مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

حلول تامّة صريحة ذات موجة جوّالة لمعادلة Fitzhug–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، باستخدام طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضليّة العاديّة

الدكتور سامي انجرو *
الدكتور رامز كروم **

(تاريخ الإيداع 15 / 2 / 2015. قُبِل للنشر في 15 / 4 /2015)

☐ ملخّص ☐

نقوم في هذا العمل بإيجاد حلول تامّة صريحة ذات موجة جوالة (Traveling wave solutions)، لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، باستخدام طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية، وتبيّن النتائج التي حصلنا عليها ،أنّ الحلول التامّة للمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، تأخذ طبيعة حلّ معادلة برنولي التفاضلية العادية نفسها، كما يتبّين أنّ هذه الطريقة بسيطة وفعّالة لهذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطيّة، وتعتمد على حلّ معادلة برنولي التفاضلية العادية ، وعلى طريقة موازنة التجانس، ويمكن أن تطبّق على معادلات تفاضلية جزئية غير خطيّة أخرى، خاصّةً تلك التي تأتي من علوم الهندسة والفيزياء الرّياضية ،ومجالات علمية تطبيقية أخرى.

الكلمات المفتاحية: معادلة Fitzhugh–Nagumo – الحلّ التامّ – طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضليّة العادية – الحلّ ذو الموجة الجوّالة – طريقة موازنة التجانس – معادلة تفاضلية جزئية غير خطيّة.

* مدرّس – قسم الرياضيات – كلّية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** مدرّس – قسم الرياضيات – كلّية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

Explicit Exact Traveling Wave Solutions for Generalized Fitzhug-Nagumo Equation with Constant Coefficients by Bernoulli sub-ODE Method

Dr. Sami Injrou *
Dr. Ramez Karoum **

(Received 15 / 2 / 2015. Accepted 15 / 4 /2015)

□ ABSTRACT □

In this work, we have been found explicit exact traveling wave solutions for generalized Fitzhug-Nagumo equation with constant coefficients, by using the Bernoulli sub-ODE method, The obtained results shows that these solutions inherit the nature of the solution of Bernoulli ODE, traveling wave solutions, and shows that this method is simple, direct and very efficient for solving this kind of nonlinear PDEs, and based on the solution of Bernoulli ODE and the homogeneous balance method, It can be applied to nonlinear PDEs which frequently arise in engineering sciences, mathematical physics and other scientific real-time applications fields.

Keywords: Fitzhug-Nagumo equation - exact solution - Bernoulli sub-ODE method – traveling wave solution - the homogeneous balance method - nonlinear partial differential equations.

*Associate Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمّة:

تستخدم معادلات التطوّر التفاضلية الجزئية غير الخطيّة بشكل واسع لوصف الكثير من الظواهر المعقدة المصادفة في الفيزياء والكيمياء والهندسة ...، ونظراً للدّور الكبير الذي تؤديه الحلول التامّة لهذه المعادلات في فهم هذه الظواهر. كان إيجاد هذه الحلول، مجال بحث الكثير من الرياضيين والفيزيائيين الذين أبدعوا طرائق كثيرة في إيجادها، فظهر الكثير من الطرائق التي تعنى بإيجاد الحلول التامّة للمعادلات التفاضلية الجزئية، ومن هذه الطرائق طريقة دالة الظّل القطعي التي قدمها Malfiet في عام 1992 في [1]، ثمّ قدّم في عام 1994 كلّ من Parkers و Duffy في [2] طريقة دالة الظّل القطعي التلقائية، وفي عام 2000 قدم Fan في [3] طريقة دالة الظل القطعي الموسعة، ثمّ في عام 2001 قدمّ كلّ من Fu و Liu و Zhao في [4] طريقة دالة جاكوبي الناقصية، وفي عام 2002 عدّل Elwakil في [5] طريقة دالة الظل القطعي وعممها، وقدّم في العام نفسه Feng طريقة التكامل الأوّل التي تعتمد على الجبر التبادلي في [6 ، 7]، وعمّم Zheng في عام 2003 في [8] طريقة دالة الظّل القطعي الموسعة، وعدّل في العام نفسه كلّ من Shen و Pan في [9] طريقة دالة جاكوبي الناقصية، ثمّ عمّمها كلّ من Chen و Hong-Qing في [10]، وفي عام 2006 ظهرت طريقة الدالة الأسية على يد كلّ من He و Wu في [11]، ثم قدّم Wang و Li و Zhang في [12] طريقة منشور G'/G، ثمّ وسعت هذه الطريقة في عام 2010 ، من قبل Guo و Zhou في [13] ، وعمّمت بالعام نفسه من قبل Lu في [14]، واستخدم مؤخّراً Bin في [15] طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية في إيجاد حلول تامة ذات موجة جوالة (Traveling wave solutions) لمعادلة Fitzhugh-Nagumo التقليدية، كما واستخدمها كثيرون في إيجاد حلول تامة ذات موجة جوالة للكثير من المعادلات التفاضلية الجزئية في [16 ، 17 ، 18 ، 19].

نحاول في هذه البحث الإجابة على السؤال الآتي: هل يمكن تطبيق طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية على معادلة Fitzhugh-Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة ، وهل تعطي حلولاً تامّة جديدة ، وما طبيعة هذه الحلول....؟. الجدير بالذكر أنّ Karroum و Injrou قدّما حلولاً تامة لهذه المعادلة مستخدمين طريقة التكامل الأول في [20] وحلولاً تامة ذات موجة منعزلة بطريقة الدالة الأسية في [21]، وتعدّ هذه المعادلة نسخة مطوّرة عن معادلة Fitzhugh-Nagumo، التي أوجدها Fitzhugh في [22]، و Nagumo وآخرون في [23]، التي لها أهمية كبيرة في الكثير من المجالات التطبيقية، حيث تعطى هذه المعادلة بالعلاقة الآتية:

$$u_t = u_{xx} - u(1-u)(\rho - u) \qquad (1)$$

علماً أن $0 \le \rho \le 1$~، و $u(x,t)$ دالة مجهولة تمثل الجهد الكهربائي عبر غشاء الخلية، وتعطى معادلة Fitzhugh-Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة بالعلاقة الآتية:

$$u_t + \alpha u_x - u_{xx} + u(1-u)(\rho - u) = 0 \qquad (2)$$

حيث $\alpha \neq 0$ وسيط ثابت.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث من أنّه يعطي حلولاً تامة ذات موجة جوالة لمعادلة Fitzhugh-Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة التي تعدّ في غاية الأهمية للباحثين في المجالات العلمية التطبيقية ،(الفيزياء- الكيمياء- علم

الأحياء....)، ويهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول تامّة ذات موجة جوالة (traveling wave solutions) لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، باستخدام طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاصّ في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإنّ التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حلّ المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطيّة، وحلّ جمل المعادلات الجبرية غير الخطيّة، وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

النتائج والمناقشة:

سنعرض أولاً طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية:

طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطيّة، بمتحوّلين مستقلين فقط x و t،الآتية:

$$P\left(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tt},u_{xt},...\right)=0 \qquad (3)$$

حيث إنّ $u(x,t)$ الدالة المجهولة، و P كثيرة حدود تابعة لـ $u(x,t)$ ومشتقاته الجزئية.

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

1– نستخدم متحوّل الموجة الجوالة (Travelling wave transformation) الآتي:

$$u(x,t)=u(\xi) \; ; \; \xi=k(x-ct) \qquad (4)$$

حيث إنّ k و c ثابتان يعينان لاحقاً، و تتحوّل المعادلة التفاضلية الجزئية (3) إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطيّة للمجهول $u(\xi)$:

$$Q\left(u,u',u'',u''',...\right)=0 \qquad (5)$$

حيث Q كثيرة حدود تابعة لـ $u(\xi)$ ومشتقاته.

2– نفرض أنّ حلّ المعادلة (5) يكتب بالشكل الآتي:

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i G^i(\xi) \qquad (6)$$

حيث إنّ a_i، من أجل $i=0,1,...,m$، مع $a_m \neq 0$، ثوابت تعين لاحقاً، وأن $G=G(\xi)$ حلّ لمعادلة برنولي:

$$G'+\lambda G=\mu G^2 \qquad (7)$$

علماً أن $\lambda \neq 0$ و $\mu \neq 0$، و يكون حلّ معادلة برنولي:

$$G(\xi)=\frac{\lambda}{\mu+C.\lambda.\exp(\lambda\xi)} \qquad (8)$$

حيث C ثابت كيفي.

3– يحسب العدد الصحيح الموجب m، بإجراء موازنة التجانس بين المشتق ذات المرتبة الأعلى مع الحدّ غير الخطي في المعادلة (5)، حيث تعرف درجة $u(\xi)$، $\deg(u(\xi))=m$، ومنه وبشكل مماثل نجد:

$$\deg\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right)=m+p \quad , \quad \deg\left(u^p\left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^j\right)=mp+j\,(m+r)$$

4- نعوض العلاقة (6) في العلاقة (5) مع مراعاة المعادلة (7) وأن:

$$G''=-\lambda G'+2\mu GG' \tag{9}$$

ثم نطابق أمثال قوى $G(\xi)$ بالصفر، لنحصل على جملة جبرية غير خطيّة، نحلّها باستخدام برامج الحسابات الصيغية الرياضية مثل Maple، أو Mathematica، لنحصل بذلك على قيم الثوابت a_i، من أجل $i=0,1,...,m$، و k و c، ثم نعوّضها في حلّ معادلة برنولي (8) ثم في (6)، فنحصل على حلول تامة ذات موجة جوالة، (Travelling wave solutions)، للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

حلول تامة ذات موجة جوالة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة:

باستخدام التحويل الموجي (4)، وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية (2)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-ck\,u'(\xi) \;\; , \;\; \frac{\partial u}{\partial x}=k\,u'(\xi) \;\; , \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^2u''(\xi)$$

نحصل على المعادلة التفاضلية العادية للمجهول $u(\xi)$ الآتية:

$$(-ck+\alpha k)u'-k^2u''+u^3-(1+\rho)u^2+\rho u=0 \tag{10}$$

بفرض أنّه يمكن كتابة حلّ المعادلة (10) بالشكل (6)، ولدينا:

$$\deg\left(u(\xi)^3\right)=m \quad , \quad \deg\left(\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)\right)=m+2$$

عندئذٍ بموازنة تجانس u^3 مع u''، نجد أنّ $3m=m+2$، ومنه $m=1$، وبالتعويض في (6)، نحصل على:

$$u(\xi)=a_1G(\xi)+a_0 \quad , \quad a_1\neq 0 \tag{11}$$

حيث إنّ a_0 و a_1 ثابتان، يطلب تحديدهما.

نعوض العلاقة (11) في المعادلة (10)، مع مراعاة العلاقتين (7) و(9)، فنحصل على:

$$C_0+C_1G(\xi)+C_2G^2(\xi)+C_3G^3(\xi)=0 \tag{12}$$

حيث:

$$C_0=a_0\rho-a_0^2-a_0^2\rho+a_0^3$$
$$C_1=a_1ck\,\lambda-a_1\alpha k\,\lambda-k^2a_1\lambda^2-2a_0a_1+3a_0^2a_1-2a_0a_1\rho+a_1\rho$$
$$C_2=-a_1ck\,\mu+a_1\alpha k\,\mu+3k^2a_1\lambda\mu+3a_0a_1^2-a_1^2-a_1^2\rho$$
$$C_3=-2k^2a_1\mu^2+a_1^3$$

بجعل:

$$C_0=0\,,\,C_1=0\,,\,C_2=0\,,\,C_3=0 \tag{13}$$

نحصل على الجملة الجبرية غير الخطيّة ذات المجاهيل a_0 و a_1 و k و c، وبحلّ هذه الجملة مستخدمين برنامج Maple، نحصل على الحالات الآتية:

<u>**حالة 1:**</u> إذا كان $a_1=\dfrac{\mu}{\lambda},\ a_0=0,\ k=\dfrac{\pm 1}{\lambda\sqrt{2}},\ c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mp\sqrt{2}\rho+\alpha$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حلّ ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

$$u(x,t)=\frac{\mu}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(x-\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\mp\sqrt{2}\rho+\alpha\right)t\right)\right)} \qquad (14)$$

حالة 2: إذا كان $c=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(\pm\sqrt{2}\alpha-2+\rho\right),\ k=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\frac{\rho}{\lambda},\ a_0=0,\ a_1=\frac{\rho\mu}{\lambda}$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حل ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

$$u(x,t)=\frac{\mu}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\rho\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\sqrt{2}\alpha-2+\rho\right)t\right)\right)} \qquad (15)$$

حالة 3: إذا كان $c=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{2}\rho+\alpha,\ k=\frac{\pm1}{\lambda\sqrt{2}}\ ,\ a_0=1,\ a_1=\frac{-\mu}{\lambda}$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حلّ ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

$$u(x,t)=1-\frac{\mu}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(x-\left(\frac{\mp1}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{2}\rho+\alpha\right)t\right)\right)} \qquad (16)$$

حالة 4: إذا كان $c=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(\rho\pm\sqrt{2}\alpha+1\right),\ k=\frac{\pm(-1+\rho)}{\lambda\sqrt{2}},\ a_0=1,\ a_1=\frac{\mu(-1+\rho)}{\lambda}$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حلّ ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

$$u(x,t)=1+\frac{\mu(-1+\rho)}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm(-1+\rho)}{\sqrt{2}}\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho\pm\sqrt{2}\alpha+1\right)t\right)\right)} \qquad (17)$$

حالة 5: إذا كان $c=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(\pm\sqrt{2}\alpha+2-\rho\right),\ k=\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}\lambda}\ ,\ a_0=\rho,\ a_1=\frac{-\rho\mu}{\lambda}$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حلّ ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

$$u(x,t)=\rho-\frac{\rho\mu}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm\rho}{\sqrt{2}}\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\rho\pm\sqrt{2}\alpha\right)t\right)\right)} \qquad (18)$$

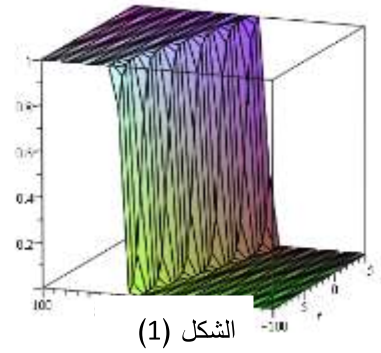
حالة 6: إذا كان $c=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\left(-\rho\pm\alpha\sqrt{2}-1\right),\ k=\frac{\pm(-1+\rho)}{\lambda\sqrt{2}},\ a_0=\rho,\ a_1=\frac{-\mu(-1+\rho)}{\lambda}$، وبالتعويض في (8) ثم في (11)، نحصل على حل ذات موجة جوالة للمعادلة (2):

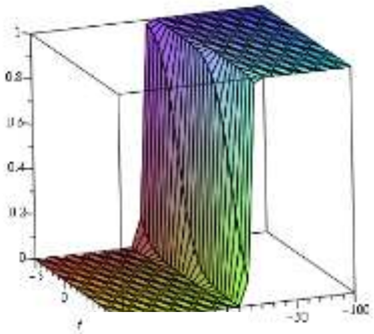
$$u(x,t)=\rho-\frac{\mu(-1+\rho)}{\mu+C.\lambda\exp\left(\frac{\pm(-1+\rho)}{\sqrt{2}}\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1-\rho\pm\sqrt{2}\alpha\right)t\right)\right)} \qquad (19)$$

نلاحظ في الحالات جميعها، أنّه عندما $\mu=0$، فإنّ حلّ المعادلة (2) يكون $u(x,t)=L$، حيثإنّ L عدد ثابت يأخذ إحدى القيم 0 أو 1 أو ρ، أي أنّ الحلّ مقدار ثابت، وفي الحالات جميعها، نجد أنّ الحلول تأخذ طبيعة حلّ معادلة برنولي التفاضلية العادية نفسها(7)، وهي حلول ذات موجة جوالة (Traveling wave) ، كما هو واضح في الشكل (1) والشكل (2)، كذلك نجد أنّ هذه الحلول لها طبيعة مشابهة للحلول التي حصلنا عليها في [21]، كذلك إذا عوّضنا $\alpha=0$، فإنّنا نحصل على معادلة Fitzhugh–Nagumo التقليدية، ونحصل على حلول أفضل وأعمّ من

الحلول الواردة في المقالة [15]، حيث إنّ الباحث قد ارتكب خطأ عند الاشتقاق، حيث يجب أن يظهر u'' مضروباً بـ k^2 بدلاً من k، وهذا يغير كثيراً في الجملة الجبرية غير الخطيّة وفي حلولها، ممّا ينعكس على حلول المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، والجدير بالذكر أنّنا أهملنا حلول الجملة الجبرية غير الخطيّة عندما يكون $a_1 = 0$.

ويبيّن كلّ من الشكل (1) والشكل (2)، شكل الحلّ التام ذات الموجة الجوالة للمعادلة (2) في الحالة الأولى مع $\rho = 2, \alpha = 1, \mu = 1, \lambda = 1, C = 1$.


الشكل (1)


الشكل (2)

الاستنتاجات والتوصيات:

يمكننا الآن الجواب على السؤال المطروح في المقدّمة، أي يمكننا القول إنّه يمكن أن نطبق طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية على معادلة Fitzhugh–Nagumo المعمّمة ذات الأمثال الثابتة، بحيث نحصل على حلول تامة ذات موجة جوالة ، وهي من طبيعة حل معادلة برنولي نفسها(7)، تبيّن من خلال مناقشة إيجاد الحلول أنّ طريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية بسيطة وفعالة ،وأنّها أبسط من طريقة الدالة الأسية المطبّقة على المعادلة نفسها في المقالة [21]، من حيث إعطاء جملة جبرية أقلّ حجماً وأقلّ متحوّلاً، كما نجد أنّ هذه الطريقة لا تتطلب معرفة متقدّمة في الرياضيات، وأنّها تعتمد بشكل كبير على حلّ معادلة برنولي التفاضلية العادية ،وعلى طريقة موازنة التجانس، و يمكن اعتمادها في إيجاد حلول تامة للمعادلات التفاضليّة الجزئيّة. ويجدر بنا الإشارة إلى أنّ الحسابات المتعلّقة بهذا العمل جميعها ، تمّت باستخدام برنامج Maple 13.

المراجع:

[1] MALFIET, W. *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*, Am. J. Phys. 60,650-654, 1992.

[2] PARKES, E.J., Duffy, B.R. *An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations*, Comput. Phys. Commun. 98, 288-300, 1996.

[3] FAN, E. *Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations*, Phys.Lett. A 277, 212-218, 2000.

[4] FU, Z., LIU, S., LIU, S. AND ZHAO, Q. *New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations*, Phys. Lett. A 290, 72-76, 2001.

[5] ELWAKIL, S.A., EL-LABANY, S.K., ZAHRAN, M.A. AND SABRY, R. *Modifed extended tanhfunction method for solving nonlinear partial diferential equations*, Phys. Lett. A 299, 179-188, 2002.

[6] Z.S. FENG, *On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation*, Phys. Lett. A 293 (2002) 57–66.

[7] Z.S. FENG, X.H. WANG, *The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg-de Vries equation*, Phys. Lett. A 308 (2003) 173–178.

[8] ZHENG, X., CHEN, Y. AND ZHANG, H. *Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation*, Phys. Lett. A 311, 145-157,2003.

[9] SHEN S., PAN, Z. *A note on the Jacobi elliptic function expansion method*, Phys. Lett. A308, 143-148, 2003.

[10] CHEN, H.T., HONG-QING, Z. *New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation*, Chaos Solitons Frac. 20, 765-769, 2004.

[11] HE, J.H., WU, X.H. *Exp-function method for nonlinear wave equations*, Chaos Solitons Frac. 30, 700-708, 2006.

[12] WANG, M., LI, X. AND ZHANG, J. *The G'/G-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics*, Phys. Lett. A 372, 417-423,2008.

[13] GUO, S., ZHOU, Y. *The extended G'/G-expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations*, Appl. Math. Comput. 215, 3214-3221, 2010.

[14] LÜ, H.L., LIU, X.Q. AND NIU, L. *A generalized G'/G-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations*, Appl. Math. Comput. 215, 3811-3816, 2010.

[15] Bin Zheng, *New exact traveling wave solutions for fitzhugh-nagumo equation*, 2012 International Conference on Image, Vision and Computing (ICIVC 2012), doi: 10.7763/IPCSIT.2012.V50.40.

[16] M. F. El-Sabbagh, R. Zait and R. M. Abdelazeem, *New exact solutions of some nonlinear partial differential equations via the bernoulli sub-ode method*, International Journal of Modern Mathematical Sciences, 2014, 12(1): 30-42

[17] S. Marzan, F. Farhana, Md. Tanjir Ahmed, K. Khan and M. Ali Akbar, *study of nonlinear evolution equations in mathematical physics,* Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences Volume 13 Issue 9 Version 1.0 Year 2013

[18] Y. Pan, Q. Feng, *A generalized bernoulli sub-ODE Method and Its applications for nonlinear evolution equation,* International Journal of Engineering And Science Vol.4, Issue 8 (August 2014), PP 87-90.

[19] Bin, *A new bernoulli sub-ode method for constructing traveling wave solutions for two nonlinear equations with any order*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 73, Iss. 3, 2011

[20] R. KARROUM, S. INJROU, *finding exact solutions to generalized Fitzhug-Nagumo equation with constant coefficients*, Arabic journal of Tishreen University, 2014.

[21] S. INJROU, R. KARROUM, *Exact solitary wave solutions to generalized fitzhug-nagumo equation with constant coefficients by using exp-function method*, Arabic, journal of Tishreen University, 2014.

[22] R. FITZHUGH, *Impulse and physiological states in models of nerve membrane*, Biophys. J. 1 (1961) 445–466.

[23] J.S. NAGUMO, S. ARIMOTO, S. YOSHIZAWA, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE 50 (1962) 2061–2071.