A study of gravitational field equation in general relativity

Dr. Ali Assaf*
Dr. Suliman Alkheder**
Maysaa Shaban***

(Received 27 / 9 / 2021. Accepted 31 / 1 /2022)

□ ABSTRACT □

General relativity theory is considered an essential tool in terms of studying astronomical phenomenons such as black holes and universal expansion from theoretical perspective that is based on the mathematical derivations, and general relativity in its core is one of the most beautiful and revolutionary conceptions of modern science, that gravitational field is the geometry of four-dimensional curved space that we call spacetime, and the geometry of curvatures is the mathematical basis for general relativity, and gravitational field equation that is relativistically generalized is the main equation of this theory and we can use this equation for studying different gravitational fields like a gravitational field surrounds a black hole, so we have briefly derived this equation starting with traditional mechanics equations depending essentially on the mathematical basis in curves geometry, and depending on the geodesic equation of a particle moving inside a gravitational field, hence, reaching the most important results of general relativity theory such as black holes and gravitational waves.

Key words: Genral relativity – Spacetime – Gravitational – Curvature geometry.

***professor at faculty of science – Tishreen university- Lattakia- Syria** alassafali@yahoo.com
**** professor at faculty of science – Tishreen university- Lattakia- Syria.**
***** postgraduate student (Master) – Tishreen university – Faculty of science – Department of physics- Lattakia- Syria.** msh0991705072@gmail.com .

دراسة معادلة حقل الثقالة في النسبية العامة

د. علي عسّاف*

د. سليمان الخضر**

ميساء شعبان***

(تاريخ الإيداع 27 / 9 / 2021. قُبِل للنشر في 31 / 1 /2022)

□ ملخّص □

تُعتبر النظرية النسبية العامة أداة أساسية في دراسة الظواهر الفلكية مثل الثقوب السوداء و توسُّع الكون، وذلك من الناحية النظرية المستندة إلى العلاقات الرياضية بالأساس. تُعتبر النسبية العامة في جوهرها هي أحد أجمل وأكثر المفاهيم ثورية في العلم الحديث، فحقل الثقالة هو هندسة فضاء مُنحني رباعي الأبعاد نسميه الزمكان، هندسة المُنحنيات هي الأساس الرياضي للنسبية العامة ومعادلة حقل الثقالة المُعمَّمة نسبوياً هي المعادلة الرئيسية لهذه النظرية ويمكننا استخدام هذه المعادلة لدراسة حقول الثقالة المختلفة مثل حقل الجاذبية المُحيط بثقب أسود. لذلك قمنا على نحو مُختصر بدراسة هذه المعادلة انطلاقاً من علاقات الميكانيك التقليدي، مُستندين بالضرورة على الأساس الرياضي في هندسة المُنحنيات، والمعادلة الجيوديزية لحركة جسيم يقع في حقل ثقالة وصولاً إلى أهم نتائج النظرية النسبية العامة كالثقوب السوداء وأمواج الجاذبية.

الكلمات المفتاحية: النسبية العامة - الزمكان - الثقالة - هندسة المُنحنيات.

* أستاذ – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية– سورية alassafali@yahoo.com

** أستاذ – كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية –سورية.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير)– كلية العلوم – جامعة تشرين– اللاذقية سورية msh0991705072@gmail.com

مقدمة:

جاءت نظرية النسبية العامة على يد العالم الألماني ألبرت آينشتاين Albert Einstein، نتيجة لعمل امتد قرابة العشر سنوات احتاجها هذا العالم ليتمكن من تطوير المعادلة العامة التي تعبر عن حقل الثقالة وقد تطلَّب ذلك تواصل آينشتاين مع عدد من الأساتذة في مجال الرياضيات. وكانت الفكرة الأساسية لدى آينشتاين هي تعميم العلاقات الكلاسيكية لنيوتن في الجاذبية لتصبح نسبوية وفاقاً للنسبية الخاصة وكون الزمن ليس مُطلق بالعموم، بل هو مقدار نسبوي يختلف بين جملة وأخرى، وببساطة لقد كانت المعادلات التي حصل عليها في هذا المجال معادلات مُعمَّمة، وبالإمكان تبسيطها إلى علاقات نيوتن في الجاذبية وفق شروط حدية مُعيَّنة كالكتل الصغيرة والمسافات الصغيرة، كالمسافات ضمن المجموعة الشمسية والتي تؤدي إلى الحصول على زمكان مُسطَّح تقريباً. والاختلاف في مفهوم الجاذبية لدى العالمين هو اختلاف بسيط، فقد اعتبر نيوتن أنّ الجاذبية هي قوة تؤثر بها الأجسام على بعضها البعض، وتعطى بالعلاقة:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{1.1}$$

حيث جاذبية نيوتن تتعلق بالأجسام ذات الكتل الكبيرة فتأثير القوة F تتسبَّب به كل كتلة في الأخرى على أنْ تكون المسافة بينهما ليست كبيرة وبالنتيجة الجسيم عديم الكتلة كالفوتون مثلاً لا يخضع لتأثير قوة الجاذبية ولا يتأثر بالكتلة[1]، أمّا آينشتاين فقد اعتبر أنَّ الثقالة هي حقل ينتج عنه انحناء نسيج المكان – الزمن أو الزمكان Spacetime، حيث تتحرك الأجسام التي تقع في حقل الثقالة على هذا الانحناء، وعلى الرغم من أنّنا لا يمكننا رؤية هذا النسيج إلا أنّنا يمكننا تخيله باستخدام العلاقات الرياضية، وهذا ما قام به آينشتاين منطلقاً من علاقات نيوتن، فكثافة الكتلة هي المولّد الأساسي لطاقة الحقل الثقالي، فكلا العالمان لديه الفكرة نفسها عن الثقالة وهي أنَّ الكتلة تؤثر في حقل الثقالة وحقل الثقالة يؤثر في الكتلة بشكل ثانوي. وعَرَّفت النسبية العامة الفراغ بأربعة أبعاد هي الأبعاد المكانية الثلاث x, y, z والبعد الرابع هو الزمن t. وعَرَّفت الثقالة بأنَّها الحقل الذي نصفه بانحناء نسيج الزمكان فهي هذا الانحناء الذي تتسبب به طاقة المادة (كثافة الكتلة) [2,3].

مبدأ التكافؤ equivalence Principle:

بفرض شخص كرائد فضاء مثلاً موجود في مركبة فضائية ساكنة على سطح الأرض أو هذه المركبة تتحرك بحركة مستقيمة مُنتَظمة لكنها موجودة ضمن نطاق حقل الثقالة الأرضي، فإنَّ رائد الفضاء سيشعر بقوة تسحبه نحو الأسفل إلى كرسيه الثابت ، وفي كلتا الحالتين هذه القوة ناتجة عن تأثير تسارع الجاذبية الأرضية g، لكن إذا كانت هذه المركبة موجودة في الفضاء ولا تخضع لأي حقل ثقالة وتتحرك بالتسارع g نفسه، سوف يشعر رائد الفضاء بنفس القوة السابقة تماماً تسحبه نحو الأسفل إلى كرسيه الثابت في المركبة ولن يتمكن من التمييز فيما إذا كان على سطح الأرض متأثراً بتسارع حقل الثقالة الأرضي أم أنَّه في الفضاء الخارجي حيث لا يوجد أي حقل ثقالة والمركبة هي التي تتحرك بتسارع يساوي g، والسبب في ذلك هو التكافؤ بين التأثيرين ، وهما تأثير حقل الثقالة وتأثير التسارع، هذا ما نسمّيه مبدأ التكافؤ.

استفاد آينشتاين من مبدأ التكافؤ من خلال تأثير التسارع على مسار جسيم كتابع للزمن، فالزمن في النسبية هو أحد الأبعاد الأربعة، فإذا أخذنا أحد الأبعاد المكانية فقط وليكن x مع الزمن t، فسنجد أنَّ المسار هو منحنٍ لأنَّ المسار هو دالَّة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

$$x=\frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad ; \qquad v_0=0 \quad , \quad x_0=0$$

أمَّا في الحركة المستقيمة المنتظمة حيث لا يوجد تسارع فالمسار عبارة عن مستقيم.

نستنتج من ذلك أنَّ التسارع يؤدي إلى انحناء مسار الجسيم (في النسبية نسمي الجسم المتأثر بحقل الثقالة بجسيم لأن كتلته m صغيرة جداً بالمقارنة مع الكتلة المركزية M المولدة لحقل الثقالة وتأثير m بالنتيجة مُهمَل لصغرها فهي فقط الجسيم المدروس)، وحسب مبدأ التكافؤ فإنَّ حقل الثقالة يؤدي إلى انحناء هذا المسار أيضاً[2,4]، وإذا تخيَّلنا الأبعاد الأربعة $t\,,x\,,y\,,z$ فإنَّ النسيج ككل سينحني كتابع للزمن وهو نسيج الزمكان وسيكون عبارة عن سطح منحنٍ من أجل الجسيم المدروس. افترض آينشتاين بأنَّ مسار الضوء ينحني بسبب عبوره ضمن حقل ثقالة، أي أنَّه سوف يتابع مساره المستقيم لكن على نسيج الزمكان المنحني و متأثراً به؛ وبالتالي سوف يظهر لمراقب خارجي انحناء مسار الضوء، وقد تم التأكد من ذلك فيما بعد تجريبياً [5].

معادلة حقل الثقالة Gravitational field equation:

تُعطى معادلة حقل الثقالة في النسبية العامة بالعلاقة:

$$R_{\mu\upsilon}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\upsilon}\,R+\,\Lambda\,g_{\mu\upsilon}=\frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\upsilon}$$

في البداية من المفيد جداً التعرف على التنسورات الموجودة في طرفي هذه المعادلة، الأمر الذي يجعل دراسة المعادلة أكثر وضوحاً.

1 تنسورات معادلة حقل الثقالة Gravitational field equation tensors:

لفهم النسبية العامة من الضروري التعرف على التنسورات الموجودة في طرفي معادلة حقل الثقالة:

- التنسور $g_{\mu\upsilon}$:

هو التنسور المتري Metric tensor و هو وحدة البناء الأساسية لنسيج الزمكان و ليس له واحدة، وفي الفضاء الرباعي يتكون هذا التنسور من 16 مركبة، مركباته هي عبارة عن جداء أشعة القاعدة (المماسية) $e_t\,,e_x\,,e_y\,,e_z$ مثنى مثنى، وفي الفضاء المُنحني تكون المصفوفة $g_{\mu\upsilon}$ عبارة عن مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيس متغايرة تتبع متحول واحد أو أكثر حسب الإحداثيات المُستخدمة في الدراسة.

- التنسور $T_{\mu\upsilon}$:

هو تنسور الطاقة أو يُسمَّى أيضاً بتنسور الإجهاد – الطاقة Stress – energy tensor، أو تنسور الإجهاد – الطاقة – كمية الحركة Stress – energy – momentum tensor وهو الجزء الذي يحدد كمية الحركة والطاقة التي يمتلكها أي جسيم نتيجةَ وجوده في حقل الثقالة في كل نقطة من نقاط النسيج؛ وبالتالي يؤدي هذا التنسور في المعادلة دور المولد لحقل الثقالة، أي المولد لانحناء نسيج الزمكان وتُعطى وحدته بـ j/m^3 (كثافة الطاقة، أو كثافة تدفق الطاقة عبر وحدة الحجم)، أو N/m^2 وهي وحدة الضغط، ولا يظهر الحجم V أثناء الدراسة لأنَّنا نعتبره كوحدة حجم، فهذا التنسور يحدد كثافة الطاقة أو تدفقها في وحدة الحجم و تدفق كمية الحركة في وحدة الحجم.

- التنسور $R_{\mu\upsilon}$:

وهو تنسور الانحناء ويُسمَّى بتنسور ريتشي Curvature tensor or Ricce tensor، ويحدد هذا التنسور الفرق في الانحناء عند الانتقال من نقطة إلى نقطة أخرى انتقالاً عنصرياً. لذلك فهو يعطي قيمة الانحناء في كل نقطة من نسيج الزمكان، وحدته $\frac{1}{m^2}$.

- الانحناء السلمي R:

هو ليس تنسور بل هو القيمة السلمية لتنسور الانحناء $R_{\mu\upsilon}$، وتأتي أهمية R عند حساب المسافات؛ وبالتالي المساحات في نسيج الزمكان (نعلم أنَّ الانحناء يُعبَّر عنه بزاوية وهذه الزاوية موجودة في حساب طول قوس ما و بالتالي سوف يدخل R في حساب طول القوس وبالتالي المساحات، وحدته هي وحدة $R_{\mu\upsilon}$ وهي نفسها $\frac{1}{m^2}$.[2,3,6],

بعد أنْ تعرَّفنا على التنسورات الموجودة في طرفي هذه المعادلة، نقوم الآن باستنتاجها:

نذكر في البداية ملاحظة مهمة، هي أنَّنا في الدراسة المنحنية نتعامل مع أي خط على أنَّه خط منحني ونسمّيه جيوديز، حتى أقصر مسافة بين نقطتين هي جيوديز (Geodesic).

يُعطَى متجه الميل أو الظل (Tangent) بواسطة النسبة $\frac{dx^\mu}{d\tau}$، و هو معدل التغيّر في المسافة التي ننتقلها بالنسبة للزمن، τ هو الزمن الخاص (Proper time) و يُسمَّى أيضاً بالزمن الحقيقي؛ كما نعلم هو الزمن الذي يقيسه المراقب في جملته، لذلك هو ثابت و لا يتغير ويساوي في القيمة المسافة dS الثابتة أيضاً لكن بإشارة معاكسة وهي أقصر مسافة بين نقطتين(مترية المسافة)، ونفهم τ هندسياً عندما ينطبق خط العالم وهو لهذا المراقب على المحور الشاقولي ct محور الزمن، أي $ct = c\tau$، فالمراقب يرى نفسه ساكن، وخط العالم هو المسار أو الخط البياني للجسيم في نسيج الزمكان و يتم دراسته عادةً باستخدام بعدين فقط من أجل التبسيط هما البعد الزمني ct وبعد آخر هو بعد مكاني واحد مثل x أي $ct = f(x)$، والذي يهمنا هنا هو أنَّ الزمن الخاص هو مقدار لا متغاير (Invariant) بالنسبة لكل المراقبين. لكي يحافظ متجه المماس على الانتقال الموازي لنفسه من نقطة إلى أخرى على السطح المُنحني، يجب أنْ يكون تفاضله بالنسبة للزمن على طول خط انتقاله مساوياً للصفر (وبذلك نحصل على أقصر مسافة بين نقطتين) :[4,7]

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (4.1)$$

كما نرى هذه المعادلة ليست إلَّا التسارع مساوياً الصفر فهي تمثّل معادلة الحركة على خط مستقيم، ولكننا نبحث عن معادلة الحركة على خط منحنٍ حيث أشعة الأساس تتغاير من نقطة إلى أخرى لذلك علينا أخذ علاقة المشتق المتغاير Covariant derivative وهي علاقة المشتق لمُتجه أو لتنسور في الفضاء المُنحني، وهي غير المشتق العادي في الفضاء المُسطَّح، أي أنَّه علينا إضافة حدّ يعطي قيمة التغير في الانحناء والمُتَمَثِّل برمز كرستوفل Γ وهي :[3]

$$\nabla_n V_m(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} + \Gamma^r_{nm} V_r(x) = T_{mn}(y) \qquad (4.2)$$

العلاقة (4.2) هي من أجل المتجه $V_m(y)$ نطبقها من أجل متجه الميل $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ فنحصل على:

$$\nabla_n \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial\tau}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\tau} = 0$$

حيث طبقنا المشتق ∇_n على المتجه $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ كتابع لـ τ، $\frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$.

الحد الثاني يعطي تغاير متجه الميل عند الانتقال العنصري dx أي يعطي الانحراف و بالتالي:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \qquad (4.3)$$

تمثّل هذه العلاقة المعادلة الجيوديزية لحركة جسيم على سطح مُنحنٍ [3,4].

لكن يجب أنْ يتوافق كلاسيكياً قانون نيوتن الثاني مع النسبية العامة:

$$F = m\,a \quad , \quad a = \frac{F}{m}$$

أي أنَّه بالمقارنة مع العلاقة (4.3)، و من أجل وحدة الكتل نجد:

$$F \equiv a \equiv \Gamma$$

أمّا إشارة السالب في (4.3) هي فقط بسبب الاتجاه، فالاتجاه الموجب للمحور x مُوجَّه بعكس الجهة الفعلية للحركة، و النتيجة رمز كرستوفل يكافئ القوة بشكل مباشر [4,6].

وباستخدام العلاقة التي تعطي رمز كرستوفل (قيمة الانحناء) وهي:

$$\Gamma^\rho_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial g_{\upsilon\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\upsilon} + \frac{\partial g_{\mu\upsilon}}{\partial x^\sigma}\right] \; ; \quad \frac{\partial g_{\mu\upsilon}}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial g_{\upsilon\mu}}{\partial x^\sigma} \qquad (4.4)$$

نطبق هذه العلاقة على حقل ثقالة ضعيف، أي مقدار انحناء الزمكان ضئيل جداً فهو مُسطَّح تقريباً كالانحناء الذي يتحرك عليه كوكب نيبتون مثلاً البعيد عن مركز الجاذبية وهو الشمس، وتكون عندها مشتقات التنسور المتري $g_{\mu\nu}$ صغيرة جداً، فالزمكان قريب من التسطح، أي أشعة الميل تكون ثابتة تقريباً، لذلك يمكننا إهمال مشتقات التنسور المتري بالنسبة للإحداثيات المكانية، فقط المركبة الزمنية $\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}$ يكون لها قيمة تُؤخَذ بعين الاعتبار، وكما نعلم أنَّ مركبات التنسور المتري من أجل هذا التقريب هي عبارة عن أصفار و واحدات للقطر الرئيس، فبإمكاننا اعتبار $g^{\rho\sigma}$ تساوي الواحد وذلك عند حساب رموز كرستوفل وفق كل اتجاه، ونحصل على علاقة رمز كرستوفل من أجل ذلك [4,8]:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \quad ; \quad g^{\mu\upsilon} = 1 \qquad (4.5)$$

إنَّ الشرح السابق يدل على أنَّ الذي يغير من المترية فقط هو تغاير الزمن ويؤدي إلى انحناء بسيط.

ولدينا حقل الجاذبية الكامنة ϕ:

$$\phi = -m\,g\,x$$

$$F = m\,g$$

وبالتالي يمكننا كتابة:

$$F = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \Gamma = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x} \qquad (4.6)$$

نبدل (4.6) في (4.5):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

بالمكاملة نجد:

$$g_{00} = 2\,\phi + \text{const}$$

نفرض ثابت التكامل يساوي الصفر بشروط بدئيّة مناسبة $(t = t_0 = 0)$:

$$g_{00} = 2\,\phi \quad \text{أو} \quad \phi = \frac{1}{2}\,g_{00} \qquad (4.7)$$

لنوجد الآن قيمة ϕ بالاعتماد على قانون نيوتن في الجاذبية:

لدينا:

$$F = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ومن أجل الأبعاد الثلاثة $x\,, y\,, z$:

$$F = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{or} \quad F = -\nabla\,\phi \qquad (4.8)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

لدينا علاقة نيوتن لقوة الجاذبية F:

$$F = \frac{-m\,M\,G}{r^2}$$

ومن أجل وحدة الكتل m، على فرض أنَّ M هي الكتلة المركزية الموجودة في مركز كرة نصف قطرها r، الذي هو المستقيم الواصل بين مركزي الكتلتين، تصبح:

$$F = \frac{-M\,G}{r^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

بالمكاملة نجد:

$$\phi = \frac{-\,M\,G}{r} \qquad (4.9)$$

الآن، لنكامل القوة F على كامل السطح الكروي $r_0 \rightarrow r$:

$$\int F\,dA = \int \frac{-M\,G}{r^2}\,dA = \frac{-M\,G}{r^2}\,(4\pi r^2) = -4\pi GM$$

لكن:

$$\int F\,dA = \int \nabla F\,dV$$

وهي علاقة تفرق (تباعد)، dV هو عنصر الحجم.

$$\int \nabla F\,dV = -\,4\pi GM \quad ; \quad \rho = \frac{M}{V}$$

$$M = \int \rho\,dV$$

$$\int \nabla F\,dV = -\,4\pi G \int \rho\,dV$$

$$\nabla F = -\,4\pi G\rho$$

$$F = -\nabla\,\phi$$

$$\nabla(-\nabla\,\phi) = -\,4\pi G\rho$$

$$\nabla^2\,\phi = 4\pi G\rho \qquad (4.10)$$

وهي العلاقة الكلاسيكية لحقل الجاذبية، انطلق آينشتاين من هذه العلاقة وقام بتعميمها:

لنبدل العلاقة (4.7) في العلاقة (4.10) فنجد:

$$\nabla^2\,g_{00} = 8\,\pi\,G\,\rho$$

نلاحظ أنَّ g_{00} هي مركبة في تنسور لذلك يجب أنْ يكون الطرف الثاني متوافق معها، أي أنَّه يجب أنْ يكون أيضاً مركبة في تنسور، وبالتالي يمكننا كتابة العلاقة الكلية بين تنسورات في الطرفين أي من أجل كل الأبعاد، لذلك كان على آينشتاين أولاً أنْ يستبدل ρ بتنسور، وبما أنَّ :

$$\rho = \frac{M}{V}$$

ومن أجل وحدة الحجوم، حيث ρ تعبر عن الكتلة M، وكما نعلم في النسبية $E = M\,c^2$، ومن أجل وحدات كونية هي:

$$c = c^2 = 1$$

تصبح الطاقة تكافئ الكتلة تماماً $E = M$، لذلك عرَّف آينشتاين تنسور الطاقة $T_{\mu\upsilon}$ الذي شرحناه سابقاً، و استبدل الكثافة ρ به في العلاقة السابقة :

$$\nabla^2\,g_{00} = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\upsilon}$$

علينا أنْ نستبدل الطرف الأيسر بتنسور لأنَّ $T_{\mu\upsilon}$ تنسور، بينما g_{00} مركبة في تنسور. لنرمز لهذا التنسور ب $G_{\mu\upsilon}$؛ يسمى هذا التنسور بتنسور آينشتاين:

$$G_{\mu\upsilon} = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\upsilon} \qquad (4.11)$$

كان على آينشتاين وضع التنسور المناسب مكان $G_{\mu\upsilon}$، والفكرة الأساسية عنده كانت أنَّ الكتلة تؤدي إلى انحناء نسيج الزمكان و الكتلة كما هو واضح، موجودة في الطرف الأيمن، أمّا الطرف الأيسر وبما أنّه يحوي على المشتق الثاني لمركبات التنسور المتري، فهو يعطي الانحناء الهندسي للفضاء بسبب الثقالة التي تولدها الكتلة المركزية M، لذلك كان المرشح الأساسي ليحل مكان التنسور $G_{\mu\upsilon}$ هو تنسور الانحناء $R_{\mu\upsilon}$ (تنسور ريتشي)، وبالتالي تصبح العلاقة:

$$R_{\mu\upsilon} = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\upsilon}$$

لكن توجد هنا مشكلة، فعند اشتقاق الطرفين، فالطرف الأيمن يحدد الطاقة، والطاقة كما نعلم محفوظة، فهي مقدار ثابت ومشتقها صفر، أمّا مشتق $R_{\mu\upsilon}$ يمكن ألّا يساوي الصفر، لذلك فإنَّ:

$$\nabla R_{\mu\upsilon} \neq \nabla \left(8\,\pi\,G\,T_{\mu\upsilon}\right)$$

لقد حلَّ آينشتاين هذه المشكلة ببساطة، بعد إيجاد مشتق $R_{\mu\upsilon}$ وهو:

$$\nabla R_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2}\,\nabla g_{\mu\upsilon}\,R$$

ليحصل على العلاقة:

$$\nabla R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\,\nabla g_{\mu\upsilon}\,R = 0 = 8\,\pi\,G\left(\nabla T_{\mu\upsilon}\right)$$

وبحذف الاشتقاق من الطرفين نحصل على:

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\upsilon}\,R = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\upsilon}$$

نلاحظ أنَّ المقدار $R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\upsilon}\,R$ هو الوحيد الذي يحقق المعادلة ، لكن آينشتاين أضاف c^4 في مقام الطرف الثاني ليوحد الأبعاد و كذلك أضاف الثابت الكوني Λ (ثابت آينشتاين) كحدّ إضافي في الطرف الأيسر، ويمكننا التأكد بسهولة من أنّ للطرفين نفس الوحدة وهي $\frac{1}{m^2}$ وذلك بعد ضرب الطرف الثاني بـ $\frac{1}{c^4}$، لنحصل على الشكل النهائي للمعادلة:

$$\boxed{R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\upsilon}\,R + \Lambda\,g_{\mu\upsilon} = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\upsilon}} \qquad (4.12)$$

المعادلة (4.12) هي عبارة عن 16 معادلة تربط بين مركبات التنسورات الموجودة في كل حدود المعادلة، ويتكون كل تنسور من جداء مركبات متجهين رباعيين مثنى مثنى، أي أنَّ جميع هذه التنسورات هي من المرتبة الثانية، ويُعبر عن الأبعاد الأربعة بالدلائل υ , μ بحيث $\mu, \upsilon = 0, 1, 2, 3$ ، فعندما نستخدم معادلة الحركة $\vec{F} = m\,\vec{\alpha}$ في ميكانيك نيوتن، نكون في الحقيقة نتحدث عن ثلاث معادلات و نحصل عليها بأخذ مركبات $\vec{\alpha}$, $\vec{F}$ على المحاور الثلاث x, y, z، وبنفس الطريقة عند أخذ أو إسقاط مركبات التنسورات في طرفي معادلة الحقل لآينشتاين نحصل على 16 معادلة؛ لأنّ كل تنسور مُكوَّن من متجهين رباعيين و بالتالي التنسور مُكوَّن من 16 مركبة؛ 4^2، لكن عندما نقوم بأخذ المعادلات الـ 16 يتكرر لدينا ستة معادلات و نحصل على 10 معادلات فقط غير مُكررة، أي أنَّ

معادلة حقل الجاذبية المُعمَّمة هي عبارة عن 10 معادلات تدل على كل الاتجاهات الممكنة في الفضاء الرباعي t, x, y, z [3,4].

أمّا بالنسبة للثابت Λ فقد وضعهُ آينشتاين ليحقق فكرة ثبات الكون التي كانت سائدةً في ذلك الوقت لأنَّه عندما قام بحل المعادلة من أجل الكون وجدَ أنَّ الكون في حالة انكماش(تقلُّص)، فهذا الثابت يحدد قيمة الجاذبية العكسية ويجعل من حل المعادلة (4.12) من أجل الكون هي أنَّه ثابت، أمّا دلالة Λ اليوم تختلف فهو موجود في المعادلة ليعطي قيمة الطاقة المفقودة (المُظلمة) الموجودة في الكون و التي تُعاكس طاقة الثقالة وهو حل فريدمان للمعادلة (4.12) من أجل الكون، وهو حلّان، إمَّا أنْ يكون الكون في توسُّع متسارع وهي حالة الكون حالياً المُثبتَة تجريبياً، أو أنَّ الكون يمكن أنْ ينكمش وهو حل يمكن أنْ يحدث لسببٍ ما في المستقبل [2,9]، لكن للثابت الكوني هذا مشكلة معروفة تُسمَّى مشكلة الثابت الكوني، فبعدَ تحديد أقل طول موجة ممكنة في الفراغ التي تساوي قيمة ثابت بلانك $\lambda = 1.6 \times 10^{-35}\ m$ [10]، تمكنت نظرية الكم من حساب قيمة الطاقة المفقودة المتمثّلة بـ Λ، لكن الرقم الذي توصلت له هو أكبر بكثير من الرقم الذي تم استنتاجه من خلال النظرية النسبية العامة بفرق 10^{120} [11]، ولحل هذه المشكلة تمَّ طرح عدة نظريات لكن نتطرق هنا للتصحيح الهام الذي تمَّ إضافته في حساب قيمة Λ والتي تُعطى بالعلاقة:

$$\Lambda = \frac{3}{2}\frac{M_p^2}{g_1}$$

حيث M_p^2 هي الكتلة المولدة لحقل الثقالة وتُسمَّى كتلة بلانك المُقلَّصَة، و g_1 هو معامل التشويه $g_1 \sim 10^{120}$، وبالتالي $\Lambda \sim 10^{-120} M_p^2$، وهذا يعطي حلاً لمشكلة الثابت الكوني[12].

بعض تنبؤات النظرية النسبية العامة Some predictions of general relativity theory:

لقد جاءت النظرية النسبية أولاً بالعديد من التنبؤات عن طريق العلاقات الرياضية فقط وقد تم التأكد منها فيما بعد عن طريق عمليات الرصد التجريبية، من أهم هذه التنبؤات:

1- انحناء الضوء متأثراً بحقل الثقالة أي بانحناء نسيج الزمكان.

2- انزياح الضوء نحو اللون الأحمر متأثراً بحقل الثقالة.

3- أمواج الثقالة Gravitational waves التي تحدث عنها آينشتاين منذ أكثر من مئة عام كتوقع لنظرية النسبية العامة، وبالفعل تم إثبات ذلك تجريبياً وكذلك نظرياً باستنتاج موجة الثقالة اعتماداً على مفاهيم النظرية النسبية الخاصة والعامة وتُعطى معادلة الموجة التثاقلية التي تنتشر كاضطراب بسيط بالعلاقة [3,4]:

$$\nabla^2 h_{\mu\upsilon} = \frac{\partial^2 h_{\mu\upsilon}}{\partial t^2} \qquad (5.1)$$

حيث $h_{\mu\upsilon}$ هو الاضطراب الصغير الذي تتسبب به الموجة التثاقلية في نسيج الزمكان المرن.

الثقوب السوداء Black holes:

بعد نشر النظرية النسبية العامة بفترة قصيرة أنجز العالم الألماني شفارزتشيلد حلاً لهذه المعادلة أثبت من خلاله وجود الثقوب السوداء وهذا الحل ينطبق على المنطقة الكروية المتجانسة المُحيطة بأي نجم بما فيها الثقب الأسود، افترض شفارتشيلد المترية [4,7]:

$$dS^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

r_s هو نصف قطر شفارزتشيلد للثقب الأسود، M هي كتلة الثقب الأسود، r هو نصف قطر الكتلة الكروية M المتسببة بحقل الثقالة، في حالة $r = 0$، المترية $dS^2 \to \infty$؛ هذا الكلام يعني أنَّ رموز كرستوفل و بالتالي تنسور ريتشي الذي يحدد قيمة الانحناء يساوي ∞ عند $r = 0$، وبالتالي الطرف الثاني من المعادلة (4.12) يعطي قيمة هائلة لكثافة الكتلة المتسببة بالانحناء هذا. قيمة لا نهائية في الطرفين، فالكتلة كلها تتوضع في نقطة واحدة منفردة في مركز المنطقة الكروية المتجانسة، وحتى الضوء يسقط في التفردية فالضوء عند عبوره أي حقل ثقالة لا يمكنه أنْ يتسارع فسرعة الضوء ثابتة لكنه يتأثر بحقل الثقالة من خلال انحناء مساره وفق انحناء الزمكان، لكن في حالة الثقب الأسود يسقط الضوء مباشرةً إلى تلك النقطة المُنفردَة متأثراً بالانهيار التثاقلي[1]. وفي الحالة $r = r_s$ أيضاً $dS^2 \to \infty$، نصف قطر الكتلة المركزية يساوي نصف قطر التثاقل، يعطينا هذا أنَّ تأثير الثقالة يبدأ تماماً عند $r = r_s$ وهي الكتلة الأساسية قبل أنْ تنهار تثاقلياً لتتوضع في نقطة منفردة، لذلك تُسمَّى هذه الحالة للحل تفرد نظام الإحداثيات الذي يصف الحل أمَّا الحالة الأولى هي ليست تفرد في نظام الإحداثيات فقط بل هي تفردية حقيقية، يُدعى الحل السابق الثقب الأسود Black Hole ويصف التفردية Singularity في نسيج الزمكان، فالانحناء لم يعد انحناء بل انهار بشكل مستقيم إلى نقطة واحدة، لذلك نصف القطر $r = r_s$ يُسمَّى أفق الحدث Event Horizon ، و كل الجسيمات بما فيها الضوء تسقط عند تجاوز أفق الحدث مختفيةً داخل المنطقة المظلمة المُحدَّدة بنصف القطر هذا [3,4].

أهمية البحث وأهدافه:

فهم الحقل الثقالي عن طريق دراسة معادلة حقل الثقالة في النسبية العامة، وبالتالي التوصّل لفهم جوهر النظرية النسبية العامة التي تشكل أداة أساسية في دراسة الظواهر الكونية، وحركة الأجرام السماويّة وصولاً إلى أهم نتائج هذه النظرية.

النتائج النظرية Theoretical results:

1- تمكَّنا من خلال هذا البحث من إعادة استنتاج معادلة حقل الثقالة في النسبية العامة وهو أمر ضروري من أجل فهم هذه النظرية بوضوح.

2- فهم حقول الثقالة كما تعرّفها النسبية العامة بأنها انحناء في نسيج الزمكان، تتم دراستها عن طريق فهم هندسة المنحنيات ولكن يمكننا القول بوضوح قيمة انحناء نسيج الزمكان في نقطة ما تزداد مع زيادة شدة حقل الثقالة فيها.

3- تغيرات التنسور المتري الذي هو وحدة البناء لنسيج الزمكان تعطي نتائج دراسة هذا النسيج مثل نتيجة أنَّ الزمن يبطئ كلما اقترب الجسيم من مركز الثقب الأسود حتى يتوقف الزمن تماماً في المركز، وكذلك بالنسبة للطول فالمادة تنتهي أبعادها إلى الصفر في مركز الثقب الأسود، كل هذه المعلومات نحصل عليها عن طريق دراسة تغيرات التنسور المتري الموجود في الطرف الأول في المعادلة (4.12) وعن طريقه يتم تحديد قيمة الانحناء لنسيج الزمكان في نقطة منه، وهذا التغير ينتج عن كثافة الطاقة المُتمثلة بالتنسور $T_{\mu\upsilon}$ في الطرف الثاني للمعادلة.

الاستنتاجات والتوصيات

1- نظراً لأهمية النظرية النسبية العامة في دراسة الظواهر الكونية نوصي بالاهتمام بهذه النظرية وتدريسها في الأكاديميات المُختَصَّة والتأسيس الرياضي لها كما في الكثير من الجامعات في العالم.

2- لما للثقوب السوداء من أهمية كبيرة في حل مشاكل الفيزياء كونها من الألغاز الكبيرة نقترح القيام بدراسات حديثة تدعم وتتابع دراستنا السابقة ومنها:

– حل شفارزتشيلد لمعادلة حقل الثقالة في النسبية العامة.

– دراسة مشكلة الثابت الكوني في النسبية العامة.

– حل معادلة حقل الثقالة من أجل الكون.

– دراسة الثقوب السوداء باستخدام نظرية ميكانيك الكم.

– دراسة الثقوب السوداء من منظور النظريات المختلفة، فلعلَّ حل كل ما هو مجهول بشأن الثقب الأسود يساعد في إيجاد نظرية مُوحَّدة ومُتكاملة بنسبة كبيرة في الفيزياء الحديثة.

References:

[1] Dadhich, Naresh. Einstein is Newton with space curved. arXiv:1206.0635v1 [gr − qc] 1 Jun 2012.

[2] Phyzia AL Arabia, Relativity series, 2 Sept. 2017. http://www.youtube.com/playlist?list=PLAStodcjKZBrIENGv0ABOi-N986yuSAEx

[3] Hartle, James. Gravity An introduction to Einstein’s General Relativity. ed., Nancy Benton, Santa Barbara, 2003.

[4] Susskind, Leonard. General relativity, Stanford university, 11 Dec. 2012. https://youtube.com/playlist?list=PLpGHT1n4-mAvcXwzOIz3dHnGZaQP1LEib

[5] Balbus, Steven. general relativity and cosmology, 2021.

[6] Walters, S. how Einstein got his field equations. arXiv:1608.05752v1 [phyysivs. hist − ph] 19 Aug 2016.

[7] eigenchris, Relativity by eigenchris , 15 Mar. 2020. http://youtube.com/playlist?list=PLJHszsWbB6hqlw73QjgZcFh4DrkQLSCQa

[8] Simpson, David. A Mathematical Derivation of the General Relativistic Schwarzchild Metric. An Honors thesis presented to the faculty of the Department of Physics and Mathematics East Tennessee state university, April 2007.

[9] Novikov, Igor. Black Holes and the universe. 2^{nd}. ed., Saleh Jad Allah Shkair, 2010.

[10] Calmet, Xavier, Planck Length and Cosmology-Modern physics Letters A, arXiv:0704.1360v1 [astro − ph] 11 Apr 2007.

[11] Stenger, Victor, The problem with The cosmological constant, Skeptical Briefs Volume 21.1 March 19, 2012. https://skepticalinquirer.org/newsletter/the-problem-with-the-cosmological-constant/

[12] Vasak, D. Kirsch, J. Struckmeier, J. Stöcker, H. Covariant Canonical Gauge Theory of gravitation resolves the cosmological constant problem. arXiv:1802.07137v4 [gr − qc] 24 Jun 2021.