مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

# دراسة في المجموعات المفتوحة من النّوع β و الفضاءات المتراصّة

**الدكتور عدنان ظريف***

**نوره العسلي****

**(تاريخ الإيداع 4 / 12 / 2014. قُبِل للنشر في 9 / 3 /2015)**

## □ ملخّص □

نقدّم في هذا البحث دراسة لبعض أنواع التراصّ كالتراصّ من النوع β المعرف باستخدام المجموعات المفتوحة من النوع β التي عرفت من قبل الباحث المصّري عبد المنصف عام 1983، وندرس بعض خواصه ، و نناقش العلاقة بينه و بين أنواع أخرى من التراصّ ، و قد توصّلنا إلى بعض النتائج مثل: إذا كان $(X,\tau)$ فضاءً متراصّاً بقوة بحيث إنّ أيّة مجموعة مفتوحة من النوع β تكون كثيفة في كل مكان فيه ، فإنّ لفضاء $(X,\tau)$ يكون متراصّاً من النوع β.

**الكلمات المفتاحية:** المجموعة المفتوحة من النوع β،التراصّ من النوع β،الفضاءات غير المترابطة نهائياً.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

** طالبة دراسات عليا(ماجستير)–قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (2) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (2) 2015

# Studying in β-open sets and compact Space

**Dr. Adnan Zarif***
**Noura Alasly****

**(Received 4 / 12 / 2014. Accepted 9 / 3 /2015)**

## □ ABSTRACT □

In this paper ,we introduce new type of compact spaces called β-compact spaces, using β-open sets which defined by Dr.Abd El-Monsef 1983 , we study some of their properties and discuss relationship between this spaces with other types of compactness., we have reached to many results such as: every strongly compact space X which satisfy condition "every β- open set of X is denes" is compact.

**Keywords:** β-open set , β-compact space, Extremally disconnected Topological spaces .

***Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Postgraduate Student Department Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

## مقدّمة:

يعدّ التراصّ من أهمّ الصفات المميزة للفضاءات التبولوجية ، إذ إنّ التراصّ يمكّننا من دراسة خصائص الفضاء المتراصّ بالاعتماد على أسرة جزئية منتهية من المجموعات الجزئية المفتوحة فيه التي تشكل تغطية له.و من أجل نتائج أعمق في دراسة الفضاء التبولوجي ، تمّ إضافة شروط جديدة على المجموعات الجزئية فيه، ممّا أدى لظهور أنماط جديدة من المجموعات أكثر عمومية من المجموعات المفتوحة ، على سبيل المثال المجموعات المفتوحة من النوع**β[1]** ،مجموعات مفتوحة من النوع**θ[2]** ،ومجموعات مفتوحة من النوع **b[3]** ،ومجموعات مفتوحة من النوع **α[4]**، وعملنا التركيز على المجموعات المفتوحة من النوع β التي قدمت من قبل د.عبد المنصف المصري الأصل عام **1983** ، والمكافئة إلى فكرة المجموعات نصف قبل المفتوحة**[5]** التي قدمت من قبل د. أندري جيفك عام **1986** ، و درست خصائص الفضاء التبولوحي بالاعتماد عليها .

## أهمية البحث وأهدافه:

**الهدف:** نقدّم في هذا البحث دراسة حول تراص الفضاءات التبولوجية بالاعتماد على المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$و نحاول الربط بينها وبين أنواع خاصة من الفضاءات التبولوجية كالفضاءات المتراصّة بقوة و الفضاءات غير المترابطة نهائياً و أنواع أخرى....

## طرائق البحث ومواده:

نستفيد في هذا البحث من مفهوم المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$، ومن عدّة أنماط من المجموعات المفتوحة، والخصائص التي تتمتع بها هذه الأنماط في بعض الفضاءات التبولوجية كالفضاءات غير المترابطة نهائياً، وفضاءات هاوسدورف..

لذلك نورد بعض المفاهيم الأساسية التي تلزمنا في هذا لبحث.

**تعاريف و مفاهيم أساسية:**

ليكن $(X, \tau)$فضاءً تبولوجياًكيفياً.

**تعريف[1](1):**

يقال عن المجموعة**A** إنها مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ ($\beta$ OpenSet−) ،إذا كان $A \subseteq cl(\text{int}(cl(A)))$ و سنرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$ في هذا الفضاء بالرمز $\beta O(X, \tau)$ أو $\beta O(X)$ .

**تعريف[1](2):**

يقال عن المجموعة **A** إنّها مجموعة نصف مفتوحة(Semi Open Set) ،إذا كان $A \subseteq cl(\text{int}(A))$و سنرمز لأسرة المجموعات نصف المفتوحة في هذا الفضاء بالرمز $SO(X, \tau)$ أو $SO(X)$.

**تعريف[6](3):**

يقال عن المجموعة **A** إنها مجموعة قبل مفتوحة(Preopen Set) إذا كان $A \subseteq \text{int}(cl(A))$ و سنرمز لأسرة المجموعات قبل المفتوحة في هذا الفضاء بالرمز $PO(X, \tau)$ أو $PO(X)$.

**تعريف(4):**

يقال عن الفضاء $(X,\tau)$إنهّ فضاء متراصّ(Compact Space) ،إذا كان من كل تغطية مفتوحة للفضاء$X$ مثل $\{T_i, i\in I\}$ ، يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية.

**تعريف[6](5):**

يقال عن الفضاء $(X,\tau)$إنّه فضاء متراصّ من النوع $\beta$ ( $\beta$–Compact Space ) ، إذا كان من كل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$ للفضاء$X$ مثل $\{T_i, i\in I\}$ ، يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية .

**تعريف[6](6):**

يقال عن الفضاء $(X,\tau)$إنّ فضاءمتراصّ بقوة (Strongly Compact Space) ، إذا كان من كل تغطية قبل مفتوحة للفضاء$X$ مثل $\{T_i, i\in I\}$ ، يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية.

**تعريف[6](7):**

يقال عن الفضاء $(X,\tau)$ إنّه فضاء شبه $\mathrm{H}$مغلق ( quasi $\mathrm{H}$ –Closed) ،إذا كان من كل تغطية مفتوحة للفضاء**X**مثل $\{T_i, i\in I\}$ ، نستطيع أن نكتب $X=\bigcup_{i=1}^{n} cl(T_i)$.

**تعريف[7](8):**

يقال عن الفضاء التبولوجي $(X,\tau)$إنه فضاء $E.D$(Extremally disconnected topological space) إذاكانت $cl(T)\in\tau, \forall T\in\tau$.

**تعريف(9):**

يقال عن الفضاء التبولوجي $X$ إنةّ فضاء هاوسدورف ، أ و فضاء $T_2$ ،إذا وجدت فيه **نقطتين مختلفتين** $x,y$ **مجاورتين من نقاطه** $V_x, V_y$ لـ $x,y$ **على الترتيب بحيث يكون :**

$$V_x \cap V_y = \Phi$$

**تعريف(10):**

يقال عن الفضاء التبولوجي $X$ إنه فضاء $KC$ إذا كانت كل مجموعة متراصذة في هذا الفضاء مغلقة فيه.

**تمهيدية[1](1):**

لتكن $A \subseteq B \subseteq X$ حيث B مجموعة مفتوحة من النوع α في X، عندئذٍ

$$A\in\beta O(B) \Leftrightarrow A\in\beta O(X)$$

**تمهيدية[7](2):**

العبارات الآتية متكافئة من أجل أي فضاء تبولوجي $(X,\tau)$:

(a) $X$ فضاء $E.D$

(b)إذا كانت $A\in SO(X,\tau)$ و $B\in\beta O(X,\tau)$ فإن $cl(A)\bigcap cl(B)=cl(A\bigcap B)$

(c)إذا كانت $A\in SO(X,\tau)$ و $B\in\beta O(X,\tau)$ فإن $A\bigcap B\in\beta O(X,\tau)$

**تمهيدية(3) [7] :**

بفرض $X$فضاء تبولوجي كيفي، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

(a) $X$فضاء $E.D$

(b) $\beta O(X)=PO(X)$

(c) من أجل كل $A\in\beta O(X)$ فإن $cl(A)\in\tau$

(d) من أجل كل $A\in PO(X)$ فإن $\beta cl(A)\in\tau$

**نتيجة:(1)**

بما أنّ $\tau\subseteq\beta O(X,\tau)$ فإنّ كل فضاء متراصّ من النوع $\beta$ هو فضاء متراصّ.

**نتيجة:(2)**

إن عكس النتيجة السابقة غير صحيح بالضرورة كما يبين المثال الآتي:

لتكن $\mathbb{Z}$مجموعة الأعداد الصحيحة ، و لنعرف عليها التبولوجيا$\tau$بالشكل:

$$\tau=\{T\subseteq\mathbb{Z},0\notin T\}\cup\{\mathbb{Z}\}$$

لنوجد أسرة المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$ في هذا الفضاء:

فإنّ $A\subseteq\mathbb{Z}$ أو $0\in A$ أو $0\notin A$

- إذا كانت$0\in A$ فهذا يعني أنّها مجموعة مغلقة و بالتالي $CL(A)=A$ ، ومنه:

$$\operatorname{int}(cl(A))=\operatorname{int}(A)$$

$$\operatorname{int}(cl(A))=\operatorname{int}(A)=A\setminus\{0\}$$

$$cl(\operatorname{int}(cl(A)))=A\Rightarrow A\subseteq cl(\operatorname{int}(cl(A)))\Leftrightarrow A\in\beta o(\mathbb{Z},\tau)$$

- إذا كانت $0\notin A$ عندئذ $cl(A)=A\cup\{0\}$

$$\operatorname{int}(cl(A))=A\Rightarrow cl(\operatorname{int}(cl(A)))=A\cup\{0\}\Rightarrow A\subseteq cl(\operatorname{int}(cl(A)))$$
$$\Leftrightarrow A\in\beta o(\mathbb{Z},\tau)$$

و هذا يعني أنّ $\beta o(\mathbb{Z},\tau)=P(\mathbb{Z})$

الأسرة $\{Tn=\{-n,\dots\dots,-1,0,1,\dots\dots\dots,n\};n\in\mathbb{N}\}$ تشكل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$ للمجموعة $\mathbb{Z}$لكن لا يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية منها للمجموعة $(\mathbb{Z},\tau)\Leftarrow\mathbb{Z}$ ليس متراصّاً من النوع $\beta$ من جهة ثانية أن أيّ أسرة مجموعات مفتوحة يجب أن تضم $\mathbb{Z}$ حتى تشكل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء، و يمكن الحصول على تغطية جزئية منتهية للمجموعة$\mathbb{Z}$ ، وهي أسرة جزئية من التغطية تحوي $\mathbb{Z}$.

## النتائج و المناقشة:

**مبرهنة(1)**:

كل مجموعة $\beta$مغلقة في فضاء متراصّ من النوع $\beta$ هي مجموعة متراصة من النوع $\beta$ .

الإثبات:

لتكنAمجموعة $\beta$مغلقة في الفضاء X المتراص من النوع $\beta$و $\{T_i, i \in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للفضاء X ،،بما أنّ A مجموعة$\beta$مغلقة ، فإن X \ A مجموعة مفتوحة من النوع$\beta$و الأسرة $\{T_i, i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$تشكل تغطية مفتوحة من النوع β للفضاء X و كون X فضاءً متراصّاً من النوع $\beta$ :

$$X = \cup_{i=1}^{n} T_i \cup (X \setminus A)$$

و هذا يعني أنّ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T$ قد على تغطية جزئية منتهية للمجموعة A ، من المجموعات المفتوحة من النوع β من أي تغطية لها بوساطة هذا النوع من المجموعات ، و منه نجد أنّ A مجموعة متراصّة من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(2):**

ليكن X فضاءً تبولوجياً كيفياً، و$B$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$و لتكن $T$ مجموعة مفتوحة من النوع$\beta$ بحيث $T \subseteq B$ عندئذ إن $B \setminus T$مجموعة متراصة من النوع$\beta$ .

الإثبات :

لتكن $\{T_i, i \in I\}$ تغطية مفتوحة من النوع β للمجموعة $B \setminus T$ عندئذ الأسرة تشكل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$للمجموعةB و كونBمجموعة متراصة من النوع $\beta$فإنّ

$B \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} Ti) \cup (T)$ لكن $B = (B \setminus T) \cup (T) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} Ti) \cup (T)$ وهذا يعني أن $B \setminus T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ti$ و منه المجموعة$B \setminus T$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(3):**

إذا كان X فضاءً بولوجياً كيفياً،و كانت$F$مجموعة مغلقة من النوع $\beta$و A مجموعة متراصة من النوع $\beta$ عندئذ تكون$A \cap F$مجموعة متراصة من النوع$\beta$ .

الإثبات:

لتكن $\{T_i, i \in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للمجموعة $A \cap F$ في X

هذا يعني أن$A \cap F \subseteq \bigcup_{i \in I} Ti$بالتالي:

$$A = (A \cap F) \cup (A \setminus F) \subseteq (\cup_{i \in I} T_i) \cup (X \setminus F)$$

لكن بما أنّ $F$ مجموعة مغلقة من النوع $\beta$فإن $X \setminus F$ مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$في Xو هذا يعني أن الأسرة$\{T_i, i \in I\} \cup \{X \setminus F\}$ تشكل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$للمجموعة A ،لكن A مجموعة متراصة من النوع $\beta$بالفرض $A = (\bigcup_{i=}^{n} Ti) \cup (X \setminus F)$ و منه $A \cap F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ti$ ، و هذا يعني أنّ $A \cap F$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(4):**

لتكن$B \subseteq X$ حيث $B$ مجموعة مفتوحة من النوع α و لتكن $A \subseteq B$ عندئذٍ إن :

A مجموعة متراصة من النوع $\beta$في $X \Leftrightarrow A$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$فيB

الإثبات:

لتكن الأسرة$\{T_i, i \in I\}$تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للمجموعةAفي B بالتالي $A \subseteq \bigcup_i Ti$ ، وحسب التمهيدية (1) من أجل كل $i \in I$لدينا$Ti = Gi \cap B$ ، حيث $Gi \in \beta O(X)$ من أجل كل $i \in I$ بالتالي الأسرة $\{Gi, i \in I\}$ تشكل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$للمجموعة $A$ في $X$ لكن $A$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$بالفرض بالتالي $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Gi$ ، و منه:

و$A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} Gi) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n}(Gi \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ti}$ بالتالي $A$ مجموعة متراصة من النوع β في $B$.

بالعكس ، لتكن الأسرة $\{T_i, i \in I\}$تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للمجموعةA في $X$ عندئذ الأسرة $\{Ti \cap B, i \in I\}$ ، تشكل تغطية مفتوحة من النوع $\beta$للمجموعةAفي B ،لكن كون B مجموعة مفتوحة من النوع α في X ومجموعة متراصّة من النوع β في B فإن$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(Ti \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ti}$ ، وهذا يعني أنّ A مجموعة متراصة من النوع $\beta$في X .

**مبرهنة(5):**

إذا كان$(X, )$فضاء هاوسدورف ،فإنّه من أجل كل مجموعة $A$ مجموعة متراصّة من النوع $\beta$، و كل $x$من $X \setminus A$توجد مجموعتان مفتوحتان مثل $T, G$ تحققان :

$$x \in T, \quad A \subseteq G, \qquad T \cap G = \Phi$$

الإثبات:

لدينا بالفرض $X$ فضاء هاوسدروف و$A$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ ، و لنأخذ عنصرين كيفيين $xi \in X\setminus A$و $ai \in A$ عندئذ $x \neq a$ و كون $X$ فضاء هاوسدورف ، فإنّه توجد مجموعتان مفتوحتان $Tai$ و$Gx$بحيث $ai \in Tai xi \in Gxi Tai \cap Gxi = \Phi$

الأسرة $\{Tai, ai \in A, i \in I\}$ ، تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة $A$ ، و كون $A$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ بالفرض ،فإنه بالإمكان الحصول منها على تغطية جزئية منتهية للمجموعة $A$ أي$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Tai$

لنضع $T = \bigcup_{i=1}^{n} Tai$. واضح أنّ $T \in \tau$ من جهة ثانية لدينا $x \in Gxi$ مهما تكن فإنّ $i \in I$ $x \in$ $\bigcap_{i=1}^{n} Gxi = G$ أيضاً $G \in \tau$ ، وبما أنّ $Tai \cap Gxi = \Phi$ مهما تكن $i \in I$ فإن $T \cap G = \Phi$و يكون $A \subseteq G$ و$x \in T$.

**تمهيدية(4):**

ليكن X فضاء هاوسدورف،عندئذ يكون: $\beta O(X) = PO(X)$

الإثبات:

لتكن $A \in \beta O(X)$ مجموعة كيفية ، و لتكن $x \in X \setminus int(cl(A))$نقطة كيفية و لنأخذ $y \in \mathrm{int}(cl(A))$عندئذ إن $x \neq y$ و كون $X$ فضاءً $T_2$ ، فإنه توجد $V_x \in V(x), V_y \in V(y)$ ، بحيث يكون $V_x \cap V_y = \phi$ بوضع $V_y = \mathrm{int}(cl(A))$ نجد $V_x \bigcap \mathrm{int}(cl(A)) = \varnothing, \forall x \in X \setminus \mathrm{int}(cl(A))$ و هذا يعني أنّ:

$x \notin cl(\mathrm{int}(cl(A))), \forall x \in X \setminus \mathrm{int}(cl(A))$ بالتالي $x \in X \setminus cl(\mathrm{int}(cl(A)))$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة $x$ نجد أنّ $X \setminus \mathrm{int}(cl(A)) \subseteq X \setminus cl(\mathrm{int}(cl(A)))$ و منه:

$cl(\mathrm{int}(cl(A))) \subseteq \mathrm{int}(cl(A))$ و كون $A \in \beta O(X)$ ينتج لدينا $A \subseteq \mathrm{int}(cl(A)) \Leftrightarrow A \in PO(X)$و هذا يعني أنذ : $\beta O(X) \subseteq PO(X)$، و لدينا $PO(X) \subseteq \beta O(X)$ أي أن $\beta O(X) = PO(X)$

**نتيجة(3):**

كلّ فضاء $T_2$ و متراص بقوة هو فضاء متراصّ من النوع $\beta$ .

**تمهيدية(5):**

ليكن $(X,\tau)$ فضاءًتبولوجياً يحقق الخاصة الآتية:

كل مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ ، هي مجموعة كثيفة في هذا الفضاء

عندئذ يكون $\beta O(X) = PO(X)$

الإثبات:

لتكن $A \in \beta O(X)$ مجموعة كيفية وكثيفة في $(X,\tau)$ و لنفرض جدلا أنّها ليست مجموعة مفتوحة، فإنّ $A \not\subseteq \operatorname{int}(cl(A))$، هذا يعني أنّ $A \setminus \operatorname{int}(cl(A)) \neq \varnothing$ ، أي أنّه: $\exists x \in A : x \notin \operatorname{int}(cl(A)) \subseteq cl(A)$ و ذلك مهما تكن $T \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ فحيث $x \in T$ بالتالي $T \not\subset cl(A)$ ،وهذا يعني أنّ $T \neq X$ ، و منه إمّا $cl(A) \subseteq T$أو $T \cap cl(A) = \varnothing$.

إذا كانت $cl(A) \subseteq T$ ، فإنه يناقض كون $A$ مجموعة كثيفة فإنّ $T \cap cl(A) = \varnothing$ ، و منه $T \cap A = \varnothing$ ، و هذا يناقض– أيضاً –كون $A$ مجموعة كثيفة و الفرض الجدلي خاطئ ،أي أن $A \in PO(X)$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $A$ ، حيث $A \in \beta O(X)$ ينتج لدينا $\beta O(X) \subseteq PO(X)$ ، ولدينا دوما $PO(X) \subseteq \beta O(X)$ ،أي أنّ $\beta O(X) = PO(X)$ .

**نتيجة(4):**

إذا كان $X$ فضاءًمتراصّاً بقوة ، حيث إنّ كل مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ ، هي مجموعة كثيفة في هذا الفضاء، فإنه فضاء متراص من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(6):**

كل مجموعة متراصة من النوع $\beta$ في فضاء هاوسدورف هي مجموعة مغلقة من النوع $\beta$.

الإثبات:

لتكن $A$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ في فضاء هاوسدورف وحسب المبرهنة(5)أياً يكن $x \notin A$ توجد مجموعتان مفتوحتان مثل $T, G$ تحققان :

$$x \in T, \quad A \subseteq G, \qquad T \cap G = \Phi$$

و كون $A \subseteq G$ فإن $A \cap G = \Phi$ لكن $G \in V(x) \subseteq \beta V(x)$ بالتالي $x \notin \beta cl(A)$ و عليه يكون$x \in X\backslash\beta cl(A)$ و بمراعاة الاختيار الكيفي ل $x \in X\backslash A$ نجد $X\backslash A \subseteq X\backslash\beta cl(A)$ و منه $\beta cl(A) \subseteq A$و لكن $A \subseteq \beta cl(A)$ دوماً و منه $A = \beta cl(A)$ ،وهذا يعني أنّ $A$ مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ في $X$.

**تعريف(11):**

يقال عن الفضاء التبولوجي $(X,\tau)$إنّه فضاء $\beta - KC$إ، ذا كانت كل مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ عبارة عن مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(7):**

إذا كان X فضاء $\beta - KC$بحيث يكون فيه كل مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ عبارة عن مجموعة متراصة من النوع $\beta$ ،عندئذ الأسرة$\beta O(\mathrm{X})$تعرف تبولوجيا على X.

الإثبات:

نعلم أنّ $X,\Phi \in \beta O(X)$ في أي فضاء تبولوجي ، بالإضافة إلى كون أي اجتماع لمجموعات مفتوحة من النوع $\beta$ هو مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$. بقي أن نبرهن أن تقاطع أي مجموعتين مفتوحتين من النوع $\beta$ هو مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ .

لتكن $A,B \in \beta O(X)$ عندئذ إن كل من $A^c,B^c$ مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ وحسب الفرض كل منهما مجموعة متراصة من النوع $\beta$ ، و بما أنّ الاجتماع المنتهي لمجموعات متراصة من النوع $\beta$ هو مجموعة متراصة من النوع $\beta$ ، فإن $A^c \cup B^c$ مجموعة متراصة من النوع $\beta$ في $X$ و كون $X$ فضاء $\beta-KC$ فإن $A^c \cup B^c$ مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ بالتالي $X\setminus\left(A^c \cup B^c\right)$ مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ لكن

$$X \setminus (A^c \cup B^c) = X \setminus (A \cap B)^c = A \cap B$$

أي أنّ $A \cap B \in \beta o(X)$ و منه الأسرة $\beta o(X)$ تعرف تبولوجيا على $X$ .

**مبرهنة(8):**

ليكن $X$ فضاء $\beta-KC$ ، حيث إنّ كل مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ فيه هي مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ عندئذ يكون $X$ فضاء $E.D$ .

الإثبات:

لتكن $A$مجموعة مغلقة من النوع β، وحسب الفرض أنّ $A$مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ ، و لتكن $B$ مجموعة نصف مغلقة بالتالي $B$مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ ، و بحسب الفرض تكون $B$مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ ،لنضع $F = A \cup B$ إن $F$مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ لأن الاجتماع المنتهي لمجموعات متراصة من النوع $\beta$ ، هو مجموعة متراصةمن النوع $\beta$ و كون $X$فضاء $\beta-KC$ ، فإن $F$ مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ ، وهذا يعني أن $X \setminus F$ مجموعة مفتوحةمن النوع $\beta$ ، أي أن $X \setminus F = (X \setminus A)\bigcap(X \setminus B) \in \beta O(X,\tau)$ وهذا يعني بحسب التمهيدية (2) أن $X$ فضاء $E.D$ حيث إنّ $X \setminus A \in \beta O(X,\tau)$ و $X \setminus B \in SO(X,\tau)$ .

**مبرهنة(9):**

ليكن $X$ فضاء $\beta-KC$ ، حيث إن كل مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ فيه هي مجموعة متراصة من النوع $\beta$ ، عندئذ يكون $X$ فضاءًمتراصّاً من النوع $\beta$ .

الإثبات:

لتكن $A$مجموعة متراصة من النوع $\beta$ بما أن $X$فضاء $\beta-KC$ ، فإن $A$مجموعة مغلقة من النوع $\beta$ و هذا يعني أنّ $X \setminus A$مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ و حسب الفرض تكون $X \setminus A$مجموعة متراصة من النوعβ.

لدينا $X = A \cup \left(X \setminus A\right) \subseteq \left(\cup_{i=1}^{n} T_i\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{m} G_i\right) = \cup_{i=1}^{r} X_i , X_i, G_i, T_i \in \beta O\left(X,\tau\right) \forall i$ ،

و منه $X$فضاء متراص من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(10):**

ليكن $X$ فضاء $KC$بحيث إنّ كل مجموعة مفتوحة من النوع $\beta$ فيه هي مجموعة متراصة من النوع $\beta$ عندئذ يكون $X$ فضاء $E.D$ .

الإثبات:

لتكن $T$مجموعة مفتوحة كيفية من $X$عندئذ بحسب الفرض أنّ $T$مجموعة متراصة من النوع $\beta$ فهيمجموعة متراصة ، و كون $X$ فضاء $KC$ ، فهي مجموعة مغلقة ومنه $cl(T)=T$ ، و هذا يعني أن $cl(T)\in\tau$ و بالتالي $X$فضاء $E.D$ .

**مبرهنة(11):**

إذا كان $X$فضاء $E.D$ و متراصّاً بقوة عندئذ يكون X فضاء متراصاً من النوع $\beta$ .

الإثبات:

لتكن $\{T_i, i\in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للفضاء$X$عندئذ و بحسب التمهيدية(3) فإن التغطية السابقة هي تغطية كيفية من المجموعات قبل المفتوحة للفضاء$X$ ، و كون الفضاء متراصاً بقوة بالفرض ، يوجد تغطية جزئية منتهية منها للفضاء $X$ ، و هذا يعني أن $X$ فضاء متراصّ من النوع $\beta$ .

**مبرهنة(12):**

إذا كان $X$فضاء $E.D$ متراصاً من النوع $\beta$ عندئذ يكون $X$ فضاء شبه H مغلق.

الإثبات:

لتكن $\{T_i, i\in I\}$ تغطية كيفية من المجموعات المفتوحة للفضاء$X$،بما أنّ $X$فضاء $E.D$ ، فإن $cl(T_i)\in\tau, \forall i\in I$ و بالتالي الأسرة $\{cl(T_i), i\in I\}$ تشكل تغطية من المجموعات المفتوحة للفضاء$X$و و تغطية من المجموعات المفتوحة من النوع $\beta$للفضاء$X$ ، و كون $X$متراص من النوع $\beta$ ، فإن $X=\cup_{i=1}^{n} cl(T_i)$ و هذا يعني أن $X$ فضاء شبه H مغلق .

## الاستنتاجات و التوصيات:

في هذا البحث قمنا بدراسة العلاقة بين التراصّ من النوع β و أنواع أخرى من التراص ، و ربطنا بين الفضاءات المتراصة من النوع βو الفضاءات غير المترابطة نهائياً، كما قمنا بتعريف الفضاءات $\beta-KC$ و ربطها بالمفاهيم السابقة ، و نشير إلى أهمية دراسة تأثير بعض أنواع الاستمرار على هذه الفضاءات كالاستمرار القوي و الاستمرار من النوع $\beta$ .

## المراجع:


[1].ABD-EL-MONSEF,M.E.β-*open sets and* β-*continuous mapping*, Bull. Fac. Sci. Assut Univ,12(1),1983,77-

[2].M.Caldas.S.Jafari and T.Noiri,Some separation axioms via modified θ-open sets, Bulletin of the Iranian mathematical Society vol.No.2(2003);pp1-12.

[3]. M. Ganster and M. Steiner, On some questions about *b-open*Set 2000 Math Subject Classiification-Primary , 54A10

[4]. D. Andrijevic, Some properties of the topology of **α**-sets, Mat. Vesnik 36 (1984), 1-10.

[5]. D. Andrijevic, *Semi-preopen sets* , *Mat. Vesnik 38 (1986), 24,32*

[6].GANSTER,M.*Some Remarks on Strongly Compact Spaces*,Bull.Malaysian Math.Soc.2(10),1987,67-81.

[7].NOIRI,T.*Characterizations Of ExtremallyDisconectedSpaces,*Indian J.pureapple. Math, 19(4),1988,325-329.

[8].ABD-EL-MONSEF,M.E.*SomeGeneralizedforms of Compactness*, International *Mathmatical forum*,vol.7,2012 ,no.56,2767-27.