مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (1) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (1) 2015

تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ الموزن $L_p(\Gamma, V)$ على منحنيات كارلسون

الدكتور محمد علي*
الدكتور محمد سويقات**
أحمد كنج***

(تاريخ الإيداع 22 / 10 / 2014. قُبِل للنشر في 15 / 2 /2015)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث مسألة تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ الموزن $L_p(\Gamma, v)$ حيث $1 < p < \infty$ و $v \in A_p(\Gamma)$ (وزن ماكنهوبت)، إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود p – فابير وذلك على أسرة واسعة من المنحنيات تدعى منحنيات كارلسون، كما ويعد هذا العمل بمثابة متابعة لما قام به الباحثان Israfilov و Testici عام 2014 في [4]، حيث درسا تقريب الدوال العقدية من فضاء سميرنوف الموزن $E_p(\mathrm{G}, v)$ على مناطق G محاطة بمنحنيات كارلسون.

الكلمات المفتاحية: منحنيات كارلسون، فضاء ليبيغ، كثيرات حدود p– فابير، وزن ماكنهوبت.

*أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
***طالب دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات–كلية العلوم – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (1) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (1) 2015

Approximation of Complex Functions from Weighted Lebesgue space on Carlson Curves

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Mohamed Soueycatt**
Ahmad kinj***

(Received 22 / 10 / 2014. Accepted 15 / 2 /2015)

□ ABSTRACT □

In this research, we have studied the issue of approximation of complex functions from weighted Lebesgue space $L_p(\Gamma, v)$; $1 < p < \infty$ and $v \in \mathrm{A_p}(\Gamma)$ (Mukenhoupt weight) to rational functions by using p- Faber polynomials on large group of curves, which called Carlson curves. This is also considered as a follow-up to the work done by researchers: Israfilov and Testici in 2014 [4], where they studied approximation of functions from weighted Smirnov space $E_p(\mathrm{G}, v)$ on domains G with a Carlson curve boundary.

Keywords: Carlson curves, Lebesgue space, p- Faber polynomials, Mukenhoupt weight.

*Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعد أسر المنحنيات أحد أهم العناصر الرئيسية في نظرية تقريب الدوال العقدية. نتناول في هذا البحث أسرة منحنيات كارلسون والتي تعرف من خلال وجود علاقة بين طول جزء المنحني الذي يقع داخل أي دائرة مركزها نقطة كيفية من هذا المنحني وبين نصف قطر هذه الدائرة.

كان للباحث David الدور الأساسي في تسليط الضوء على أسرة منحنيات كارلسون، فقد برهن في [2] أن الشرط اللازم والكافي ليكون مؤثر كوشي الشاذ محدوداً في الفضاء $L_p(\Gamma)$ هو أن يكون Γ منحني كارلسون. بينت هذه المبرهنة أن أسرة منحنيات كارلسون هي أوسع أسرة من المنحنيات يمكن من أجلها تطبيق نظرية بريفالف وعلاقات سوخوتسكي [3].

ومن الجدير بالذكر أن أسرة منحنيات كارلسون استخدمت مؤخراً من قبل العديد من الباحثين في مجال نظرية التقريب. نذكر منهم على سبيل المثال الباحثين Mamedkhanov و Dadashov في [6] عام 2010 والباحثين Israfilov و Testici عام 2014 في [4].

ندرس في هذا البحث تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ الموزن $L_p(\Gamma, v)$ إلى دوال كسرية متعلقة بكثيرات حدود p– فابير على أسرة منحنيات كارلسون. وننوه إلى أننا من أجل الوصول إلى النتيجة الرئيسة في هذا العمل قمنا بإثبات بعض المبرهنات اللازمة وعندها أتى برهان النتيجة الرئيسية بشكل مبسط ومختصر. كما أن الثوابت المستخدمة في هذا البحث ... $c_1, c_2,$ كلها موجبة ومختلفة ولا تؤثر على دراسة التقريب.

أهمية البحث وأهدافه:

لهذا البحث أهمية في نظرية تقريب الدوال العقدية، فمن خلال معرفة الأسرة التي تنتمي إليها الدالة العقدية يمكننا إيجاد كثيرة حدود أو دالة كسرية قريبة منها بدرجة كافية، أما هدف البحث فيكمن في دراسة تقريب أسرة دوال ليبيغ الموزنة $L_p(\Gamma, v)$ إلى دوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لمتسلسلات p– فابير.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي ونظرية تقريب الدوال، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

<u>تعريف 1 منحني كارلسون: [1]</u> يُقال عن منحني جوردان المحدود الطول Γ أنه منحني كارلسون إذا كان من أجل أي نقطة $z \in \Gamma$ ومن أجل كل $r > 0$ يوجد ثابت موجب k بحيث يكون $|\Gamma(z,r)| \leq k.r$ حيث $|\Gamma(z,r)|$ يمثل طول جزء المنحني Γ الواقع داخل الدائرة التي مركزها النقطة z ونصف قطرها r.

<u>تعريف 2 فضاء ليبيغ $L_p(\Gamma)$ ، $1 < p < \infty$</u> : [5] ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$، يرمز بالرمز $L_P(\Gamma)$ لأسرة جميع الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ المحققة للشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p \, |dz| < \infty$$

ويُعرف النظيم على الفضاء $L_P(\Gamma)$ بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_P(\Gamma)}=\left(\int_{\Gamma}|f(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>تعريف 3 فضاء ليبيغ الموزن $L_p(\Gamma,v)$، $1<p<\infty$</u>:[5] يُقال عن الدالة f إنها تنتمي إلى أسرة الدوال $L_P(\Gamma,v)$ إذا كانت الدالة $f.v\in L_p(\Gamma)$ وتسمي v بدالة الوزن.

ومن المعلوم أن الفضاء $L_P(\Gamma,v)$ يمثل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم الآتي: [5]

$$\|f\|_{L_P(\Gamma,\Leftrightarrow)}=\left(\int_{\Gamma}|f(z).v(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>تعريف 4 أسرة دوال الوزن $A_P(\Gamma)$، $1<p<\infty$</u>:[1] تعرف أسرة دوال الوزن $A_P(\Gamma)$ بأنها أسرة كل الدوال الموجبة والقيوسة $v:\Gamma\to[0,\infty]$ التي تحقق شرط ماكنهوبت الآتي:

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma(t,r)}v^p(\tau)|d\tau|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{r}\int_{\Gamma(t,r)}v^{-q}(\tau)|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وتسمى أسرة دوال الوزن $\bigcup_{1<p<\infty}A_p$ أوزن ماكنهوبت (Mukenhoupt weight functions)

وكما هو معلوم فإذا كان $v\in A_p(\Gamma)$ فإن $v^{-\frac{1}{q}}\in L_q(\Gamma)$.[1].

نورد فيما يلي بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث [5]

أ)ليكن Γ منحني جوردان في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولنرمز بـ $G=int\,\Gamma$ و $G^-=ext\,\Gamma$ ولنفترض، دون المساس بعمومية المسألة، أن $0\in G$ ولنرمز بـ γ_0 للدائرة الواحدية أي وبالرمز $\gamma_0=\{\mathrm{w}=\mathrm{u}+\mathrm{iv}\in\mathbb{C},\ u^2+v^2=1\}$ و $D=int\,\gamma_0$ و $D^-=ext\,\gamma_0$.

ب) نرمز بـ $w=\varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G^- إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ ، $\varphi(\infty)=\infty$ ولنرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.

ج) نرمز بـ $w=\varphi_1(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ G إلى D^- وتحقق $\lim_{z\to0}z\varphi_1(z)>0$ $\varphi_1(0)=\infty$ ولنرمز بـ ψ_1 للدالة العكسية للدالة φ_1 .

<u>تعريف 5 كثيرات حدود p− فابير</u>:[3] تُعرف كثيرات حدود p− فابير $F_{k,p}(z)$ من الدرجة k بأنها مجموع الحدود ذات القوى غير السالبة في منشور لوران للدالة $[\varphi(z)]^k\sqrt[p]{\varphi'(z)}$ في جوار اللانهاية $z=\infty$.

ومن المعلوم أنه يمكن تمثيل كثيرات حدود p− فابير بالشكل التكاملي الآتي [3]:

$$F_{k,p}(z)=\varphi^k(z)\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi^k(\xi)\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}}{\xi-z}\,d\xi\quad z\in G^-\quad(1)$$

$$\widetilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{z}\right)=[\varphi_1(z)]^{k-\frac{2}{p}}\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_1^{k-\frac{2}{p}}(\xi)\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}}{\xi-z}\,d\xi\quad z\in G\backslash\{0\}\quad(2)$$

النتائج والمناقشة:

لنعرف من أجل كل $f \in L_P(\Gamma, v)$ على الدائرة الواحدية الدالتين:

$$f_0(w) = f\,[\,\psi(w)\,]\left(\psi'(w)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \dots (3) \qquad \text{و} \qquad f_1(w) = f[\,\psi_1(w)]\left(\,\psi'_1(w)\right)^{\frac{1}{p}} w^{\frac{2}{p}} \quad \dots (4)$$

تبيّن المبرهنة الآتية أن الدالتين f_0 , f_1 تنتميان إلى أسرة دوال ليبيغ الموزن على الدائرة الواحدية.

مبرهنة 1: إذا كان $f \in L_P(\Gamma, v)$ فإن $f_0 \in L_p(\gamma_0, v_0)$ و $f_1 \in L_p(\gamma_0, v_1)$ حيث $v_0(w) = v[\psi(w)]$ و $v_1(w) = v\,[\psi_1(w)]$.

البرهان: لنفرض أن $f \in L_P(\Gamma, v)$ ولنبرهن أن $f_0 \in L_p(\gamma_0, v_0)$.

$$\int_{\gamma_0} \left|f_0(w)v_0(w)\right|^p |dw| = \int_{\gamma_0} \left|f[\,\psi(w)\,]\,v[\psi(w)]\right|^p \left|\psi'(w)\right| \left|dw\right|$$

وبإجراء التحويل $z = \psi(w)$ نجد أن:

$$\int_{\gamma_0} |\,f\,[(\psi(w)]\,v[\psi(w)]\,|^p\,\left|\psi'(w)\right|\,|dw| = \int_{\Gamma} |\,f(z)v(z)|^P |dz|$$

وبما أن $f \in L_P(\Gamma, v)$ فإن $\int_\Gamma |f(z)v(z)|^p\,|dz| < \infty$ وبالتالي:

$$\int_{\gamma_0} |\,f_0(w)v_0(w)|^p\,|dw| < \infty$$

أي أن $f_0 \in L_p(\gamma_0, v_0)$ ، وبنفس الطريقة نبرهن أن $f_1 \in L_p(\gamma_0, v_1)$ □

تبين المبرهنة الآتية أن أسرة دوال ليبيغ الموزنة مع وزن ماكنهوبت قابلة للمكاملة لوبيغياً على Γ أي تنتمي إلى الفضاء $L_1(\Gamma)$.

مبرهنة2: إذا كان $f \in L_P(\Gamma, v)$ و $v \in A_p(\Gamma)$ فإن $f \in L_1(\Gamma)$.

البرهان: بالاستفادة من متراجحة هولدر نجد أن:

$$\int_\Gamma |f(z)|\,|dz| = \int_\Gamma |f(z)\frac{v(z)}{v(z)}\,|\,|dz| \le \left(\int_\Gamma |f(z)\,v(z)|^p\,|dz|\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_\Gamma \left|\frac{1}{v(z)}\right|^q |dz|\right)^{\frac{1}{q}} \dots (5)$$

وبما أن $f \in L_P(\Gamma, v)$ نجد أن:

$$\int_\Gamma |\,f(z)v(z)|^p\,|dz| < \infty \quad \dots (6)$$

وحسب الفرض لدينا $v \in A_p(\Gamma)$ وبالتالي $v^{-\frac{1}{q}} \in L_q(\Gamma)$ أي أن:

$$\int_\Gamma |\frac{1}{v(z)}|\,|dz| < \infty \quad \dots (7)$$

وبالاستفادة من العلاقتين (6) و (7) نجد من العلاقة (5) أن:

$$\int_\Gamma |f(z)|\,|dz| < \infty$$

أي أن $f \in L_1(\Gamma)$ □

مبرهنة مساعدة 1 [2]: إذا كان Γ منحني كارلسون و $f \in L_p(\Gamma, v)$ حيث $1 < p < \infty$ و $v \in A_p(\Gamma)$ فإن تكامل كوشي الشاذ للدالة f المعرف بالعلاقة $S_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$, $z \in \Gamma$ يكون موجوداً ومحدوداً، أي يوجد ثابت $c_1 > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|S_\Gamma f\|_{L_P(\Gamma,V)} \le c_1\,\|f\|_{L_p(\Gamma,v)} \quad \dots (8)$$

<u>مبرهنة مساعدة 2 [3]</u>: إذا كان $f \in L_1(\Gamma)$ ،عندئذٍ لتكامل نوع كوشي قيمتان حدوديتان من جهتي المنحني Γ نرمز لهما بـ f^+, f^- وهما تحليليتان في G, G^- على الترتيب وترتبطان مع الدالة f من خلال علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$\left.\begin{aligned} f^+(z) &= S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2}\, f(z) \\ f^-(z) &= S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2}\, f(z) \\ f(z) &= f^+(z) - f^-(z) \end{aligned}\right\} \dots .(9)$$

<u>مبرهنة مساعدة 3 [3]</u>: إذا كان $f_0 \in L_p(\gamma_0, w_0)$ و $w_0 \in A_P(\gamma_0)$ فإن $f_0^+ \in E_p(D, w_0)$ و $f_0^- \in E_p(D^-, w_0)$.

وبالمثل إذا كان $f_1 \in L_p(\gamma_0, w_1)$ و $w_1 \in A_P(\gamma_0)$ فإن $f_1^+ \in E_p(D, w_1)$ و $f_1^- \in E_p(D^-, w_1)$.

<u>تعريف 6 [4]</u> معامل الاستمرارية في الفضاء $L_p(\gamma_0, v)$

إذا كان $f \in L_p(\gamma_0, v)$ حيث $1 < p < \infty$ و $v \in A_p(\gamma_0)$ ، عندئذٍ يعرف معامل الاستمرارية في الفضاء $L_P(\gamma_0, v)$ بالعلاقة الآتية:

$$\Omega_r(f,h)_{p,v} = \sup_{|\delta| \le h} \left\| \sigma_\delta^r f(w) \right\|_{L_p(\gamma_0,v)}$$

حيث الدالة $\sigma_\delta^r f(w)$ تعطى بالعلاقة:

$$\sigma_\delta^r f(w) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\Delta_t^r f(w)|\, dt \ , \delta > 0 \ , r \in \mathbb{N}$$

و $\Delta_t^r f(w)$ تعطى بالعلاقة:

$$\Delta_t^r f(w) = \sum_{s=0}^r (-1)^{r+s+1} \binom{r}{s} f\left(w\, e^{ist}\right) \ \ r \in \mathbb{N}$$

ومن أجل $f \in L_p(\Gamma, v)$ فإننا نعرف معاملات الاستمرارية في الفضاء $L_p(\Gamma, v)$ بالعلاقتين الآتيتين:

$$\Omega_r(f,h)_{p,v} = \Omega_r\left(f_0^+, h\right)_{p,v_0} \ \ \dots (10)$$

$$\widetilde{\Omega_r}(f,h)_{p,v} = \Omega_r\left(f_1^+, h\right)_{p,v_1} \ \ \dots (11)$$

<u>مبرهنة مساعدة 4 [4]</u> إذا كان $g \in E_P(D, v)$ و $v \in A_p(\gamma_0)$ ، $1 < p < \infty$ عندئذٍ يوجد ثابت موجب $c_2 > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^n a_k w^k \right\|_{L_p(\gamma_0,v)} \le c_2 \ \Omega_r\left(g, \frac{1}{n}\right)_{p,v} \dots (12)$$

حيث أن $\sum_{k=0}^n a_k w^k$ هو مجموع أول n حد في منشور تايلور للدالة g في جوار الصفر.

<u>ملاحظة:</u> من علاقات سوخوتسكي وجدنا أن $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ وبالتالي يكفي من أجل تقريب الدالة f على المنحنيΓ أن يتم تقريب الدالتين f^+, f^- على G, G^- ، ولأجل الوصول إلى هذه الغاية نقوم بتشكيل كثيرة حدود جبرية بقوى z لتقريب الدالة f^+ وكثيرة حدود جبرية بقوى $\frac{1}{z}$ لتقريب الدالة f^-

نقوم في المبرهنة الآتية بتشكيل كثيرة حدود جبرية بقوى z ولتكن $\sum_{k=0}^n a_k F_{k,p}(z)$ لتقريب الدالة f^+ .

<u>مبرهنة3</u>: إذا كان Γ منحني كارلسون و $f \in L_p(\Gamma, v)$ حيث $v \in A_P(\Gamma)$ و $v_0 \in A_P(\gamma_0)$ فإن:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) = \left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_\Gamma\left(\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+\left(\varphi(z)\right)\right]\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+\left(\varphi(z)\right)\right] - \left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-\left(\varphi(z)\right) + f^-(z) \qquad \dots (13)$$

حيث $F_{k,p}(z)$ كثيرات حدود p–فابير والأمثال a_k تعطى بالعلاقة:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}}\, dw.$$

البرهان: بما أن 峮 $\in L_p(\Gamma, v)$ و $v \in A_P(\Gamma)$ فإنه من المبرهنة(1) ينتج أن $f_0 \in L_p(\gamma_0, v_0)$ و $v_0 \in A_p(\gamma_0)$ وبالاستفادة من المبرهنة (2) نجد أن $f_0 \in L_1(\gamma_0)$ وحسب المبرهنة المساعدة (2) نجد أن تكامل كوشي الشاذ للدالة f_0 على γ_0 يكون موجوداً، ولتكامل نوع كوشي للدالة f_0 قيمتين حدوديتين f_0^-, f_0^+ تحققان العلاقة الآتية:

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w) \quad \dots (14)$$

ومن العلاقة (3) وبوضع $z = \psi(w)$ نجد أن:

$$f(z) = f_0[\varphi(z)]\,\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \dots (15)$$

وبتعويض العلاقة (14) في العلاقة (15) نجد أن:

$$f(z) = \left[f_0^+\left(\varphi(z)\right) - f_0^-\left(\varphi(z)\right)\right]\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \dots (16)$$

لتكن $t \in G^-$ نقطة كيفية، وباستخدام العلاقتين (1) و (16) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(t) = \left(\varphi'(t)\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi)}{\xi - t} d\xi =$$
$$= \left(\varphi'(t)\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k\, \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(\xi) - f_0^+\left(\varphi(\xi)\right)\right]}{\xi - t} d\xi$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-\left(\varphi(\xi)\right)}{\xi - t} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi \quad \dots (17)$$

وبما أن $\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-(\varphi(\xi))$ دالة تحليلية في G^- فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-(\varphi(\xi))}{\xi - t} d\xi = -\left(\varphi'(t)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-\left(\varphi(t)\right) \dots (18)$$

وبالاستفادة من العلاقة (9) نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - t} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f^-(\xi)}{\xi - t} d\xi = f^-(t) \quad \dots (19)$$

وبتعويض العلاقتين (18) و(19) في العلاقة (17) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(t) = \left(\varphi'(\ \ )\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\left(\varphi'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\ \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(\xi) - f_0^+(\varphi(\xi))\right]}{\xi - t} d\xi$$
$$-\left(\varphi'(t)\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-(\varphi(t)) + f^-(t)$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $t \longrightarrow z \in \Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من (9) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) = \left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_{\Gamma}\left(\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right]\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z) - f_0^+(\varphi(z))\right] - \left(\varphi'(\ \ )\right)^{\frac{1}{p}} f_0^-(\varphi(z)) + f^-(z) \qquad \square$$

نقوم في المبرهنة الآتية بتقريب الدالة f^+ إلى كثيرة الحدود المشكلة في المبرهنة (3)

مبرهنة4: إذا كان Γ منحني كارلسون و $f \in L_p(\Gamma, v)$ حيث $v \in A_P(\Gamma)$ و $v_0 \in A_P(\gamma_0)$ فإنه يوجد ثابت موجب c_3 بحيث...

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L_p(\Gamma,v)} \le c_3\ \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,v}$$

حيث $\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)$ كثيرة الحدود التي شكلناها في المبرهنة (3) و $\Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,v}$ معامل الاستمرارية في الفضاء $L_p(\Gamma, v)$.

البرهان: من العلاقة (13) وبالاستفادة من العلاقتين (9) و (16) نجد أن:

$$f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right)$$
$$+ S_{\Gamma}\left(\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right)$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L_p(\Gamma, v)$ لطرفي العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L_p(\Gamma,v)} = \frac{1}{2}\left\|\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$
$$+\left\|S_{\Gamma}\left(\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right)\right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

وبالاستفادة من العلاقة (8) نجد أن:

$$\left\| f^+(z) - \sum_{F=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L_p(\Gamma,v)} \le \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\left\|\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left[f_0^+(\varphi(z)) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi^k(z)\right]\right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

وبإجراء التحويل$w = \varphi(z)$ نحصل على:

$$\left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z)\right\|_{L_p(\Gamma,v)} \le \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\left\| f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right\|_{L_p(\gamma_0,v_0)}$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (4) يكون لدينا:

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \le c_2\left(c_1+\frac{1}{2}\right)\Omega_r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right)_{p,v_0}$$

ومن العلاقة (10) وبوضع $c_3=c_2\left(c_1+\frac{1}{2}\right)$ نجد أن:

$$\left\| f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \le c_3\, \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,v} \qquad \square$$

نقوم في المبرهنة الآتية بتشكيل كثيرة حدود جبرية بقوى $\frac{1}{z}$ ولتكن $\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_{k,p}}(\frac{1}{z})$ لتقريب الدالة f^{-} .

مبرهنة5: إذا كان Γ منحني كارلسون و $f\in L_p(\Gamma,v)$ حيث $v\in A_p(\Gamma)$ و $v_1\in A_p(\gamma_0)$ فإن:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_{K,P}}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^{k}(z)$$

$$-S_\Gamma\left(\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^{k}(z)-f_1^{+}\left(\varphi_1(z)\right)\right]\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^{k}(z)-f_1^{+}\left(\varphi_1(z)\right)\right]-\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}F_1^{-}\left(\varphi_1(z)\right)$$

$$-f^{+}(z)\ \dots(20)$$

علماً أن $\widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right)$ كثيرات حدود p–فابير بقوى $\frac{1}{z}$ والأمثال $\widetilde{a}_k$ تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\widetilde{a}_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f_1(w)}{w^{k+1}}\,dw$$

البرهان: بما أن $f\in L_p(\Gamma,v)$ و $v\in A_p(\Gamma)$ فإنه من المبرهنة (1) ينتج أن $f_1\in L_p(\gamma_0,v_1)$ و $v_1\in A_p(\gamma_0)$ وبالاستفادة من المبرهنة (2) نجد أن $f_1\in L_1(\gamma_0)$ وحسب المبرهنة المساعدة (2) نجد أن تكامل كوشي الشاذ للدالة f_1 على γ_0 يكون موجوداً ولتكامل نوع كوشي للدالة f_1 قيمتين حدوديتين f_1^{-},f_1^{+} تحققان العلاقة الآتية:

$$f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)\ \dots(21)$$

ومن العلاقة (4) وبوضع $z=\psi_1(w)$ نجد أن:

$$f(z)=f_1[\varphi_1(z)]\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\ \dots.(22)$$

وبتعويض العلاقة (21) في العلاقة (22) نجد أن:

$$f(z)=\left[f_1^{+}\left(\varphi_1(z)\right)-f_1^{-}\left(\varphi_1(z)\right)\right]\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\ \dots(23)$$

لتكن $t_1\in G$ نقطة كيفية، وباستخدام العلاقتين (2) و (23) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\,\widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{t_1}\right)$$

$$=\left(\varphi_1'(t_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(t_1)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\,\varphi_1^k(t_1)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\varphi_1^k(\xi)}{\xi-t_1}\,d\xi$$

$$=\left(\varphi_1'(t_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(t_1)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(t_1)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(\xi)-f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right)\right]}{\xi-t_1}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi-t_1}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-t_1}d\xi\ \ldots(24)$$

وبما أن $\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-(\varphi_1(\xi))$ دالة تحليلية في G فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-(\varphi_1(\xi))}{\xi-t_1}d\xi=\left(\varphi_1'(t_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(t_1)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-\left(\varphi_1(t_1)\right)\ldots(25)$$

وبالاستفادة من العلاقة (9) نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-t_1}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f^+(\xi)}{\xi-t_1}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f^-(\xi)}{\xi-t_1}d\xi=f^+(t_1)\ldots(26)$$

وبتعويض العلاقتين (25) و(26) في العلاقة (24) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\,\widetilde{F}_{k,p}\left(\frac{1}{t_1}\right)=\left(\varphi_1'(t_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(t_1)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(t_1)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\left(\varphi_1'(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(\xi)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k\varphi_1^k(\xi)-f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right)\right]}{\xi-t_1}d\xi$$

$$-\left(\varphi_1'(t_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(t_1)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-(\varphi_1(t_1)-f^+(t_1)$$

وبأخذ النهاية لطرفي العلاقة الأخيرة عندما $t_1\longrightarrow z\in\Gamma$ على طول المنحني Γ وبالاستفادة من (9) نجد:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F}_{\langle,P}\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$=\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)$$
$$-S_\Gamma\left(\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right]\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right]-\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}f_1^-\left(\varphi_1(z)\right)$$
$$-f^+(z)\qquad\square$$

نقوم في المبرهنة الآتية بتقريب الدالة f^- إلى كثيرة الحدود الجبرية المشكلة في المبرهنة (5)

<u>**مبرهنة6**</u>: إذا كان Γ منحني كارلسون و $f\in L_p(\Gamma,v)$ حيث $v\in A_p(\Gamma)$ و $v_1\in A_p(\gamma_0)$ فإنه يوجد ثابت موجب c_4 بحيث ...

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_P(\Gamma,v)}\le c_4\widetilde{\Omega_r}\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,v}$$

حيث $\sum_{k=0}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right)$ كثيرة الحدود التي شكلناها في المبرهنة (5) و $\widetilde{\Omega}_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{p,v}$ معامل الاستمرارية في الفضاء $L_p(\Gamma,v)$.

البرهان: من العلاقة (20) وبالاستفادة من العلاقتين (9) و (23) يكون:

$$f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F}_{K,P}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)$$
$$-S_\Gamma\left(\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right]\right)$$

وبأخذ النظيم في الفضاء $L_p(\Gamma,v)$ لطرفي العلاقة الأخيرة يكون:

$$\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\widetilde{F}_{K,P}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_P(\Gamma,v)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\|\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)\right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(\left(\varphi_1'(z)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right]\right)\right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

وبالاستفادة من العلاقة (8) نجد أن:

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \leq$$

$$\leq \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \left\| (\varphi(z))^{\frac{1}{p}} \left(\varphi_1(z)\right)^{-\frac{2}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \varphi_1^k(z) - f_1^+\left(\varphi_1(z)\right) \right] \right\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

وبإجراء التحويل $w = \varphi_1(z)$ نجد أن:

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \leq \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=1}^{n} a_k w^k \right\|_{L_P(\gamma_0, v_1)}$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (4) نجد أن:

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \leq \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \left\| f_1^+(w) - \sum_{k=1}^{n} a_k w^k \right\|_{L_P(\gamma_0, v_1)}$$

$$\leq \mathrm{c}_2 \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \Omega_r\left(f_1^+, \frac{1}{n}\right)_{p, v_1}$$

ومن العلاقة (10) وبوضع $c_4 = \mathrm{c}_2\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)$ نجد أن:

$$\left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} \leq \mathrm{c}_4\, \widetilde{\Omega_r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,v} \quad \square$$

سنعرض الآن المبرهنة الرئيسة في هذا البحث التي تختص بتقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ الموزن إلى دوال كسرية.

<u>مبرهنة 7:</u> إذا كان Γ منحني كارلسون و $f \in L_P(\Gamma, v)$ ، $1 < p < \infty$ ، حيث $v \in A_p(\Gamma)$ و $v_0, v_1 \in A_p(\gamma_0)$ عندئذٍ من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يوجد ثابت موجب c_5 ودالة كسرية $R_n(z, f)$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|f - R_n(.\,, f)\|_{L_p(\Gamma,v)} \leq c_5 \left[\Omega_{\text{斁}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \widetilde{\Omega_{\mathrm{r}}}\left(f, \frac{1}{n}\right) \right]$$

<u>البرهان:</u> بوضع $R_n(z, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right)$ واستخدام العلاقة:

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z)$$

وبالاستفادة من المبرهنتين (4) و (6) يكون لدينا:

$$\|f(z) - R_n(z, f)\|_{L_p(\Gamma,v)}$$

$$\leq \left\| f^+(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_{k,p}(z) \right\|_{L_p(\Gamma,v)} + \left\| f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\, \widetilde{F_{k,p}}\left(\frac{1}{z}\right) \right\|_{L_P(\Gamma,v)}$$

$$\leq c_3\, \Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) + c_4\, \widetilde{\Omega_r}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq c_5 \left[\Omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right) + \widetilde{\Omega_r}\left(f, \frac{1}{n}\right) \right]$$

حيث $c_5 = \max\{c_3, c_4\}$. $\square$

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث إلى تقريب الدوال العقدية من فضاء ليبيغ الموزن على أسرة منحنيات كارلسون. ونوصي بدراسة تقريب الدوال العقدية من فضاء أورليتش $L_M(\Gamma)$ على منحنيات كارلسون أو على منحنيات ديني الملساء.

المراجع:

[1] BÖTTCHER.A; KARLOVICH.A.Y. *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators*. Springer Basel AG, Washington D.C, 1997, 407.

[2] DAVID.G. *Operateurs integraux singulers sur certaines courbes du plan complexe*. Vol 17 (4), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, 1984, 157-189.

[3] ISRAFILOV. D.M. *Approximation by p-faber polynomials in the weighted smirnov class* $E_P(G,W)$ *and Bieberbach Polynomials*. Vol 17, Constr. Approx. 2001, 335-351.

[4] ISRAFILOV.D.M; TESTICI.A. *Approximation in Weighted Smirnov Classes*. Vol 59, Complex Variables and Elliptic Equations. 2014, 1-14.

[5] MAMEDKHANOV.J.I; DADASHOVA.I.B. *Rational Approximation on Closed Curves.* Vol 2(3), Applied Mathematics, 2012, 90-93.

[6] MAMEDKHANOV.J.I; DADASHOVA.I.B. Some properties of the potential operators in Morrey spaces defined on Carlson curves. Vol 55 ,Complex Variables and Elliptic Equations. 2010, 937-945.