.$N-$Continuous Functions in Bitopological Spaces

Dr .Baraa Afisa*

(Received 8 / 1 / 2023. Accepted 15 / 5 /2023)

□ ABSTRACT □

Let $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ be a $N-$continuous function in bitopological space ,where (X,τ_1,τ_2) , (Y,σ_1,σ_2) are two bitopological space.
In this research ,I have studied some properties of $N-$ continuous functions in bitopological space, Especially, the important results are the following theorems:
1- f is a $N-$continuous function if and only if $f^{-1}(v)$ is a $N-$closed set in (X,τ_1,τ_2) for each v closed set in (Y,σ_1,σ_2) .
2- Every $P-$continuous function is a $N-$continuous function, but the converse is not true in general.
Moreover, I have defined a new concept in bitopological space called $N-$ homeomorphism function , and I have proved that every P- homeomorphism function is a N- homeomorphism function, but the converse is not true in general.

Keywords: bitopological space , $N-$open set , $N-$closed set, $N-$closure set , $N-$interior set, $N-$continuous function, $N-$homeomorphism function.

*Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: baraaafisa@tishreen.edu.sy

التطبيقات المستمرة من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا

د. براءه عفيصه*

(تاريخ الإيداع 8 / 1 / 2023. قُبِل للنشر في 15 / 5 /2023)

☐ ملخّص ☐

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً $N-$مستمراً في الفضاء ثنائي التبولوجيا ،حيث (X,τ_1,τ_2)و (Y,σ_1,σ_2) فضاءين ثنائيي التبولوجيا.

في هذا البحث قمت بدراسة بعض خواص التطبيق $N-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا، من أهمها:

1- f هو $N-$مستمر على X $\Leftrightarrow$ من أجل كل مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) مثل v فإن $f^{-1}(v)$ هي $N-$ مغلقة في (X,τ_1,τ_2).

2- كل تطبيق $p-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا هوتطبيق $N-$مستمر. ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.

بالإضافة لذلك قمت بتعريف التطبيق $N-$ هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا، وبرهنت أن كل تطبيق $p-$ هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا هو تطبيق $N-$ هومومرفيزم. ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.

الكلمات المفتاحية: الفضاء ثنائي التبولوجيا ،المجموعة $N-$ مفتوحة، المجموعة $N-$ مغلقة، لصاقة مجموعة من النمط N ، داخلية مجموعة من النمط N ، التطبيق $N-$مستمر ، التطبيق $N-$هومومرفيزم .

* مدرسة - قسم الرياضيات - كلية العلوم -جامعة تشرين- اللاذقية - سورية. البريد الالكتروني: baraaafisa@tishreen.edu.sy

مقدمة:

تعد المجموعات المفتوحة والمغلقة اللبنة الرئيسية في بناء التبولوجيا والفضاء التبولوجي، فقد قدم الباحثون أنماطاً مختلفة منها: المجموعات المفتوحة (المغلقة) من النمط α و النمط β والنمط h وغيرها.....

واستخدم بعضهم هذه المجموعات في تعريف التطبيقات المستمرة المناسبة لكل نمط على حدى ويتضح ذلك جلياً في الاعمال [2]–[3]–[9]–[11]–[12].

ثم توسع الباحثون ومددوا مفهوم الفضاء التبولوجي إلى الفضاء ثنائي التبولوجيا على يد العالم كيلي في العام 1963 [17] ، ثم توالت الدراسات لبنية الفضاءات ثنائية التبولوجيا ومن ضمنها دراسة التطبيقات المستمرة حيث تم تعريفها على يد الباحث A.Tallafha في العام 1999 [1] ، وفي العام 2009 درس الباحثانA.Kilicman , Z.Salleh أهم خواص هذا التطبيق [18] . مازالت الدراسات التي تخص الاستمرار في الفضاء ثنائي التبولوجيا مستمرة إلى يومنا هذا [4]–[5]–[6]–[7]–[8]–[10]–[13]–[14]–[15]–[19]–[20]–[21]–[22]–[23].

في العام 2010 العمل [16] قام الباحثان A.I.Nasir , N.A.Jabbar بوضع تعريف المجموعات المفتوحة من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا ، ثم وضعا تعريف التطبيق $N-$مستمر واستخدماه في دراسة موضوع التراص وفي العام 2019 العمل [24] قام الباحث رياض الحميدو بدراسة الخصائص الأساسية لهذا النمط من المجموعات المفتوحة.

قمت في هذا البحث بدراسة أهم خواص التطبيق $N-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا ، كما أعطيت تعريفاً جديداً للتطبيق $N-$ هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا ودرست أهم خواصه.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم إضافة في مجال الاستمرار في الفضاء ثنائي التبولوجيا من النمط N .

ويهدف إلى دراسة أهم الخواص التي يتمتع بها التطبيق $N-$مستمر وعلاقته بالتطبيق المستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا، كذلك دراسة التطبيق $N-$هومومرفيزم في هذا الفضاء.

طرائق البحث ومواده:

اعتمدت في هذا البحث على مفاهيم أساسية في التبولوجيا العامة وفي الفضاء ثنائي التبولوجيا وبشكل خاص في مجال الاستمرار.

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث :

(X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا.

$N-$مفتوحة (مجموعة مفتوحة من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$N-$مغلقة (مجموعة مغلقة من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$N-$مستمر (تطبيق مستمر من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$N-$هومومرفيزم (تطبيق هومومرفيزم من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$P-$مستمر (تطبيق مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$P-$هومومرفيزم (تطبيق هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا)

$N-cl(A)$ لصاقة المجموعة A من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا

$N-\text{int}(A)$ داخلية المجموعة A من النمط N في الفضاء ثنائي التبولوجيا

التعاريف الأساسية :

تعريف1: ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقاً من الفضاء ثنائي التبولوجيا (X,τ_1,τ_2) إلى الفضاء ثنائي التبولوجيا (Y,σ_1,σ_2) عندئذ:

1-يقال عن f إنه $p-$مستمر إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2$ ، من أجل كل $u\in\sigma_1\cup\sigma_2$. [1].

في المرجع[18] تم وضع التعريف $p-$مستمر تحت مسمى p_2-مستمر.

2- يقال عن f إنه $p-$هومومرفيزم إذا وفقط إذا كان f تقابل و $p-$مستمر على X وكان f^{-1} $p-$مستمر على Y ، حيث $f^{-1}:(Y,\sigma_1,\sigma_2)\to(X,\tau_1,\tau_2)$. [1].

تعريف2: بفرض A مجموعة جزئية من الفضاء ثنائي التبولوجيا (X,τ_1,τ_2) عندئذ : A هي مجموعة $N-$مفتوحة في (X,τ_1,τ_2) إذا وفقط إذا كانت A مفتوحة في الفضاء $(X,\tau_1\vee\tau_2)$ حيث :

$\{\tau_1\vee\tau_2 : is\ the\ \sup remum\ topology\ on X\ contains\ \tau_1,\tau_2\}$. [16].

إن متممة المجموعة $N-$مفتوحة في الفضاء (X,τ_1,τ_2) هي $N-$مغلقة فيه. [16].

تعريف3: التطبيق $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ هو $N-$مستمر إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(u)\in\tau_1\vee\tau_2$ ، من أجل كل $u\in\sigma_1\vee\sigma_2$. [16].

تعريف4: ليكن (X,τ_1,τ_2) فضاء ثنائي التبولوجيا عندئذ: تقاطع المجموعات $N-$مغلقة التي تحوي A تسمى لصاقة A من النمط N ونرمز لها بـ $N-cl(A)$. [24].

تعريف 5 : إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقا كيفياً عندئذ:

f هو $N-$هومومرفيزم إذا وفقط إذا كان f تقابل (غامر ومتباين) و f هو $N-$مستمر على X و f^{-1} هو $N-$مستمر على Y.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة (1): كل تطبيق $p-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا هو تطبيق $N-$مستمر.

البرهان:

ليكن $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيق $p-$مستمر، ولتكن $u\in\sigma_1\vee\sigma_2$ عندئذ:

$$u\in\sigma_1\subseteq\sigma_1\cup\sigma_2\Rightarrow f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2\subseteq\tau_1\vee\tau_2$$
$$or\ \ u\in\sigma_2\subseteq\sigma_1\cup\sigma_2\Rightarrow f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2\subseteq\tau_1\vee\tau_2$$
$$or\ \ u\in\sigma_1\cap\sigma_2\subseteq\sigma_1\cup\sigma_2\Rightarrow f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2\subseteq\tau_1\vee\tau_2$$
$$or\ \ u\in\sigma_1\cup\sigma_2\Rightarrow f^{-1}(u)\in\tau_1\cup\tau_2\subseteq\tau_1\vee\tau_2$$

مما سبق وبعد مراعاة الاختيار الكيفي لـ $u\in\sigma_1\vee\sigma_2$ نجد أن f $N-$مستمر.

ملاحظة (1): إن عكس المبرهنة (1) غير صحيح بصورة عامة . ويوضح ذلك المثال الآتي

مثال(1): ليكن $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3\}$ ولنعرف التطبيق f المعرف بالعلاقة:

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ حيث $f(a)=f(b)=1\ \ ,\ f(c)=3$

$$\tau_1=\{\phi,X,\{a\}\}\ ,\ \tau_2=\{\phi,X,\{b\}\},\sigma_1=\{\phi,Y,\{1\}\}\ ,\ \sigma_2=\{\phi,Y,\{2\}\}$$
$$\tau_1\cup\tau_2=\{\phi,X,\{a\},\{b\}\}\ ,\ \sigma_1\cup\sigma_2=\{\phi,Y,\{1\},\{2\}\}$$
$$\tau_1\vee\tau_2=\{\phi,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\ ,\ \sigma_1\vee\sigma_2=\{\phi,Y,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

هذا التطبيق $N-$مستمر لأن:

$$f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_1\vee\tau_2\ ,\ f^{-1}(Y)=\{a,b,c\}=X\in\tau_1\vee\tau_2$$
$$f^{-1}(\{1\})=\{a,b\}\in\tau_1\vee\tau_2\ ,\ f^{-1}(\{2\})=\phi\in\tau_1\vee\tau_2$$
$$f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b\}\in\tau_1\vee\tau_2$$

ولكن f ليس $p-$مستمر لأن: $\exists\{1\}\in\sigma_1\cup\sigma_2\ ;\ f^{-1}(\{1\})=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$.

مبرهنة (2): إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقا كيفياً عندئذ:

f هو $N-$مستمر على X $\Leftrightarrow$ من أجل كل $x\in X$ وكل مجموعة $N-$مفتوحة مثل v في Y تحوي $f(x)$ ، يوجد مجموعة $N-$مفتوحة مثل u في X تحوي x بحيث تحقق أن $f(u)\subseteq v$.

البرهان :

($\Leftarrow$:)بفرض $x\in X$ و v مجموعة $N-$مفتوحة في Y تحوي $f(x)$ أي $f(x)\subseteq v$ ، من الفرض $f^{-1}(v)$ هي $N-$ مفتوحة في X وتحوي x.

ولنرمز بـ $u=f^{-1}(v)$ بالتالي وجدنا مجموعة $N-$مفتوحة X تحوي x ، وكذلك نعلم أن $f(f^{-1}(v))\subseteq v$
وهذا يعني أن $f(u)\subseteq v$.

($\Rightarrow$:) بفرض أن v مجموعة $N-$مفتوحة في Y و $f(x)\in v$ ، سنبرهن أن $f^{-1}(v)$ مجموعة $N-$مفتوحة في X .
إن $x\in f^{-1}(v)$. وحسب الفرض يوجد مجموعة $N-$مفتوحة مثل u في X تحوي x بحيث تحقق أن $f(u)\subseteq v$
بالتالي : $x\in u\subseteq f^{-1}(f(u))\subseteq f^{-1}(v)$

$$\Rightarrow x\in u\subseteq f^{-1}(v)\Rightarrow f^{-1}(v)=\cup u\ \ ;\forall x\in f^{-1}(v)$$

وبما أن اجتماع مجموعات مفتوحة من النمط N هو مجموعة $N-$مفتوحة [24] ، بالتالي $f^{-1}(v)$ مجموعة $N-$مفتوحة في X ، وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ v من Y نجد أن f هو $N-$مستمر على X .

مبرهنة(3): إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقا كيفياً عندئذ:

f هو $N-$مستمر على X $\Leftrightarrow$ من أجل كل مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) مثل v فإن $f^{-1}(v)$ هي $N-$ مغلقة في (X,τ_1,τ_2).

البرهان :

($\Leftarrow$:) لتكن vمجموعة $N-$مغلقة كيفية في (Y,σ_1,σ_2) عندئذ Y/v مجموعة $N-$مفتوحة في Y ، ومن الفرض $f^{-1}(Y/v)$ مجموعة $N-$مفتوحة في X .

وبما أن : $f^{-1}(Y/v)=f^{-1}(Y)/f^{-1}(v)\ =X/f^{-1}(v)$ فإن $X/f^{-1}(v)$ مجموعة $N-$مفتوحة في X ، بالتالي $f^{-1}(v)$ مجموعة $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2).

($\Rightarrow$:) بفرض uمجموعة $N-$مفتوحة كيفية في (Y,σ_1,σ_2) نريد أن نبرهن أن صورتها العكسية وفق f هي $N-$ مفتوحة في (X,τ_1,τ_2).

إن Y/u مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) فحسب الفرض يكون $f^{-1}(Y/u)$ مجموعة $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2)، وبما أن : $f^{-1}(Y/u)=f^{-1}(Y)/f^{-1}(u)=X/f^{-1}(u)$ فإن : $X/f^{-1}(u)$ مجموعة $N-$مغلقة في X، بالتالي $f^{-1}(u)$ مجموعة $N-$مفتوحة في (X,τ_1,τ_2). بالتالي f هو $N-$مستمر على X.

مبرهنة(4): إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تطبيقا كيفياً عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1- من أجل كل مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) مثل v فإن $f^{-1}(v)$ هي $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2).

2- $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A))\,;\ \forall A\subseteq X$.

3- $N-cl(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(N-cl(B));\ \forall B\subseteq Y$.

البرهان : $(1)\Rightarrow(2)$

لتكن $A\subseteq X$ و v مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) تحوي $f(A)$ أي $f(A)\subseteq v$.

عندئذ حسب الفرض $f^{-1}(v)$ مجموعة $N-$مغلقة في X وتحقق أن: $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(v)$ وبما أن لصاقة مجموعة A من النمط N هي أصغر مجموعة $N-$مغلقة تحوي A [24] فإن :

$$N-cl(A)\subseteq f^{-1}(v)$$

$$\Rightarrow f(N-cl(A))\subseteq f(f^{-1}(v))\subseteq v \quad \Rightarrow f(N-cl(A))\subseteq v \quad (1)$$

ومن جهة ثانية :

نعلم أن $f(A)\subseteq N-cl(f(A))$ واللصاقة من النمط N هي مجموعة $N-$مغلقة [24]

وبما أن العلاقة (1) محققة من أجل كل مجموعة $N-$مغلقة تحوي $f(A)$ فهي محققة من أجل المجموعة $N-cl(f(A))$ بالتالي : $f(N-cl(A))\subseteq\ N-cl(f(A))$.

$(2)\Rightarrow(3)$:

لتكن $B\subseteq Y$ ولنرمز بـ $f^{-1}(B)=A\subseteq X$ حسب الفرض : $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A))$

$$\Rightarrow f(N-cl(f^{-1}(B)))\subseteq N-cl(f(f^{-1}(B)))\subseteq N-cl(B)\Rightarrow$$
$$f(N-cl(f^{-1}(B)))\subseteq N-cl(B)$$

بالتالي :

$$N-cl(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(f(N-cl(f^{-1}(B))))\subseteq f^{-1}(N-cl(B))$$
$$\Rightarrow N-cl(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(N-cl(B)) \ \ ; \ \forall B\subseteq Y$$

$(3)\Rightarrow(1)$:

لتكن v مجموعة $N-$مغلقة في Y سنبرهن أن $f^{-1}(v)$ هي $N-$مغلقة في X. ومن أجل ذلك سنبرهن أن $f^{-1}(v)$ تساوي لصاقتها من النمط N.

حسب الفرض يكون : $N-cl(f^{-1}(v))\subseteq f^{-1}(N-cl(v))$ وبما أن v مجموعة $N-$مغلقة في Y فإن $v=N-cl(v)$ هذا يعني:

$$N-cl(f^{-1}(v))\subseteq f^{-1}(v) \quad (2)$$

ونعلم أن $f^{-1}(v)\subseteq\ N-cl(f^{-1}(v))$ (3) [24]

من العلاقتين (2)و(3) نجد أن $N-cl(f^{-1}(v))=f^{-1}(v)$ وهذا يعني أن $f^{-1}(v)$ هي $N-$مغلقة في X.

مبرهنة (5): كل تطبيق $p-$هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا هو تطبيق $N-$هومومرفيزم.

البرهان :

بفرض $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ $p-$هومومرفيزم بالتالي f تقابل (غامر ومتباين) و f هو $P-$مستمر على X و f^{-1} هو $P-$مستمر على Y.

وحسب المبرهنة (1) يكون f $N-$مستمر على X و f^{-1} هو $N-$مستمر على Y. وهذا يعني أن: f $N-$هومومرفيزم.

ملاحظة (2) : إن عكس المبرهنة (5) غير صحيح بصورة عامة، ويوضح ذلك المثال الآتي:

مثال(2): ليكن $X=\{1,2,3,4\}$ و $f(x)=x\ ;\forall x\in X$ حيث

$$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(X,\sigma_1,\sigma_2) \text{ و } f^{-1}:(X,\sigma_1,\sigma_2)\to(X,\tau_1,\tau_2)$$

$$\tau_1=\{\phi,X,\{1\}\}\ ,\tau_2=\{\phi,X,\{2\}\}\ \ ,\tau_1\cup\tau_2=\{\phi,X,\{1\},\{2\}\},\tau_1\vee\tau_2=\{\phi,X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

$$\sigma_1=\{\phi,X,\{2\},\{1,2\}\}\ ,\sigma_2=\{\phi,X,\{1\},\{1,2\}\},$$

$$\sigma_1\cup\sigma_2=\{\phi,X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\quad ,\sigma_1\vee\sigma_2=\{\phi,X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

إن f هو $N-$مستمر على X لأن :

$$f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_1\vee\tau_2\ \ ,f^{-1}(X)=X\in\tau_1\vee\tau_2\ ,f^{-1}(\{1\})=\{1\}\in\tau_1\vee\tau_2$$

$$f^{-1}(\{2\})=\{2\}\in\tau_1\vee\tau_2\ \ ,\quad f^{-1}(\{1,2\})=\{1,2\}\in\tau_1\vee\tau_2$$

إن f^{-1} هو $N-$مستمر على X لأن :

$$(f^{-1})^{-1}(\phi)=\phi\in\sigma_1\vee\sigma_2\ \ ,(f^{-1})^{-1}(X)=X\in\sigma_1\vee\sigma_2\ ,(f^{-1})^{-1}(\{1\})=\{1\}\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

$$(f^{-1})^{-1}(\{2\})=\{2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2\ \ ,\quad (f^{-1})^{-1}(\{1,2\})=\{1,2\}\in\sigma_1\vee\sigma_2$$

و f تقابل بالتالي f هو $N-$هومومرفيزم . ولكن f ليس $P-$مستمر على X لأن:

$$\exists\{1,2\}\in\sigma_1\cup\sigma_2\ :\ f^{-1}(\{1,2\})=\{1,2\}\notin\tau_1\cup\tau_2$$

وهذا يعني أن f ليس $P-$هومومرفيزم .

مبرهنة (6): إذا كان $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\sigma_1,\sigma_2)$ تقابلاً كيفياً عندئذ:

f هو $N-$هومومرفيزم $\Leftrightarrow$ $f(N-cl(A))=N-cl(f(A))\ ;\ \forall A\subseteq X$.

البرهان :

($\Leftarrow$):لتكن $A\subseteq X$ مجموعة جزئية كيفية من X وبما أن f هو $N-$هومومرفيزم فإن f هو $N-$مستمر على X فحسب المبرهنة (4) يكون $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A))$.....(4)

ومن جهة ثانية :

بما أن f^{-1} هو $N-$مستمر على Y فحسب المبرهنة (4) يكون :

$$N-cl((f^{-1})^{-1}(A))\subseteq(f^{-1})^{-1}(N-cl(A))\Rightarrow N-cl(f(A))\subseteq f(N-cl(A))\ ...(5)$$

من (4) و(5) نجد أن $f(N-cl(A))=N-cl(f(A))\ ;\ \forall A\subseteq X$.

($\Rightarrow$):من الفرض لدينا f تقابل و كذلك $f(N-cl(A))\subseteq N-cl(f(A))$ وهذا يعني حسب المبرهنتين (4) و (3) أن f $N-$مستمر على X. بقي برهان أن f^{-1} $N-$مستمر على Y.

$$f^{-1}:(Y,\sigma_1,\sigma_2)\to(X,\tau_1,\tau_2)$$

لتكن F مجموعة $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2) عندئذ $f(F)=(f^{-1})^{-1}(F)$ علينا أن نبرهن أن $f(F)$ هي $N-$ مغلقة في (Y,σ_1,σ_2).

بما أن F مجموعة $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2) فإن $N-cl(F)=F$ [24] ، فحسب الفرض يكون :

$$\Rightarrow f(N-cl(F))=f(F) \Rightarrow f(F)=f(N-cl(F))=N-cl(f(F))$$

وهذا يعني أن $f(F)$ $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2).

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ F نجد أن f^{-1} $N-$مستمر على Y. بالتالي f هو $N-$هومومرفيزم .

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى بعض الخواص التي يتمتع بها التطبيق $N-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا ومن أهمها:

1- f هو $N-$مستمر على X $\Leftrightarrow$ من أجل كل مجموعة $N-$مغلقة في (Y,σ_1,σ_2) مثل v فإن $f^{-1}(v)$ هي $N-$مغلقة في (X,τ_1,τ_2).

2- كل تطبيق $p-$مستمر في الفضاء ثنائي التبولوجيا هو تطبيق $N-$مستمر. ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة حيث وضحت ذلك من خلال مثال.

بالإضافة لذلك قمت بتعريف التطبيق $N-$ هومومرفيزم الفضاء ثنائي التبولوجيا، وبرهنت أن كل تطبيق $p-$هومومرفيزم في الفضاء ثنائي التبولوجيا هو تطبيق $N-$ هومومرفيزم . ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة ووضحت ذلك من خلال مثال .

نوصي بمتابعة العمل في الفضاءات ثنائية التبولوجيا ومحاولة تعريف أنماط جديدة من المجموعات المفتوحة في الفضاء ثنائي التبولوجيا وتعريف التطبيقات المستمرة المناسبة لها ودراسة خواصها .

References:

(1)AL-BSOUL ,A ;TALLAFHA ,A ., *Countable dense homogeneous bitopological spaces*, Tr.J.Math., vol (23) . 1999 , p . 233-242.

(2)ABBAS ,F ., *On h-open sets and h-continuous functions* , Johannes kepler University .Linz-Austria. 2021, MSC code:54A40.

(3)ABDALBAQI ,L ;MOUSA ,H ., *On open set and continuous function in topological spaces* ,Int.J.Nonlinear Anal.Appl , vol (13) . 2022, No. 1, p . 737-744.

(4)ARWINI ,K ;ALMRTADI ,H., *New pairwise separation axioms in bitopological spaces* ,world scientific news, WSN (145) . 2020, p . 31-45.

(5)ACHARJEE ,S ;SARMA ,D., *Some results on Almost b-continuous functions in a bitopological space* ,Bol.soc.paran.Mat, vol (37) . 2019, p . 167-177.

(6)ATEWI ,A ;NASER ,B., *Forms of* $\varpi-$*continuous functions between bitopological spaces* ,Int.J.Nonlinear Anal.appl., vol (13) . 2022, No. 1, p . 2219-2225.

(7)AL-NAFIE ,Z ., *On* $\delta\psi-p-$ *continuous functions in bitopological spaces*,Journal of babylon University /pure and applied sciences, vol (21) . 2013, No. 3.

(8)BHATTACHARYA ,B ;PAUL ,A., *A New approach of* $\gamma-$ *open sets in bitopological spaces* ,Gen.Math.Notes., vol (20) . 2014, No. 2, p . 95-110.

(9)BENITEZ ,J ;CANEY ,S., *On semi- continuous functions* ,The Manila Jourmal of science., vol (4) . 2001, No. 2.
(10)BENCHALLI ,S ;PATIL ,P., *Fuzzy boundary closed sets and continuous function in fuzzy bitopological space*s ,J.Comp.Math.Sei., vol (16) . 2010, p . 702- 709.
(11)BAKER ,C ., *n-open sets and n-continuous functions* ,International Journal of Contemporary Mathematical Sciences., vol (16) . 2021, No. 1, p .13-20.
(12)CARPINTERO ,C ;ROSAS ,E., *Almost w-continuous function defined by w-open sets due to Arhangel'skii* ,cubo a mathematical., vol (19) . 2017, No. 1, p . 01-15.
(13)CARPINTERO ,C ;ROSAS ,E., *Bitopological weak continuous Multifunctions,* Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute., vol (175) . 2021 ,issue. 3, p. 331-335.
(14)EL-SHEIKH ,S ;TANTAWY ,O., *Generalized locally pairwise closed sets on bitopological spaces and some of its properties* ,Journal of the Egyptian mathematical society., vol (26) . 2018, Issue. 1.
(15)GARG ,T ;SINGHAL ,K., *Study of some mapping in bitopological space* ,Global journal of mathematical sciences., vol (5) . 2013, No. 1, p . 69-85.
(16)JABBAR ,N ;NASIR ,A., *Some types of compactness in bitopological spaces* ,IBN AL-HAITHAM J .For pure and APPL SCI., vol (23) . 2010, No. 1.
(17)KELLY ,J., *Bitopological spaces*,Proc.london Math. soc., vol (13).1963, No.3, p . 71-89.
(18)KILICMAN ,A ;SALLEH ,Z., *Anote on pairwise continuous mappings and bitopological spaces* ,European journal of pure and applied mathematics., vol (2) . 2009, No.3, p . 325-337.
(19)KOTHANDAPANI ,M ;RAVIKUMAR ,R., $(\tau_1,\tau_2)^* - g^* r$ *continuous functions* ,International journal of pure and Applied Mathematics., vol (94) . 2014, No. 3, p .425-438.
(20)MARY ,S ;VINODHINI ,R., *Closed sets and its separation axioms in bitopological spaces* , International journal of computer and Application., vol (5) . 2015, No.7.
(21)MAHMOOD ,P ;MUSTAFA ,K., *Contra-continuous functions in bitopological spaces* ,Tikrit journal of pure science , vol (18) . 2013, No.3.
(22)OGOLA,O ;OKELO ,N., *On separability criteria for continuous bitopological spaces* ,open j.Math.Anal., vol (5) . 2021, No.2, p . 31-45.
(23)SARMA ,D ;TRIPATHY ,B., *On weakly b-continuous functions in bitopological spaces* ,Acta scientiarum Technology Maringa'., vol (35) . 2013, No.3, p .521-525.
(24)Ghariba, Taleb; Al-Hamido, Riyad .*A Study in Multitopological Spaces*, PhD thesis 2019. Al-Baath University.