مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (1) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (1) 2015

تأثير المركبة المحدودة لمتممة المضلع المتعامد النجمي درجياً على نواته

الدكتور عدنان ظريف[*]
الدكتور رامي شاهين[**]
نجود حسن[***]

(تاريخ الإيداع 7 / 12 / 2014. قُبِل للنشر في 26 / 2 /2015)

□ ملخّص □

اهتم الكثير من الباحثين بتعيين نواة المجموعة النجمية، ففي حالة الرؤية الدرجية برهن الباحث راجيف موتواني أن نقاط المناطق المفصولة عن بعضها بالأغوار لا ترى بعضها بعضاً، ثم برهن أن هذه النقاط مرئية من نقاط أخرى من المضلع المتعامد. وبعد ذلك تمكنت الباحثة مارلين برين من إيجاد طريقة لتعيين نواة المضلع المتعامد النجمي درجياً عندما يكون المضلع المتعامد بسيط الترابط.

يهدف البحث إلى تعميم الطريقة السابقة عندما يكون المضلع المتعامد المغلق ثنائي الترابط وجبهة المركبة المحدودة للمتممة تحوي ممراً درجياً أو ممرين درجيين كل منهما مؤلف من أكثر من ضلعين، حيث سنثبت أن النواة تتألف من مركبة أو مركبتين أو ثلاث مركبات.

الكلمات المفتاحية: المضلعات المتعامدة، المجموعات النجمية ضمن ممرات درجية.

[*] أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
[**] أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
[***] طالبة دراسات عليا(دكتوراه) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

The Influence of the Bounded Component for the Complement in a Starshaped Orthogonal Polygon on its Kernel

Dr. Adnan Zarif *
Dr. Ramee Shaheen**
Njod Hassan***

(Received 7 / 12 / 2014. Accepted 26 / 2 /2015)

☐ ABSTRACT ☐

Many mathematicians were interested in specifying the kernel of the starshaped set. In staircase visibility the researcher Rajeev Motwani proved that the points of separating regions with dents cannot see each other, and then he proved that these points are seen from other points of an orthogonal polygon. After that Breen could find a way for specifying the kernel of starshaped orthogonal polygon when this orthogonal polygon is simply connected.

The aim of this paper is to generalize the previous way when the closed orthogonal polygon is secondly connected and the bounded component for the complement contains one staircase path or two staircase paths, every path consists of more than two edges. We will prove that the kernel is either one component or two or three ones.

Key words: orthogonal polygons, starshaped sets via staircase paths.

*Associate Professor, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

منذ ظهور نظرية المجموعات النجمية إلى النور اهتم الباحثون بدراسة مسائل كثيرة منها: مسألة إيجاد معايير نجمية مجموعة ما من خلال دراسة جميع نقاط هذه المجموعة أو بعض هذه النقاط، كأن ندرس نقاط جبهة المجموعة أو بعض نقاط الجبهة أو دراسة عدم وجود زوج مستقل من النقاط في المجموعة أو غير ذلك، وكذلك مسألة تغطية المجموعة النجمية بمجموعات محدبة أو بمجموعات محدبة عظمى أو تغطية المجموعات غير النجمية بمجموعات نجمية، وأيضاً مسألة تجزئة المجموعة غير النجمية إلى أقل عدد ممكن من المجموعات النجمية، ولكن المسألة التي لم تكن أقل أهمية هي مسألة تعيين نواة المجموعة النجمية لاسيما أن نقاط النواة هي النقاط الأكثر أهمية في المجموعة النجمية.

ومن أهم المعايير التي بحثت في النواة هي النظرية المشهورة لـ تورانزوس [1] عام1967، والتي تنص (إذا كانت $S \subseteq R^2$ مجموعة نجمية فإن النواة المحدبة للمجموعة S هي تقاطع جميع المجموعات المحدبة العظمى في S) وذلك في حالة الرؤية العادية، وفي عام 1992 أثبتت الباحثة مارلين برين [2] صحة نظرية مرادفة لهذه النظرية باستخدام مفهوم الرؤية الدرجية عندما تكون المجموعة S مضلعاً متعامداً بسيط الترابط، أما في عام 1990 فقد برهن الباحث راجيف موتواني [3] أن نقاط المناطق المفصولة عن بعضها بالأغوار لا ترى بعضها بعضاً، حيث أثبت صحة النظرية الآتية (إذا كانت $x, y \in S$ نقطتين كيفيتين، عندئذٍ x لا ترىy إذا وفقط إذا وجد غور D في S بحيث تنتميx إلى إحدى المنطقتين (يمين D أو يسار D) المفصولتين بهذا الغور وتنتمي y إلى الثانية)، وفي عام 1992 تمكنت الباحثة برين [2] من وضع طريقة لإيجاد نواة المضلع المتعامد بسيط الترابط و النجمي درجياً عندما تكون جبهته خطاً مغلقاً بسيطاً أو خطاً مغلقاً يقطع نفسه. ولكن عندما يكون المضلع المتعامد ثنائي الترابط فإن الطريقة السابقة غير كافية، ولا توجد طريقة عامة واحدة لإيجاد النواة حيث أنه للمركبة المحدودة للمتممة أشكالاً مختلفة وأوضاعاً مختلفة وكل من جبهة المركبة المحدودة للمتممة ووضعها يؤثر على نواة المجموعة النجمية، وفي بحثنا هذا سوف نناقش الحالة التي تحوي فيها المركبة المحدودة لمتممة المضلع المتعامد المغلق النجمي المدروس ممر درجي مؤلف من أكثر من ضلعين، أو تحوي ممرين درجيين مؤلف كل منهما من أكثر من ضلعين.

وهكذا كانت الرؤية الدرجية موضع اهتمام الكثير من الباحثين علماً أن مفهوم الرؤية الخطية قدّم العديد من النتائج القيمة في التحدب [4]، وكذلك تمت الاستفادة من نتائج في التحدب في الحصول على نتائج في النجمية.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من كونه يقدم إضافات جديدة في نظرية المجموعات النجمية في حالات متقدمة منها بالاستفادة من مفهوم الرؤية الدرجية، أما الهدف من البحث فهو تعيين عدد مركبات نواة المضلع المتعامد المغلق ثنائي الترابط و النجمي درجياً، وتعيين أماكن وجود هذه المركبات في عدة حالات.

طرائق البحث ومواده:

نعتمد في بحثنا على مفاهيم وأفكار نظرية المجموعات النجمية وعلى الأبحاث العلمية المتقدمة والحديثة في مجالي التحدب و النجمية و نستخدم المفاهيم الأساسية في التبولوجيا.

تعاريف:

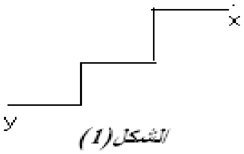
تعريف المضلع المتعامد (orthogonal polygon): [5]، [6]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية، تدعى S مضلعاً متعامداً إذا كانت اجتماعاً مترابطاً لعدد منته من المضلعات المحدبة و التي أضلاعها توازي المحاور الإحداثية.

تعريف الممر الدرجي (staircase path): [5]،[6]

ليكن λ ممراً مضلعياً بسيطاً في R^2 أضلاعه $[v_{i-1}, v_i]; i = 1,2,\dots,n$ توازي المحاور الإحداثية، يدعى الممر λ ممراً درجياً إذا لم يكن لأي اثنين من المتجهات المشكلة له (أضلاعه) $\overrightarrow{v_{i-1}\, v_i}$ اتجاهان متعاكسان.

وهكذا يكون اتجاه الممر الموضح في الشكل(1) من x إلى y هو الغرب والجنوب (أي غرب، جنوب، غرب، جنوب، غرب) ولا يمكن أن يحوي أي ضلع أفقية باتجاه الشرق ولا ضلع عمودية باتجاه الشمال.



الشكل(1)

تعريف الممر من x إلى y (x–y path): [6]، [7]

يدعى الممر λ ممراً من x إلى y في S إذا كان λ محتوى في S ويحوي النقطتين الطرفيتين x و y.

تعريف الرؤية الدرجية (staircase visibility): [6]، [7]،[8]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة كيفية ولتكن $x, y \in S$ ، يقال إن x ترى y درجياً (أو y مرئية درجياً من x) في S إذا وجد ممر درجي في S يحوي كلتا النقطتين x و y.

تعريف المجموعة النجمية درجيا (orthogonally starshaped set): [5]،[9]

تدعى المجموعة S نجمية درجياً (نجمية متعامدة) إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل p في S بحيث أن p ترى كل نقطة في S ضمن ممرات درجية في S.

تعريف النواة الدرجية (staircase kernel): [2] [6]، [10]

مجموعة جميع النقاط p التي تكون من أجلها المجموعة S نجمية درجياً تدعى النواة الدرجية للمجموعة S ونرمز لها $Ker\ S$.

تعريف المجموعة المحدبة درجيا (staircase convex set): [5]

تدعى المجموعة S محدبة درجيا (أو محدبة متعامدة) إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ فإن x ترى y ضمن ممرات درجية في S.

تعريف المجموعة المحدبة أفقياً (horizontally convex set): [2]

تدعى المجموعة S محدبة أفقياً إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ والقطعة المستقيمة $[x, y]$ أفقية فإن $[x, y] \subseteq S$.

تعريف المجموعة المحدبة عمودياً (vertically convex set): [2]

تدعى المجموعة S محدبة عمودياً إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ والقطعة المستقيمة $[x, y]$ عمودية فإن $[x, y] \subseteq S$.

تعريف نقطة التحدب الموضعي (point of local convexity of S):[4], [8], [11]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية ولتكن $x \in S$ نقطة كيفية. يقال إن x نقطة تحدب موضعي للمجموعة S إذا وفقط إذا وجدت مجاورة $N \subseteq R^2$ للنقطة x بحيث تكون المجموعة $N \cap S$ مجموعة محدبة.

تعريف الغور (dent of S):[2]

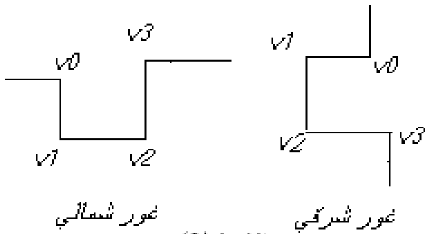
لتكن S مضلعاً متعامداً جبهته خط مغلق بسيط تدعى الضلع $[v_1 , v_2]$ غوراً في S إذا وفقط إذا لم تكن S محدبة موضعياً عند كل من النقطتين v_1 , v_2 .

يوجد نوعان للأغوار: أفقية (أغوار شمالية وأغوار جنوبية) وعمودية (أغوار شرقية وأغوار غربية).

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً شمالياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 فوق المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$ حيث أن الذروة v_0 تسبق v_1 و الذروة v_3 تلي v_2، الشكل (2) .

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً جنوبياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 تحت المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$ حيث أن الذروة v_0 تسبق v_1 و الذروة v_3 تلي v_2 .

يدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً شرقياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يمين المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$، الشكل(2)، ويدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً غربياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يسار المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$ حيث أن الذروة v_0 تسبق v_1 و الذروة v_3 تلي v_2.



الشكل(2)

سوف نستخدم الرموز الآتية: $Int\ S$، $bd\ S$،$cl(S)$، $\lambda(x,y)$ للدلالة على داخلية المجموعة S ، جبهة المجموعة S ، لصاقة المجموعة S، الممر الدرجي λ من x إلى y.

نذكر ببعض المبرهنات المستخدمة في البحث:

مبرهنة(1): [2]

كل مضلع متعامد بسيط الترابط ولا يحوي أغواراً يكون محدباً متعامداً.

مبرهنة(2): [3]

كل مضلع متعامد بسيط الترابط يحوي أغواراً عمودية فقط يكون محدباً أفقيا، وكل مضلع متعامد بسيط الترابط يحوي أغواراً أفقية فقط يكون محدباً عمودياً.

مبرهنة(3): [6]

اجتماع ممرين درجيين في S لهما نفس الاتجاه ونهاية الأول هي بداية الثاني هو ممر درجي في S.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة مساعدة (1):

لتكن $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^2$ ، $\mathbf{S} \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً، بحيث أن S نجمية درجياً، ولتكن B مركبة محدودة للمجموعة $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{S}$ عندئذٍ لا توجد أي مركبة لنواة S شمال أو شرق أو غرب أو جنوب B.

البرهان:

لتكن $x \in S$ نقطة كيفية شمال B ولنأخذ العمود L المرسوم في x فيقطع bdB في نقطة a بحيث تكون $[x,a] \subseteq S$ وطولها أعظم ما يمكن، ولتكن $y \in S \cap L$ بحيث تقع y جنوب B عندئذ توجد نقطة $b \epsilon bd\ B$ تحقق$[y,b] \subseteq$ S وطولها أعظم ما يمكن وينتج عن ذلك أن: $[a,b] \cap int\ B \neq \emptyset$، وبما أن$[a,b] \subseteq [x,y]$ فإن $[x,y] \cap int\ B \neq \emptyset$ وبالتالي $[x,y] \nsubseteq S$، ولدينا $x, y \in S$ تقعان على عمود واحد L فأي ممر درجي من

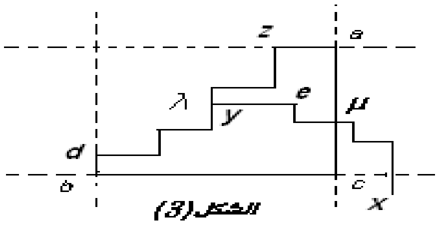
x إلى y عبارة عن القطعة المستقيمة $[x,y]$ ولكن $[x,y] \nsubseteq S$ أي أنه لا يوجد ممر درجي في S من x إلىy ، إذن x لا ترى y درجياً في S وهكذا كل نقطة شمال B لا ترى أي نقطة جنوب B وبالعكس أيضاً. وبنفس الأسلوب نثبت أن كل نقطة شرق B لا ترى أي نقطة غرب B وبالعكس أيضاً، وهكذا لا توجد أي مركبة لنواة S شمال أو شرق أو غرب أو جنوب B.

مبرهنة مساعدة (2):

لتكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً، بحيث أن S نجمية درجياً، ولتكن B مركبة محدودة للمجموعة $R^2 \setminus S$ تحوي ممراً درجياً مؤلفاً من أكثر من ضلعين، عندئذٍ لا توجد أي مركبة لنواة S في عكس الجهة التي يوجد فيها الممر الدرجي بالنسبة إلى B.

البرهان:

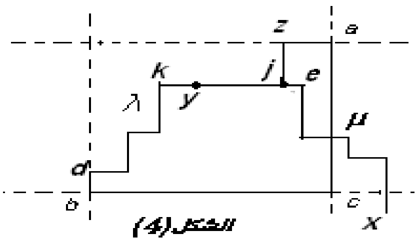
لتكن جبهة B تحوي الممر الدرجي $\lambda(a,b)$ المؤلف من أكثر من ضلعين ولنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن a في الشمال الشرقي من b وهكذا يكون اتجاه $\lambda(a,b)$ هو الغرب والجنوب من a إلى b ولنفرض أن بقية نقاط B bd هي اجتماع الضلعين المتجاورين $[a,c] \cup [c,b]$ في مستطيل حيث c جنوب a، وينتج عن ذلك أن نقاط B غرب $[a,c]$ وشمال $[b,c]$ وشرق وجنوب λ لذلك لا توجد مركبة لنواة S في الجنوب الشرقي منB ، ولإثبات ذلك لتكن $x \epsilon S$ نقطة كيفية في الجنوب الشرقي من B ، وهذا يعني أن x نقطة من الربع المقابل للربع الذي يحوي B ونقطة المبدأ فيه c وكذلك يمكن أن تكون x نقطة من المحورين الإحداثيين في هذا الربع، ولنبرهن أن x لا ترى نقاط λ بين النقطتين d وz، ومن أجل ذلك لتكن y نقطة كيفية من نقاط $\lambda(a,b)$ تقع بين النقطتين d وz بحيث $y \neq d, y \neq z$ وليكن μ ممراً درجياً من x إلى y، عندئذٍ بما أن y في الشمال الغربي من x فأي ممر درجي من x إلى y سوف يكون اتجاهه الشمال والغرب وهذا يعني أن الضلع الأخيرة في μ عند y إما أفقية شرق y أو عمودية جنوب y، ولنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن الضلع الأخيرة في μ أفقية شرق y ولنفرضها $[e,y]$ فينتج لدينا:



الشكل(3)

1) عندما y نقطة من ضلع عمودية في $\lambda(z,d)$ فإن أول نقطة في $[e,y]$ شرق y تكون من $int\ B$ لأنها شرق y أي شرق λ وغرب $[a,c]$ وينتج عن ذلك أن: $int\ B \cap [e,y] \neq \emptyset$ ومنه $[e,y] \nsubseteq S$ إذن $\mu \nsubseteq S$، الشكل(3).

2) عندما y نقطة من ضلع أفقية $[k,j]$ في $\lambda(z,d)$ ولدينا $[e,y]$ ضلع أفقية في μ فإن هاتين الضلعين يمكن أن تتقاطعا في نقاط أخرى بالإضافة إلى y وهنا نميز حالتين:

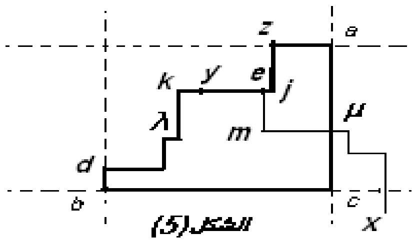


الشكل(4)

–إما $[k,j] \cap [e,y] = [y,j]$ وبالتالي أول نقطة في $[e,y]$ شرق j هي نقطة من $int\ B$ لأنها شرق λ وغرب $[a,c]$ ومنه $[y,e] \cap int\ B \neq \emptyset$ ولذلك $[e,y] \nsubseteq S$ إذن $\mu \nsubseteq S$، الشكل (4)، ونناقش بشكل مشابه عندما $[k,j] \cap [e,y] = [k,j]$.

–أو $[k,j] \cap [e,y] = [e,y]$ وهكذا $[e,y] \subseteq [k,j] \subseteq S$ وبما أن $[e,y]$ أفقية شرق y فإن الضلع التي تسبقها

مباشرة في μ عمودية جنوب e ولتكن $[e,m]$، ونلاحظ أن أول نقطة في $[e,m]$ بعد e هي من $int\ B$ لأنها شرق λ وغرب $[a,c]$ أي تنتج العلاقة $[e,m] \cap int\ B \neq \emptyset$ وبما أن $[e,m]$ ضلع من μ فإن $\mu \cap int\ B \neq \emptyset$ إذن $\mu \nsubseteq S$ ، الشكل (5).



الشكل(5)

في جميع الحالات السابقة وجدنا أن $\mu \nsubseteq S$ وبما أن μ كيفي لا يوجد أي ممر درجي في S من x إلى y، وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد أن أي نقطة في الجنوب الشرقي من B لا ترى جميع نقاط λ وبالتالي ليست من نقاط النواة، ولذلك لا توجد أي مركبة لنواة S في الجنوب الشرقي من B.

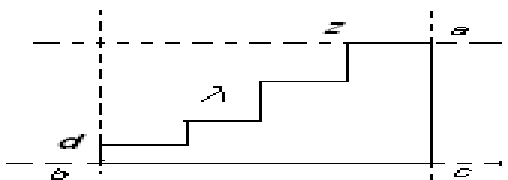
مبرهنة (1):

لتكن $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، بحيث أن S نجمية درجياً، عندئذ إذا كانت جبهة المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ اجتماع ضلعين متجاورين في مستطيل مع ممر درجي مؤلف من أكثر من ضلعين فإن نواة S تتألف من مركبة أو مركبتين أو ثلاث مركبات.

البرهان:

بما أن S مغلقة في الفضاء الإقليدي R^2 فإن متممتها مفتوحة في هذا الفضاء لذلك تكون المركبة المحدودة B للمتممة $R^2 \setminus S$ مفتوحة وينتج عن ذلك أن $B = int\ B$، ولتكن جبهة B اجتماع الضلعين المتجاورين $[a,c] \cup [c,b]$ في مستطيل مع الممر الدرجي $\lambda(a,b)$، ولنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن a في الشمال الشرقي من b وأن c جنوب a وهكذا يكون اتجاه $\lambda(a,b)$ هو الغرب والجنوب من a إلى b، وينتج عن ذلك أن نقاط B غرب $[a,c]$ وشمال $[b,c]$ وشرق وجنوب $\lambda(a,b)$، الشكل(6).

ليكن A أصغر مستطيل يحوي B فنجد أن $[a,c]$ و $[b,c]$ ضلعين مشتركين في A و $bd\ B$، ولنأخذ المستقيمات الحاملة لأضلاع A فينقسم المستوي إلى ثمانية أجزاء غير محدودة وجزء واحد محدود هو A.



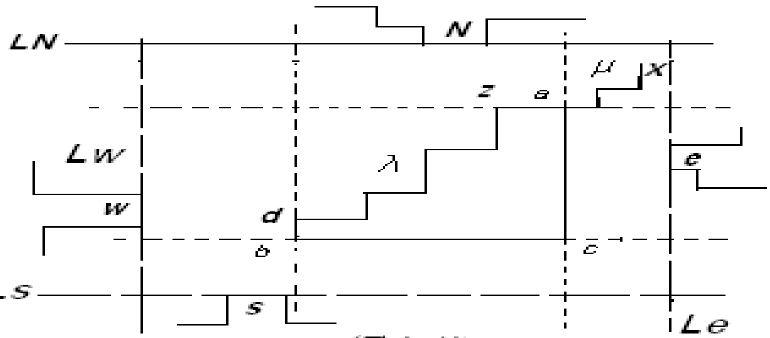
الشكل(6)

لدينا بالفرض S مجموعة نجمية بالتالي $Ker\ S \neq \phi$ وبما أن S ثنائية الترابط فإن نواتها ليست بالضرورة مركبة واحدة وإنما عدة مركبات، ولتعيين هذه المركبات نناقش كما يلي: لا توجد أي مركبة لنواة S شرق أو غرب أو جنوب أو شمال B وذلك حسب المبرهنة المساعدة(1)، وكذلك حسب المبرهنة المساعدة(2) لا توجد أي مركبة لنواة S في الجنوب الشرقي من B ، أما بقية أجزاء المستوي وهي الشمال الشرقي من B والشمال الغربي من B والجنوب الغربي من B يمكن أن تحوي مركبات لنواة S في الحالة العامة ولنبرهن ذلك

نعلم أنه يمكن أن تحوي المجموعة النجمية أغواراً لذلك سوف نناقش كما يلي:

إذا كانت S تحوي أغواراً شرقية، نفرض أن L_e المستقيم الحامل لضلع الغور e ذات الإحداثي x الأصغر، وأن P_e نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_e وإلى الغرب منه، وكذلك عندما تحوي S أغواراً شمالية نفرض أن

L_N المستقيم الحامل لضلع الغور N ذات الإحداثي y الأصغر، وأن P_N نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_N وإلى الجنوب منه، أما إذا كانت S تحوي أغواراً غربية نفرض أن L_W المستقيم الحامل لضلع الغور w ذات الإحداثي x الأكبر، وأن P_W نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_W وإلى الشرق منه، وعندما تحوي S أغواراً جنوبية نفرض أن L_S المستقيم الحامل لضلع الغور s ذات الإحداثي y الأكبر، وأن P_S نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_S وإلى الشمال منه، الشكل (7).



الشكل (7)

لتكن المجموعة $T = \left(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\right) \cap S$ وهنا نلاحظ أنه $\forall x \in S \setminus T$ فإن $x \notin Ker\ S$ حيث برهن الباحث موتواني أن نقاط المناطق المفصولة عن بعضها بالأغوار لا ترى بعضها بعضاً، انظر [3]، كما برهنت الباحثة برين أنه عندما تكون S بسيطة الترابط فإن $T = Ker\ S$ ، انظر[2]، وينتج مما سبق ومن كون S ثنائية الترابط أنه $\forall x \epsilon \ker S$ فإن $x \in T$ أي أن $ker\ S \subseteq T$، ونعلم أنه يمكن أن تأخذ المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ أوضاعاً مختلفة داخل S وبما أن الدراسة متشابهة سوف ندرس بالتفصيل أحد هذه الأوضاع وهو $bd\ B \subseteq T$، وندرس باختصار بقية الحالات، انظر [11].

لتكن $bd\ B \subseteq T$ ولنبرهن على وجود مركبة لنواة S في الشمال الشرقي من B:

لتكن D مجموعة نقاط T في الشمال الشرقي من B وهذا يعني أن D جزء من T محدودة بالمستقيم العمودي $L(a, c)$ من الغرب وبالمستقيم الأفقي$L(a, z)$ من الجنوب وتحوي نقاط هذين المستقيمين الموجودة في هذه المنطقة، وبما أن T لا تحوي أغواراً وأخذنا D جزءاً منها بحيث جبهة D هي جزء من جبهة T الموجود في الشمال الشرقي من B اجتماع القطعتين المستقيمتين المتعامدتين في a والموجودتين داخل T في الشمال الشرقي من B فإن D مضلعاً متعامداً (حيث أنD مجموعة مترابطة) لا يحوي أغواراً، وكذلك D بسيطة الترابط (لأن $int\ B \cap D = \emptyset$)، وحسب المبرهنة (1) في العمل [2] تكون D محدبة متعامدة.

لتكن $x \in D$ نقطة كيفية، ولنبرهن أن x ترى درجياً جميع نقاط S، ومن أجل ذلك نبين أولاً أن x ترى نقاط $bd\ B$ وثانياً أن x ترى بقية نقاط S.

لدينا $a \in D$ لأن $a \in T$ وموجودة في الشمال الشرقي من B ، عندئذٍ x ترى a ضمن ممرات درجية في D (لأن D محدبة متعامدة) وبالتالي في S (لأن $D \subseteq S$ فكل ممر درجي فيD هو ممر درجي في S)، وهذا يعني أنه يوجد ممر درجي في S من x إلى a ولنفرضه μ.

أولاً: إن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$ ولنثبت ذلك كما يلي:

نلاحظ أن x في الشمال الشرقي من a أو شمال a أو شرق a لذلك الضلع الأخيرة في μ إما أفقية شرق a أوعمودية شمال a ويكون اتجاه μ هو الغرب والجنوب من x إلى a ، ولدينا اتجاه $\lambda(a,b)$ هو الغرب والجنوب من a إلى b وينتج عن ذلك أن $\lambda \cup \mu$ ممر درجي في S من x إلى b وذلك حسب المبرهنة (3) في العمل [6]، وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط هذا الممر، وكذلك يكون $[a,c] \cup [c,b]$ ممراً درجياً في S من a إلى b اتجاهه الجنوب والغرب و وينتج عن ذلك أن $\mu \cup [a,c] \cup [c,b]$ ممر درجي في S من x إلى b ، وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط هذا الممر، الشكل (7).

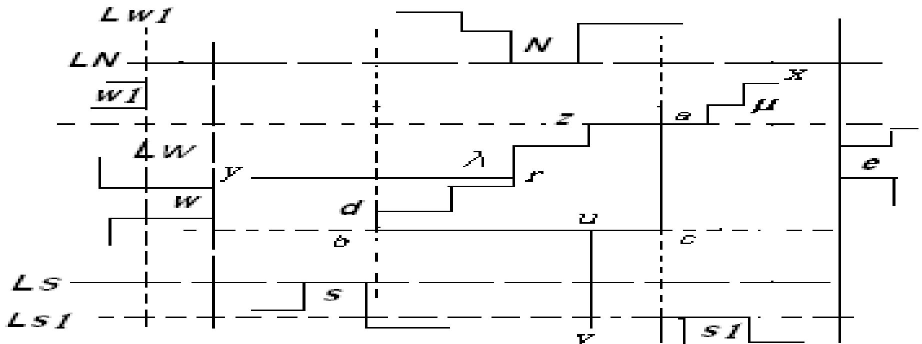
ثانياً: لنبرهن أن x ترى درجياً في S بقية نقاط S ومن أجل ذلك سوف نقسّم S إلى مجموعات جزئية كما يلي:

- **المجموعة E**

لنأخذ جزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,c)$ وإلى الشرق منه وجزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,z)$ وإلى الشمال منه فنحصل على المجموعة E الجزئية من S، وهذه المجموعة مضلع متعامد بسيط الترابط (حيث أن E مجموعة مترابطة و $E \cap int\ B = \emptyset$) ولنوجد نواة E، الشكل (8).

إن E يمكن أن تحوي أغواراً من مختلف الأنواع وفي هذه الحالة المستقيمان L_e و L_N يبقيان كما هما (لأن أجزاء المجموعة S في جهتيهما بقيت نفسها في E) وإذا كانت E تحوي الغورين الجنوبي s والغربي w السابقين فإن L_S و L_W يبقيان نفسيهما، أما إذا لم يتحقق ذلك نأخذ المستقيم L_{S1} الحامل لضلع الغور الجنوبي s_1 ذات الإحداثي y الأكبر في E ولنفرض أن P_{S1} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{S1} وإلى الشمال منه، ولنأخذ المستقيم L_{W1} الحامل لضلع الغور الغربي w_1 ذات الإحداثي x الأكبر في E ولنفرض أن P_{W1} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{W1} وإلى الشرق منه، فنحصل على نواة E المعطاة بالعلاقة: $Ker\ E = [cl(P_N) \cap cl(P_e) \cap cl(P_{s1}) \cap cl(P_{w1})] \cap E$ وهذه العلاقة تبين أن نواة E هي: اجتماع جزء من الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين L_N و $L(a,z)$ مع جزء من الشريط العمودي المحدد بالمستقيمين L_e و $L(a,c)$ والمتقاطعين في الشمال الشرقي من B، ولدينا D هي مجموعة نقاط T الموجودة في الشمال الشرقي من B وبالتالي $D \subseteq E$ ولنبرهن أن $D \subseteq Ker\ E$:

لتكن $y \in D$ نقطة كيفية، عندئذٍ إما y تقع على L_e أو غربه وبالتالي $y \in cl(P_e)$ وكذلك إما y تقع على L_N أو جنوبه وبالتالي $y \in cl(P_N)$، أو y تقع على $L(a,z)$ أو شماله وهو شمال كل من L_{S1} و L_S وبالتالي $y \in cl(P_{S1})$، أو y تقع على $L(a,c)$ أو شرقه وهو شرق كل من L_{W1} و L_W وبالتالي $y \in cl(P_{W1})$ وهكذا نجد أن: $y \epsilon [cl(P_N) \cap cl(P_e) \cap cl(P_{s1}) \cap cl(P_{w1})] \cap E$ ومنه $y \in Ker\ E$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة y نجد أن $D \subseteq Ker\ E$.



الشكل (8)

لدينا $x \in D$ وبالتالي $x \epsilon ker\ E$ وهكذا ترى x درجياً في E كل نقطة من E، وبما أن $E \subseteq S$ فكل ممر درجي في E هو ممر درجي في S وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من E.

- **غرب المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \backslash S$ بما فيها نقاط S داخل المستطيل A:**

نشير أولاً أن هذه المجموعة مجموعة محدبة أفقياً حسب المبرهنة(2) في العمل [3]، وهكذا من أجل كل نقطة $y \in S$ غرب B نأخذ القطعة المستقيمة الأفقية $[r, y]$ حيث $r \in bd\ B$ وهي أقرب نقطة في $bd\ B$ إلى y فتكون $[r, y] \subseteq S$، ونحصل على $\mu \cup \lambda(a, r) \cup [r, y]$ وهو ممر درجي في S من x إلى y، الشكل (8)، وينتج عن ذلك أن x ترى y درجياً في S وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة y نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة غرب المركبة المحدودة B.

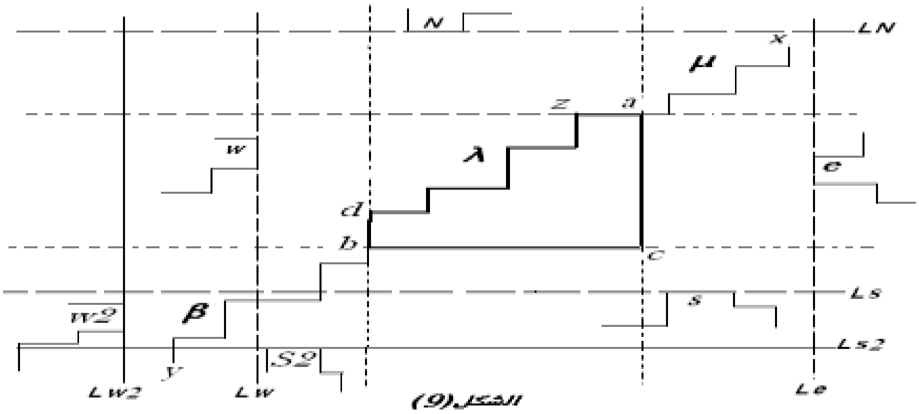
- **جنوب المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \backslash S$:**

نشير أولاً أن هذه المجموعة مجموعة محدبة عمودياً حسب المبرهنة(2) في العمل [3]، وهكذا من أجل كل نقطة $v \in S$ جنوب B نأخذ القطعة المستقيمة العمودية $[u, v]$ حيث $u \in bd\ B$ وهي أقرب نقطة في $bd\ B$ إلى v (أي أن $u \in (b, c)$) فتكون $[u, v] \subseteq S$، الشكل(8)، ونحصل على $\mu \cup [a, c] \cup [c, u] \cup [u, v]$ وهو ممر درجي في S من x إلى v، وينتج عن ذلك أن x ترى v درجياً في S، وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة v نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة جنوب B.

- **المجموعة P**

وهي جزء المجموعة S في الجنوب الغربي من B، وهكذا تكون P مجموعة جزئية من S محدودة من الشرق بالمستقيم العمودي $L(b, d)$ ومن الشمال بالمستقيم الأفقي $L(b, c)$ وبالتالي جبهة P عبارة عن الجزء من جبهة S الموجود في الجنوب الغربي من B اجتماع القطعتين المستقيمتين المتعامدتين في b والموجودتين في الجنوب الغربي من B ضمن المجموعة S والجزئيتين من المستقيمين $L(b, d)$ و $L(b, c)$ وهذا يعني أن P مضلع متعامد (حيث أن P مجموعة مترابطة) وهو بسيط الترابط لأن $P \cap int\ B = \emptyset$، ولتعيين نواة P نلاحظ أن P لا تحوي أي غور شرقي لأنها غرب L_e وكذلك لا تحوي أي غور شمالي لأنها جنوب L_N ولكن يمكن أن تحوي أغواراً غربية وجنوبية، فإذا كانت P تحوي الغورين الجنوبي s والغربي w السابقين فإن L_S و L_W يبقيان نفسيهما، أما إذا لم يتحقق ذلك:

نأخذ المستقيم L_{S2} الحامل لضلع الغور الجنوبي s_2 ذات الإحداثي y الأكبر في P ونفرض أن P_{S2} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{S2} وإلى الشمال منه، ونأخذ المستقيم L_{W2} الحامل لضلع الغور الغربي w_2 ذات الإحداثي x الأكبر في P ونفرض أن P_{W2} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{W2} وإلى الشرق منه فنحصل على: $Ker\ P = [cl(P_{S2}) \cap cl(P_{W2}) \cap R^2] \cap P$، الشكل(9)، (إذ أنه عندما لا تحوي S أغواراً من نوع معين مثل الغور الشمالي N نأخذ بدلا من $cl(P_N)$ المجموعة R^2 في إيجاد T).



الشكل(9)

إن $b \in P$ وهي شمال L_{S2} أي أن $b \in cl(P_{S2})$ وأيضاً b شرق L_{W2} أي أن $b \in cl(P_{W2})$ إذن: $b \in [cl(P_{S2}) \cap cl(P_{W2}) \cap R^2] \cap P$ أي أن $b \in Ker\ P$، وبالتالي b ترى درجياً في P كل نقطة من P وبما أن $P \subseteq S$ فهذه الممرات الدرجية محتواة في S وهكذا من أجل كل $y \in P$ يوجد ممر درجي β في S من b إلى y ونحصل على: $\mu \cup [a,c] \cup [c,b] \cup \beta$ أو $\mu \cup \lambda \cup \beta$ حيث أن كلاً منهما ممر درجي في S من x إلى y ، وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة y نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من P.

من المناقشة السابقة في أولاً وثانياً نستنتج أن x ترى درجياً في S كل نقطة من S وهذا يعني أن $x \in Ker\ S$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة $x \in D$ نجد أن $D \subseteq Ker\ S$ ، وهكذا نكون قد برهنا أن D مركبة لنواة S، وبنفس الأسلوب نبرهن على وجود مركبة لنواة S في الجنوب الغربي من B تحوي النقطة b، ومركبة في الشمال الغربي من B خارج المستطيل المفتوح A تحوي نقاط المستقيمين الأفقي $L(a,z)$ والعمودي $L(b)$ الموجودة داخل T في هذه المنطقة، وينتج عن ذلك أنه لنواة S على الأكثر ثلاث مركبات.

ملاحظات عندما $bd\ B \subseteq T$:

1) إن كل من a, b تنتمي إلى T وبما أن كل منهما تنتمي إلى إحدى مركبات النواة فإن كل من المركبة التي تحوي a والمركبة التي تحوي b موجودة، أما إذا كانت S لا تحوي نقاط في الشمال الغربي من B خارج المستطيل المفتوح A فإنه لا توجد مركبة لنواة S في هذه الجهة، ويكون لنواة S مركبتين فقط.

2) عندما ينطبق $L(a,z)$ على L_N فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة أفقية، وكذلك عندما ينطبق $L(a,c)$ على L_e فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة عمودية، وعندما ينطبقا معاً فإن D عبارة عن النقطة a.

3) بتدوير جبهة المركبة المحدودة B داخل T بزوايا قائمة تتغير مواضع a و b و c والممر الدرجي λ وبالتالي تتغير مواضع مركبات النواة ولكنها تبقى متطابقة مع الأوضاع التي حصلنا عليها في المناقشة السابقة بمعنى أن إحدى هذه المركبات تحوي a والثانية تحوي b والثالثة (إن وجدت) مقابل الممر الدرجي λ ولا توجد مركبة لنواة S في عكس الجهة التي تحوي الممر الدرجي λ بالنسبة إلى B.

مناقشة الحالات الأخرى:

1) $bd\ B$ شمال أو شرق أو غرب أو جنوب T :

لنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن $bd\ B$ شمال T، وبمناقشة مماثلة للمناقشة السابقة نجد أنه لنواة S مركبة واحدة فقط هي نقاط T في الجنوب الغربي من B أي هي نقاط T غرب الشريط العمودي المحدد

بالمركبة المحدودة B (حيث أن B في وضعها المدروس سابقاً) وبتدوير B بزوايا قائمة يمكن أن نحصل على مركبة أو مركبتين لنواة S إحداهما شرق الشريط العمودي المحدد بالمركبة المحدودة B والأخرى غربه.

2) $bd\ B$ في الشمال الشرقي أو الشمال الغربي أو الجنوب الشرقي أو الجنوب الغربي من T:

لنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن $bd\ B$ في الشمال الشرقي من T، فتكون T في الجنوب الغربي من B وهكذا نواة S تكون عبارة عن مركبة واحدة فقط هي T (حيث أن B في وضعها المدروس سابقاً) وبتدوير المركبة المحدودة B بزوايا قائمة نحصل على مركبة واحدة فقط لنواة S هي T بشرط أن لا تصبح T في عكس الجهة التي تحوي الممر الدرجي λ بالنسبة إلى B لأن S تصبح غير نجمية.

3) $bd\ B$ تتقاطع مع كل من $int\ T$ و $int(S\backslash T)$:

عندما $int\ B$ تتقاطع مع واحد فقط من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N فإنه يكون لنواة S مركبة أو مركبتين (حيث أن B في وضعها المدروس سابقاً)، وبتدوير المركبة المحدودة B بزوايا قائمة نحصل على مركبة واحدة أو مركبتين لنواة S، أما عندما تتقاطع $int\ B$ مع اثنين فقط من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N وغير متوازيين، فإنه يكون لنواة S مركبة واحدة فقط، بشرط أن لا تصبح بقية نقاط T (بعد حذف الشريطين العمودي والأفقي) في عكس الجهة التي تحوي الممر الدرجي λ بالنسبة إلى B، لأن S تصبح غير نجمية، وكذلك لا يمكن أن تتقاطع $int\ B$ مع مستقيمين متوازيين من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N لأنها أيضاً تصبح غير نجمية.

4) عندما $bd\ B \subset (S \setminus T)$ و $int\ B$ تتقاطع مع واحد من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N:

لنفرض بدون المساس بعمومية المسألة **أن** $int\ B \cap L_e \neq \emptyset$ (هذا التقاطع عبارة عن قطعة مستقيمة) وبمناقشة مماثلة للمناقشة السابقة نجد أنه لنواة S مركبة واحدة فقط هي نقاط T غرب الشريط العمودي المحدد بالمركبة المحدودة B (حيث أن B في وضعها المدروس سابقاً) وبتدوير B بزوايا قائمة نحصل أيضاً على مركبة واحدة فقط لنواة S ، بشرط أن لا تصبح بقية نقاط T (بعد حذف الشريطين العمودي والأفقي) في عكس الجهة التي تحوي الممر الدرجي λ بالنسبة إلى B، لأن S تصبح غير نجمية.

مبرهنة (2):

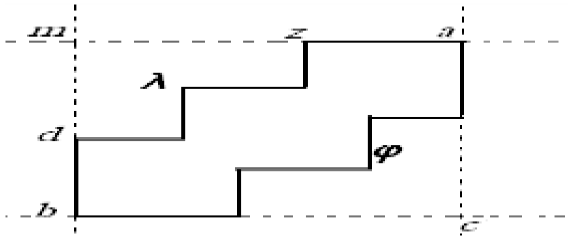
لتكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، بحيث أن S نجمية درجياً، عندئذ إذا كانت جبهة المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ تحوي ممرين درجيين كل منهما مؤلف من أكثر من ضلعين فإن نواة S تتألف من مركبة أو مركبتين.

البرهان: نميز حالتين:

1-جبهة المركبة المحدودة B تتألف من اجتماع ممرين درجيين فقط وبالتالي يجب أن يكون لهما نفس الاتجاه ويشتركان فقط بنقطتين مختلفتين.

بما أن S مغلقة في R^2 فإن المركبة المحدودة B للمتممة $R^2\backslash S$ مفتوحة، ولتكن $bd\ B$ اجتماع الممرين الدرجيين $\varphi(a,b)$ و $\lambda(a,b)$ المشتركين بالنقطتين الطرفيتين a و b، ولنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن a في الشمال الشرقي من b وهكذا يكون اتجاه كل من $\varphi(a,b)$ و $\lambda(a,b)$ هو الغرب والجنوب من a إلى b، وينتج عن ذلك أن نقاط B غرب وشمال $\lambda(a,b)$، وشرق وجنوب $\varphi(a,b)$، الشكل (10).

ليكن A أصغر مستطيل يحوي B ولنفرض أن المستطيل A هو $acbm$ حيث أن c جنوب a ولنأخذ المستقيمات الحاملة لأضلاع A فينقسم المستوي إلى ثمانية أجزاء غير محدودة وجزء واحد محدود فقط هو A .



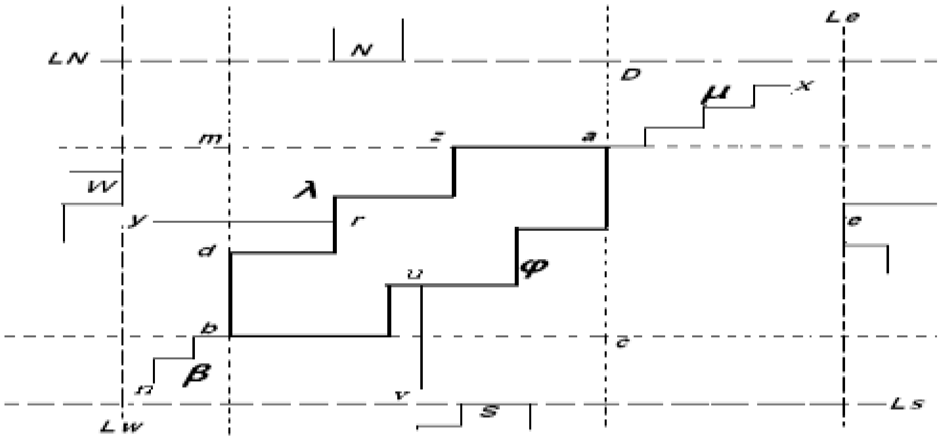
الشكل (10)

لدينا بالفرض S مجموعة نجمية بالتالي $Ker\ S \neq \phi$، ولتعيين مركبات النواة وجدنا أنه لا توجد أي مركبة لنواة S شرق أو غرب أو جنوب أو شمال B وذلك حسب المبرهنة المساعدة (1)، وأيضاً لا توجد أي مركبة لنواة S في الجنوب الشرقي من B أو في الشمال الغربي من B لأنها لا ترى جميع نقاط $\lambda(a,b)$ و $\varphi(\mathrm{a},\mathrm{b})$ على الترتيب وذلك حسب المبرهنة المساعدة (2)، أما بقية أجزاء المستوي وهي الشمال الشرقي من B والجنوب الغربي من B يمكن أن تحوي مركبات لنواة S في الحالة العامة ولنبرهن ذلك.

نعلم أنه يمكن أن تحوي المجموعة النجمية أغواراً، لذلك إذا كانت S تحوي أغواراً شرقية أو غربية أو جنوبية أو شمالية نأخذ المستقيمات P_e, P_W, P_S, P_N كما في المبرهنة (1)، وأنصاف المستويات المفتوحة $L_e, \mathrm{L_W}, \mathrm{L_S}, \mathrm{L_N}$ ولتكن المجموعة $T: T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$ وبالتالي $\ker S \subseteq T$، وبما أن B يمكن أن تأخذ أوضاعاً مختلفة داخل S سوف ندرس أحد هذه الأوضاع وتُدرس بقية الأوضاع بشكل مشابه، أي عندما $bd\ B \subseteq T$ لنبرهن على وجود مركبة لنواة S في الشمال الشرقي من B.

لتكن D مجموعة نقاط T في الشمال الشرقي من B وهذا يعني أن D جزء من T محدودة بالمستقيم العمودي $L(a,c)$ من الغرب وبالمستقيم الأفقي $L(a,z)$ من الجنوب وتحوي نقاط هذين المستقيمين الموجودة في هذه المنطقة، وقد أثبتنا في المبرهنة (1) أن D مضلع محدب متعامد، ولنبرهن أن D مركبة لنواة S.

لتكن $x \in D$ نقطة كيفية، ولنبرهن أن x ترى درجياً جميع نقاط S، ومن أجل ذلك لدينا $a \in D$ لأن $a \in T$ وموجودة في الشمال الشرقي من B، عندئذٍ x ترى a درجياً في D وبالتالي في S (لأن $D \subseteq S$)، وهذا يعني أنه يوجد ممر درجي في S من x إلى a ولنفرضه μ، الشكل (11).



الشكل (11)

أولاً: إن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$ ولنثبت ذلك كما يلي:

نلاحظ أن x في الشمال الشرقي من a أو شمال a أو شرق a وبالتالي يكون اتجاه μ هو الغرب والجنوب من x إلى a ، ولدينا اتجاه كل من $\lambda(a,b)$ و $\varphi(\mathrm{a,b})$ هو الغرب والجنوب من a إلى b وينتج عن ذلك أن كلاً من $\mu \cup \lambda$ و $\mu \cup \varphi$ ممر درجي في S من x إلى b ، وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط هذين الممرين، وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$، الشكل (11).

ثانياً: لنبرهن أن x ترى درجياً في S بقية نقاط S ومن أجل ذلك سوف نقسّم S إلى مجموعات جزئية كما يلي:

- **المجموعة E**

لنأخذ جزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,c)$ وإلى الشرق منه وجزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,z)$ وإلى الشمال منه فنحصل على المجموعة E الجزئية من S، وهذه المجموعة مضلع متعامد بسيط الترابط (لأن E مجموعة مترابطة و $E \cap int\ B = \emptyset$)، الشكل (11)، ولإيجاد نواة E نحصل بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1) على صحة العلاقة $D \subseteq Ker\ E$، ولدينا $x \in D$ وبالتالي $x \in \ker E$ وهكذا ترى x درجياً في E كل نقطة من E، وبما أن $E \subseteq S$ فإن x ترى درجياً في S كل نقطة من E.

- **غرب المركبة المحدودة B بما فيها نقاط S داخل المستطيل A:**

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1): من أجل كل نقطة $y \in S$ غرب المركبة المحدودة B نأخذ $[r,y] \subseteq S$، ونحصل على $\mu \cup \lambda(a,r) \cup [r,y]$ وهو ممر درجي في S من x إلى y ، الشكل (11).

- **جنوب المركبة المحدودة B بما فيها نقاط S داخل المستطيل A:**

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1): من أجل كل نقطة $v \in S$ جنوب B نأخذ $[u,v] \subseteq S$، ونحصل على $\mu \cup \varphi(\mathrm{a,u}) \cup [\mathrm{u,v}]$ وهو ممر درجي في S من x إلى v ، الشكل (11).

- **المجموعة P**

وهي جزء المجموعة S في الجنوب الغربي من B، وهكذا تكون P مجموعة جزئية من S محدودة من الشرق بالمستقيم العمودي $\mathrm{L(b,d)}$ ومن الشمال بالمستقيم الأفقي $\mathrm{L(b,c)}$ ، أي أن جبهة P عبارة عن الجزء من جبهة S الموجود في الجنوب الغربي من B اجتماع القطعتين المستقيمتين المتعامدتين في b والموجودتين في الجنوب الغربي من B ضمن المجموعة S ولذلك P مضلع متعامد (حيث أن P مجموعة مترابطة) وهو بسيط الترابط لأن $P \cap int\ B = \emptyset$، ولنعين نواة P كما في المبرهنة (1) فنجد أن $b \in Ker\ P$ ولذلك b ترى درجياً في P (وبالتالي في S) كل نقطة من P وهكذا من أجل كل $n \in P$ يوجد ممر درجي β في S من b إلى n و نحصل على: $\mu \cup \varphi \cup \beta$ أو $\mu \cup \lambda \cup \beta$ وكل منهما ممر درجي في S من x إلى n ، وبما أن $n \in P$ نقطة كيفية فإن x ترى درجياً في S كل نقطة من P.

من المناقشة السابقة في أولاً و ثانياً نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من S وهذا يعني أن $x \in Ker\ S$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة $x \in D$ نجد أن $D \subseteq Ker\ S$ ، وهكذا نكون قد برهنا أن D مركبة لنواة S، وبنفس الأسلوب نبرهن على وجود مركبة لنواة S في الجنوب الغربي من B تحوي النقطة b.

ملاحظات عندما $bdB \subseteq T$:

1) إن كل من a,b تنتمي إلى T وبما أن كل منهما تنتمي إلى إحدى مركبات النواة فإن كل من مركبتي النواة موجودة، وبتدوير جبهة المركبة المحدودة B داخل T بزوايا قائمة تتغير مواضع مركبات النواة ونحصل في كل وضع على مركبتين فقط إحداهما تحوي a والثانية تحوي b .

2) عندما ينطبق $L(a,z)$ على L_N فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة أفقية، وكذلك عندما ينطبق $L(a,c)$ على L_e فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة عمودية، وعندما ينطبقا معاً فإن D عبارة عن النقطة a.

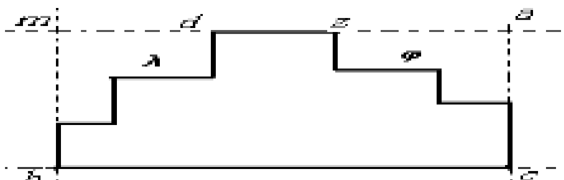
مناقشة الحالات الأخرى:

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1) لجميع الحالات نجد أنه لنواة S مركبة واحدة فقط وبتدوير جبهة المركبة المحدودة B بزوايا قائمة تتغير مواضع النواة ونحصل في كل وضع على مركبة واحدة فقط، بشرط أن لا تصبح T (أو بقية نقاط T بعد حذف نقاط الشريطين العمودي والأفقي المحددين بالمركبة المحدودة B) في عكس الجهة التي تحوي أحد الممرين الدرجيين λ أو φ بالنسبة إلى B.

2−جبهة المركبة المحدودة B تحوي ممرين درجيين يشتركان بضلع واحدة فقط وبالتالي يجب أن يكون لهذين الممرين اتجاهان مختلفان وأن تحوي جبهة B قطعة مستقيمة توازي الضلع المشتركة بين الممرين.

لنفرض أن جبهة B اجتماع الممرين الدرجيين $\varphi(d,c)$ و $\lambda(z,b)$ مع القطعة المستقيمة $[b,c]$ التي توازي الضلع الأفقية $[d,z]$ المشتركة بين الممرين φ و λ، ولنفرض بدون المساس بعمومية المسألة أن اتجاه $\lambda(z,b)$ هو الغرب والجنوب من z إلى b، وأن اتجاه $\varphi(\mathrm{d},\mathrm{c})$ هو الشرق والجنوب من d إلى c وينتج عن ذلك أن نقاط B غرب وجنوب φ وشرق وجنوب λ وشمال $[b,c]$، الشكل(12).

ليكن A أصغر مستطيل يحوي B ولنفرض أن المستطيل A هو $acbm$ حيث c جنوب a ولنأخذ المستقيمات الحاملة لأضلاع A فينقسم المستوي إلى ثمانية أجزاء غير محدودة وجزء واحد محدود فقط هو A .



الشكل(12)

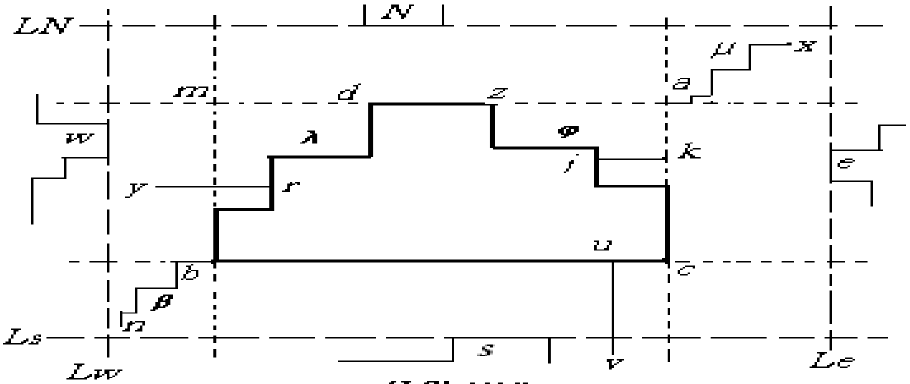
لدينا بالفرض S مجموعة نجمية بالتالي $Ker\ S \neq \phi$، ولتعيين مركبات النواة نلاحظ أنه لا توجد أي مركبة لنواة S شرق أو غرب أو جنوب أو شمال B وذلك حسب المبرهنة المساعدة (1)، وأيضاً لا توجد أي مركبة لنواة S في الجنوب الشرقي من B أو في الجنوب الغربي من B وذلك حسب المبرهنة المساعدة (2)، أما بقية أجزاء المستوي وهي الشمال الشرقي من B والشمال الغربي من B يمكن أن تحوي مركبات لنواة S في الحالة العامة ولنبرهن على وجود مركبة لنواة S في الشمال الشرقي من B ، ومن أجل ذلك نوجد المجموعة $T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$ كما في المبرهنة (1)، فتكون $kerS \subseteq T$ وبما أن المركبة المحدودة B يمكن أن تأخذ أوضاعاً مختلفة داخل S والدراسة متشابهة سوف ندرس أحد هذه الأوضاع وهو $bd\ B \subseteq T$، وتُدرس بقية الحالات بشكل مشابه.

لتكن D مجموعة نقاط T في الشمال الشرقي من B وهذا يعني أن D جزء من T محدودة بالمستقيم العمودي $L(a,c)$ من الغرب وبالمستقيم الأفقي$L(a,z)$ من الجنوب وتحوي نقاط هذين المستقيمين الموجودة في هذه المنطقة داخل T ، وكما في المبرهنة (1) نجد أن D مضلع محدب متعامد.

لتكن $x \in D$ نقطة كيفية، ولنبرهن أن x ترى درجياً جميع نقاط S، ومن أجل ذلك لدينا $a \in D$ لأن $a \in T$ وموجودة في الشمال الشرقي من B ، عندئذٍ x ترى a ضمن ممرات درجية في D وبالتالي في S ، وهذا يعني أنه يوجد ممر درجي في S من x إلى a ولنفرضه μ، الشكل (13) .

أولاً: إن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$ ولنثبت ذلك:

نلاحظ أن $[a,z] \subseteq S$ (لأنه لا يوجد غور يفصل a عن z ولا توجد مركبة محدودة للمتممة تفصل a عن z) واتجاهها هو الغرب من a إلى z وهكذا يكون $\mu \cup [a,z] \cup \lambda$ ممراً درجياً في S من x إلى b وبالتالي x ترى درجياً كل نقطة من نقاط هذا الممر، وأيضاً يكون $\mu \cup [a,c] \cup [c,b]$ ممراً درجياً في S من x إلى b (حيث أن $[a,c] \subseteq S$) وبالتالي x ترى درجياً كل نقطة من نقاطه، وأما بالنسبة لرؤية نقاط الممر φ فنأخذ من أجل كل نقطة $j \epsilon \varphi$ القطعة المستقيمة الأفقية $[j,k] \subseteq S$ حيث $k \in [a,c]$ ونحصل على الممر الدرجي $\mu \cup [a,k] \cup [k,j]$ في S من x إلى j وبالتالي x ترى درجياً كل نقطة من نقاطه، وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط φ.



الشكل(13)

ثانياً: لنبرهن أن x ترى درجياً فيS بقية نقاط S ومن أجل ذلك سوف نقسّم S إلى مجموعات جزئية كما يلي:

- **المجموعة E**

لنأخذ جزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,c)$ وإلى الشرق منه وجزء المجموعة S المحدد بالمستقيم $L(a,z)$ وإلى الشمال منه فنحصل على المجموعة E الجزئية من S، وهذه المجموعة مضلع متعامد بسيط الترابط (لأن E مجموعة مترابطة و $E \cap int\ B = \emptyset$) الشكل (13)، ولإيجاد نواة E نحصل بمناقشة مشابهة للمناقشة في المبرهنة (1) على صحة العلاقة $D \subseteq Ker\ E$، ولدينا x نقطة كيفية من D وبالتالي $x \in \ker E$ وهكذا ترى x درجياً في E كل نقطة من E، وبما أن $E \subseteq S$ فإن x ترى درجياً في S كل نقطة من E.

- **غرب المركبة المحدودة B بما فيها نقاط S داخل المستطيل A:**

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1): من أجل كل نقطة $y \in S$ غرب B نأخذ $[r,y] \subseteq S$، ونحصل على $\mu \cup [a,z] \cup \lambda(z,r) \cup [r,y]$ وهو ممر درجي في S من x إلى y ، الشكل(13).

- **جنوب المركبة المحدودة B :**

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1): من أجل كل نقطة $v \in S$ جنوب B نأخذ $[u,v] \subseteq S$، ونحصل على $\mu \cup [a,c] \cup [c,u] \cup [u,v]$ وهو ممر درجي في S من x إلى y ، الشكل (13).

- **المجموعة P**

وهي جزء المجموعة S في الجنوب الغربي من B، وهكذا تكون P مجموعة جزئية من S محدودة من الشرق بالمستقيم العمودي $L(b,m)$ ومن الشمال بالمستقيم الأفقي $L(b,c)$، و كما في المبرهنة (1) نبرهن أن P مضلع متعامد بسيط الترابط وأن $b \in Ker\ P$ وهكذا b ترى درجياً في P (وبالتالي في S لأن $P \subseteq S$) كل نقطة من P وينتج عن ذلك أنه من أجل كل $n \in P$ يوجد ممر درجي β في S من b إلى n و نحصل على: $\mu \cup [a,z] \cup \lambda \cup \beta$ أو $\mu \cup [a,c] \cup [c,b] \cup \beta$ وكل منهما ممر درجي في S من x إلى n، الشكل (13)، وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة n من P نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من P.

- **المجموعة F**

وهي جزء المجموعة S غرب $[a,c]$ وشرق $\varphi(d,c)$ ، ومن أجل كل نقطة $j \epsilon F$ نأخذ القطعة المستقيمة الأفقية $[j,k] \subseteq S$ حيث $k \in [a,c]$ ونحصل على الممر الدرجي $\mu \cup [a,k] \cup [k,j]$ في S من x إلى j وبالتالي x ترى درجياً j في S ، وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط F.

من المناقشة السابقة في أولاً و ثانياً نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من S وهذا يعني أن $x \in Ker\ S$ وبكون x كيفية من D نجد أن $D \subseteq Ker\ S$ ، أي أن D مركبة لنواة S، وبنفس الأسلوب نبرهن على وجود مركبة لنواة S في الشمال الغربي من B تحوي النقطة m.

ملاحظات عندما $bdB \subseteq T$:

1) عندما كل من a,m تنتمي إلى T فإن كل من مركبتي النواة موجودة لأن كل منهما تنتمي إلى إحدى مركبات النواة ، وبتدوير جبهة المركبة المحدودة B داخل T بزوايا قائمة تتغير مواضع مركبات النواة ونحصل في كل وضع على مركبتين إحداهما تحوي a والثانية تحوي m.

2) إذا كانت S لا تحوي نقاط في الشمال الشرقي من B فإن مركبة النواة في هذه الجهة غير موجودة ويكون لنواة S مركبة واحدة فقط هي نقاط T في الشمال الغربي من B.

3) عندما ينطبق $L(a,z)$ على L_N فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة أفقية، وكذلك عندما ينطبق $L(a,c)$ على L_e فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة عمودية، وعندما ينطبقا معاً فإن D عبارة عن النقطة a.

مناقشة الحالات الأخرى:

بمناقشة مماثلة للمناقشة في المبرهنة (1) لجميع الحالات نجد أنه لنواة S مركبة أو مركبتين وبتدوير جبهة المركبة المحدودة B بزوايا قائمة تتغير مواضع النواة ونحصل في كل وضع على مركبة أو مركبتين، بشرط أن لا تصبح T (أو بقية نقاط T بعد حذف نقاط الشريطين العمودي والأفقي المحددين بالمركبة المحدودة B) في عكس الجهة التي تحوي أحد الممرين الدرجيين λ أو φ بالنسبة إلى B.

الاستنتاجات والتوصيات:

1) بعد مناقشة جميع الحالات الممكنة حصلنا على طريقة لتعيين نواة المضلع المتعامد S المغلق ثنائي الترابط والنجمي درجياً عندما تحوي المركبة المحدودة B للمتممة ممراً درجياً مؤلفاً من أكثر من ضلعين أو تحوي ممرين درجيين كل منهما مؤلف من أكثر من ضلعين، وهذه الطريقة تتلخص بالخطوات الآتية:

أ) إيجاد المجموعة T حيث: $T = \left(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\right) \cap S$

ب)حذف نقاط الشريطين العمودي V والأفقي H المحددين بالمركبة المحدودة B والتي تنتمي إلى المجموعة T

ج) استنتاج أن نواة S هي نقاط T باستثناء نقاط الشريطين المحذوفين والنقاط الموجودة في عكس الجهة التي يوجد فيها ممر درجي مؤلف من أكثر من ضلعين بالنسبة إلى B.

2) عندما جبهة المركبة المحدودة للمتممة تحوي ممراً درجياً واحداً مؤلفاً من أكثر من ضلعين يكون لنواة S على الأكثر ثلاث مركبات، وعندما تحوي ممرين درجيين كل منهما مؤلف من أكثر من ضلعين يكون لنواة S على الأكثر مركبتين.

3) نوصي بدراسة حالات مماثلة عندما تأخذ جبهة المركبة المحدودة للمتممة شكلاً مختلفاً عن الأشكال المدروسة، وكذلك نوصي بتعميم هذه الدراسة إلى فضاءات أخرى.

المراجع:

1-TORANZOS,F.A. *Radial functions of convex and star-shaped bodies*. Am.Math.Monthly , Vol. 74, 1967, 278–280.

2-BREEN,M. *Staircase kernels in orthogonal polygons*. Arch. Math, Vol.59, 1992,588-594.

3-MOTWANI,R.؛RAGHUNATHAN,A.؛SARAN,H. *Covering orthogonal polygons with star polygons*: The Perfect Graph Approach. J.Comput.System Sci,Vol.40,1990,19-48.

4-VALENTINE,F.A.*Convex sets*. McGraw. Hill, New York, 1964.

5-BREEN,M. *Generating the kernel of a staircase starshaped set from certain staircase convex subsets*. Periodica Math. Hungarica,Vol.64,N1, 2012,29-37.

6- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set from a minimal collection of its subsets*. Beitr Algebra Geometrie, Vol. 52, 2011, 113-123.

7- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set and its kernel in* $\mathbb{R}^3$ *from certain staircase convex subsets*. Beitr Algebra Geom. 2011.

8-BREEN,M. *Simply connected orthogonal polygons as unions of two orthogonally starshaped sets*. J. Geom. Vol. 82, 2005, 025-035.

9-BREEN,M. *Dimensions of staircase kernels in orthogonal polygons*. Geometriae Dedicata, Vol .49, 1994,323-333.

10-BREEN,M. *An improved Krasnosel'skii type theorem for orthogonal polygons which are starshaped via staircase paths*. J.Geom.Vol. 51,1994, 31–35.

11- حسن، نجود. تعيين نواة المضلعات المتعامدة النجمية ثنائية الترابط عندما المركبة المحدودة للمتممة مستطيلاً، بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2014/7/6.