقة (13) التالية :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2 + c_k \, (-2\beta + c_k) \| \mathrm{T_2} x^k - \mathrm{T_2} x^* \|^2$$

و هو المطلوب.

من العلاقة (13) التي أثبتناها في المبرهنة 1 نستنتج أن المتتالية الناتجة من خوارزمية النقطة الأقرب محدودة في فضاء هلبرت بالتالي لها نقطة تراكم تبولوجياً، نرمز لهذه النقطة x^∞ و سنثبت أن المتتالية $\{x^k\}$ تتقارب تقارباً شاملاً نحو هذه النقطة التي ستكون نقطة حل أمثل للمسألة (9) و ذلك من خلال المبرهنة التالية.

مبرهنة 2.

لتكن $\{x^k\}$ متتالية ناتجة من العلاقة (12) و بفرض $\{c_k\}$ متتالية محدودة بعيداً عن الصفر أي تحقق ($\mathrm{c_k} \geq \mathrm{k} > 0$) ، عندئذٍ يتحقق التقارب الشامل للمتتالية نحو $x^* \in \mathrm{G}$.

البرهان :

نأخذ متتالية جزئية $\{x^{\mathrm{k_j}}\}$ من المتتالية $\{x^{\mathrm{k}}\}$ متقاربة نحو x^∞ أي تحقق :

$\lim_{j\to\infty} \| x^{\mathrm{k_j}} - x^\infty \| = 0 \qquad (21)$ و لدينا من العلاقة التكرارية التي تنتج المتتالية التالية $x^{k+1} = \mathrm{J}_{\mathrm{c_k T_1}}(x^k - \mathrm{c_k T_2} x^k)$ نجد المتتالية الجزئية هي :

$$x^{\mathrm{k_{j+1}}} = \mathrm{J}_{\mathrm{c_{k_j} T_1}} \left(x^{\mathrm{k_j}} - \mathrm{c_{k_j}} \mathrm{T_2} x^{\mathrm{k_j}} \right) = \; \left(\mathrm{I} + \; \mathrm{c_{k_j}} \mathrm{T_1} \right)^{-1} \left(x^{\mathrm{k_j}} - \; \mathrm{c_{k_j}} \mathrm{T_2} x^{\mathrm{k_j}} \right)$$

لسهولة الحل نرمز $\tilde{x}^{k_j} = J_{c_{k_j}T_1}\left(x^{k_j} - c_{k_j}T_2x^{k_j}\right)$ و بالتالي نجد :

$\tilde{x}^{k_j} = \left(I + c_{k_j}T_1\right)^{-1}\left(x^{k_j} - c_{k_j}T_2x^{k_j}\right)$ و بالتالي: $(x^{k_j} - c_{k_j}T_2x^{k_j}) \in (I + c_{k_j}T_1)(\tilde{x}^{k_j})$

و بالتالي: $(x^{k_j} - c_{k_j}T_2x^{k_j}) \in \tilde{x}^{k_j} + c_{k_j}T_1\tilde{x}^{k_j}$ و بالتالي

$(x^{k_j} - \tilde{x}^{k_j} - c_{k_j}T_2x^{k_j}) \in c_{k_j}T_1\tilde{x}^{k_j}$ و بالتالي

$$\left(c_{k_j}^{-1}\left(x^{k_j} - \tilde{x}^{k_j}\right) - T_2x^{k_j}\right) \in T_1\tilde{x}^{k_j} \qquad (22)$$ و بالتالي

بحسب كون المؤثر T_1 مضطرد وبأخذ $v \in T_1u$ من أجل كل $u, v \in H$ و من (22) نجد :

$$< u - \tilde{x}^{k_j}, v - \left(c_{k_j}^{-1}\left(x^{k_j} - \tilde{x}^{k_j}\right) - T_2x^{k_j}\right) > \geq 0 \qquad (23)$$

الآن بأخذ النهاية $j \to \infty$ لطرفي المتراجحة (23) و من (21) نجد :

$$\lim_{j\to\infty} < u - \tilde{x}^{k_j}, v - \left(c_{k_j}^{-1}\left(x^{k_j} - \tilde{x}^{k_j}\right) - T_2x^{k_j}\right) > \geq 0$$

و بالتالي : $$< u - x^{\infty}, v - (c_{\infty}^{-1}(x^{\infty} - x^{\infty}) - T_2x^{\infty}) > \geq 0$$

و بالتالي : $$< u - x^{\infty}, v - (0 - T_2x^{\infty}) > \geq 0$$

و بما أن المؤثر T_1 أعظمي نجد أن :

$$(0 - T_2x^{\infty}) \in T_1x^{\infty} \Leftrightarrow 0 \in T_1x^{\infty} + T_2x^{\infty} \qquad (24)$$

و منه x^{∞} نقطة التراكم للمتتالية $\{x^k\}$ هي حل المسألة (9) .

الآن سنبرهن أن نقطة التراكم x^{∞} هي نفسها x^* الحل الأمثل للمسألة (9) و ذلك بأخذ النهاية التالية في العلاقة (13) نجد:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2 + c_k(c_k - 2\beta)\| T_2x^k - T_2x^* \|^2\right)$$

و بالتالي $$\| x^{\infty} - x^* \|^2 \leq \| x^{\infty} - x^* \|^2 + c_{\infty}(c_{\infty} - 2\beta)\| T_2x^{\infty} - T_2x^* \|^2$$

و بالتالي $0 \leq c_{\infty}(c_{\infty} - 2\beta)\| T_2x^{\infty} - T_2x^* \|^2$ وبالتالي الأمر الذي يعني

$$\| T_2x^{\infty} - T_2x^* \|^2 = 0 \Leftrightarrow T_2x^{\infty} = T_2x^*$$

و منه و بالعودة للعلاقة (24) نجد المتتالية لا يمكن أن يكون لها أكثر من نقطة تراكم واحدة التي هي بدورها الحل الأمثل للمسألة (9) وبالتالي تتقارب المتتالية تقارباً شاملاً نحو هذه النقطة و هو المطلوب .

في المبرهنة الآتية، نثبت أن خوارزمية النقطة الأقرب تتقارب بنسبة خطية نحو الحل الأمثل للمسألة (9) ضمن شرط أن يكون T_1^{-1} ليبشتز مستمر عند النقطة $(-T_2x^*)$.

مبرهنة 3.

لتكن $x^* \in G$ ، وبفرض أن T_1^{-1} ليبشتز مستمر عند النقطة $(-T_2x^*)$ وأن $a > 0$ ، و بفرض متتالية الأعداد الحقيقية الموجبة $\{c_k\}$ تحقق $0 < c_k < 1$ و ليكن:

$$\mu_k = \sqrt{1 + \frac{(2\beta - c_k)(c_k - a)^2}{ac_k}} > 1 \;; a > c_k \text{ ، } \beta > \frac{c_k}{2}$$

عندئذ تتقارب $\{x^k\}$ بنسبة خطية نحو x^* أي يوجد $\hat{k} > 0$ يحقق من أجل كل $k \geq \hat{k}$ الآتي :

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq \theta_k \| x^k - x^* \| \;; 0 < \theta_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2\beta - c_k)(c_k - a)^2}{ac_k}}} < 1$$

البرهان :

بما أن x^* حل للمسألة (9) أي تحقق $0 \in T_1x^* + T_2x^*$ و منه $(-T_2x^*) \in T_1x^*$ بالتالي

و حسب العلاقة (12) نجد : $T_1^{-1}(-T_2x^*) = x^* \qquad (25)$

$x^{k+1} = (I + c_kT_1)^{-1}(x^k - c_kT_2x^k)$ و بالتالي $(x^k - c_kT_2x^k) \in (I + c_kT_1)x^{k+1}$

و بالتالي $(x^k - c_kT_2x^k) \in x^{k+1} + c_kT_1x^{k+1}$ و بالتالي

$(x^k - c_kT_2x^k - x^{k+1}) \in c_kT_1x^{k+1}$ بالتالي $(c_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) - T_2x^k) \in T_1x^{k+1}$

و بالتالي $T_1^{-1}(c_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) - T_2x^k) = x^{k+1} \qquad (26)$

من العلاقتين (25) و (26) و بما أن T_1^{-1} ليبشتز مستمر عند النقطة $(-T_2x^*)$ أي يحقق الشرط (3) و من أجل كل $k \geq 0$ تتحقق العلاقة الآتية :

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq a \| (c_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) - T_2x^k) - (-T_2x^*) \|$$

و بالتالي $\| x^{k+1} - x^* \| \leq a \| c_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) - (T_2x^k - T_2x^*) \|$

بتربيع الطرفين و بالاستفادة أن الطرف الأيمن متطابقة تربيعية نجد :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq a^2\left(\frac{1}{c_k^2} \| x^k - x^{k+1} \|^2 - \frac{2}{c_k} < x^k - x^{k+1}, T_2x^k - T_2x^* > + \| T_2x^k - T_2x^* \|^2\right)$$

و بالتالي $\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \frac{a^2}{c_k^2} \| x^k - x^{k+1} \|^2 + a^2 \| T_2x^k - T_2x^* \|^2$

نقسم طريفي العلاقة الأخيرة على a^2 و نجذر الطرفين نجد :

$$\frac{1}{a} \| x^{k+1} - x^* \| \leq \frac{1}{c_k} \| x^k - x^{k+1} \| + \| T_2x^k - T_2x^* \| \qquad (27)$$

بالاستفادة من خواص النظيم و متراجحة المثلث على الحد $\| x^k - x^{k+1} \|$ في العلاقة (27) نجد:

$$\| x^k - x^{k+1} \| = \| x^{k+1} - x^k \| \leq \| x^{k+1} - x^* \| + \| x^* - x^k \| \qquad (28)$$

نعوض (28) في العلاقة (27) نجد :

$$\frac{1}{a} \| x^{k+1} - x^* \| \leq \frac{1}{c_k} \| x^{k+1} - x^* \| + \frac{1}{c_k} \| x^* - x^k \| + \| T_2x^k - T_2x^* \|$$

بالتالي نحصل على $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k}\right) \| x^{k+1} - x^* \| - \frac{1}{c_k} \| x^* - x^k \| \leq \| T_2x^k - T_2x^* \|$

بما أن $a > 0, 0 < c_k < 1$ فإن : $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k}\right) \| x^{k+1} - x^* \| \leq \| T_2x^k - T_2x^* \| \quad (29)$

بتربيع طرفي العلاقة (29) و تعويضها بالعلاقة (13) و من اجل كل $k \geq \hat{k}$ نجد :

$$\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2 + c_k(c_k - 2\beta)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k}\right)^2 \| x^{k+1} - x^* \|^2$$

و بالتالي $\left(1 + (2\beta c_k - c_k^2)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k}\right)^2\right) \| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \| x^k - x^* \|^2$

و بالتالي $\| x^{k+1} - x^* \|^2 \leq \frac{1}{1 + (2c_k\beta - c_k^2)(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k})^2} \| x^k - x^* \|^2$

و بالتالي $\| x^{k+1} - x^* \| \leq \frac{1}{\sqrt{1 + (2c_k\beta - c_k^2)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c_k}\right)^2}} \| x^k - x^* \|$

نحصل على: $\| x^{k+1} - x^* \| \leq \theta_k \| x^k - x^* \|; 0 < \theta_k < 1, for\ all\ k \geq \hat{k}$

و هو المطلوب .

الاستنتاجات والتوصيات:

درسنا في هذا المقال مسألة أمثليات محدبة مركبة في فضاءات هلبرت حقيقية، حيث استخدمنا خوارزمية النقطة الأقرب لإيجاد الحلول المثلى. و تحت بعض الشروط قمنا بإثبات أن خوارزمية النقطة الأقرب تنتج متتالية تتقارب بنسبة خطية نحو الحل الأمثل المطلوب. و نوصي بتعميم الدراسة لإيجاد الحلول المثلى لمسائل أمثليات محدبة ذات متحولين ومقيدة. و تحديد الشروط التي بتحققها نحصل بها على تقارب قوي لخوارزمية النقطة الأقرب.

References:

[1] ATTOUCH, H,; CHBANI, Z.; RIAHI, H. *Fast proximal methods via time scaling of damped inertial dynamics*. SIAMJ. OPTIM, vol. 29, No. 3, 2019, 2227-2256.

[2] ATTOCH, H.; SOUEYCATT, M. *Augmented Lagrangian and Proximal Alternating Direction Methods of Multipliers in Hilbert Spaces: Applications to Games, PDE's and Control*. Pacific Journal of Optimization, vol. 5, 2009, 17-37.

[3] AUJOL,J.F.; CHAMBOLLE,A. *Dual norms and image decomposition models.* Int.J.Comput. Vision, 63, 2005, 85-104.

[4] COMBETTS,P.L.; WAJS,V.R. *Signal recovery by proximal forward-backward splitting.* Multiscale Model. Simul, 4(4), 2005, 1168-1200.

[5] GULER,O. *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization.* Vol. 29, No. 2, 1991, 403-419.

[6] MARTINET,B. *Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives.* Rev.Francaise Inf. Rech. Oper, 1970, 154-159.

[7] MATSUSHITA,S. *On the convergence rate of the Krasnosel'skii-mann iteration.* Bull.Aust.Math-soc. 96, 2017, 162-170.

[8] MOHAMMAD, Y.; SOUEYCATT, M. *Second Order Slice Derivative of Convex Functions in Normed Spaces*. Pacific Journal of Optimization, vol. 15, 2009, 131–143.

[9] MOHAMMAD, Y.; SOUEYCATT, M.; HAMWI, Y. *Regularization in Banach Spaces with Respect to the Bregman Distance.* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 185, 2020. s 327-342 .

[10] MOREAU,J.J. *Fonctionelles sous-differentiables.* C.R.Acad.Sci,Paris,257, 1963, 4117-4119.

[11] MINTY,G.J. *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space.* Duke Math.J,29, 1962, 341-346.

[12] ROCKAFELLAR,R.T. *Monotone operators and the proximal point algorithm.* SIAMJ.Control optimization, vol.14,No.5, 1976, 877-898.

[13] SALZO,S.; VILLA,S. *Inexact and accelerated proximal point algorithms.* Jonral of convex analysis,4, 2012, 1167-1192.

[14] SOLODOV,M.V.; SVAITER,B.F. *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space.* Math.Programming.vol.87, 2000, 189-202.

[15] TAO,M.; YUAN,X. *On the linear convergence rate of a generalized proximal point algorithm.* arXiv:1605.05474v1 [math.OC] 18 May 2016