مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

حلول تامة جديدة لمعادلة Fitzhug–Nagumo المعممة باستخدام طريقة موازنة التجانس

الدكتور رامز كروم*
الدكتور سامي انجرو**

(تاريخ الإيداع 13 / 5 / 2015. قُبِل للنشر في 20 / 7 /2015)

□ ملخّص □

نقوم في هذا العمل بإيجاد حلول تامة ذات موجة جوالة (Traveling wave solutions)، لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة الكيفية باستخدام طريقة تعويض موازنة التجانس مع معادلة ريكاتي التفاضلية العادية ذات الأمثال الثابتة. وتبين النتائج التي حصلنا عليها أنه كلما تغير الحل الخاص لمعادلة ريكاتي نحصل على حل جديد للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، كما يتبين أن هذه الطريقة بسيطة وفعالة لهذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، ويمكن أن تطبق على معادلات تفاضلية جزئية غير خطية أخرى وبخاصة التي تأتي من علوم الهندسة والفيزياء الرياضية ومجالات علمية تطبيقية أخرى.

الكلمات المفتاحية: معادلة Fitzhugh–Nagumo – الحل التام – معادلة ريكاتي – الحل ذو الموجة الجوالة – طريقة موازنة التجانس – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
** مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

New Exact Solutions for Generalized Fitzhug-Nagumo Equation by Homogeneous balance Method

Dr. Ramez Karoum *
Dr. Sami Injrou **

(Received 13 / 5 / 2015. Accepted 20 / 7 /2015)

☐ ABSTRACT ☐

In this work, we have found exact traveling wave solutions for generalized Fitzhug-Nagumo equation with arbitrary constant coefficients, by using the homogeneous balance method, The obtained results shows that these solutions changes with the specials solution of Ricati ODE with arbitrary constant coefficients , and shows that this method is simple, direct and very efficient for solving this kind of nonlinear PDEs, It can be applied to nonlinear PDEs which frequently arise in engineering sciences, mathematical physics and other scientific real-time applications fields.

Keywords: Fitzhug-Nagumo equation - exact solution - Ricati ODE- traveling wave solution - the homogeneous balance method - nonlinear partial differential equations.

* **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
** **Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم جيداً أن عملية البحث عن حلول تامة جديدة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، التي تصف الكثير من الظواهر الطبيعية غير الخطية في مختلف مجالات العلوم التطبيقية كالفيزياء والكيمياء وعلوم الهندسة وعلم الأحياء مهمة للغاية، إذ يلعب إيجاد هذه الحلول دوراً كبيراً في الدراسة الرياضية لهذه المسائل مما يعطي وصفاً واضحاً لما يحدث في هذه المسائل، الأمر الذي دفع الرياضيين إلى ابتكار طرق جديدة تعطي حلول تامة جديدة لهذه المسائل، فظهر العديد من الطرائق التي تعنى بإيجاد حلول تامة لهذه المعادلات التفاضلية، كطريقة دالة جاكوبي الناقصية في [1]، وطريقة التكامل الأول التي تعتمد على الجبر التبادلي في [2 ، 3]، و في عام 2006 ظهرت طريقة الدالة الأسية على يد كل من He و Wu في [4]، وطريقة منشور G'/G في [5]، وبعض الطرائق التي تعتمد على موازنة التجانس كطريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية [6].

سنقوم في هذا البحث باستخدام طريقة موازنة التجانس مع معادلة ريكاتي التفاضلية العادية ذات الأمثال الثابتة الكيفية لإيجاد حلول تامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الشكل:

$$u_t + \alpha u_x - \beta u_{xx} + \gamma u(1-u)(\rho - u) = 0 \qquad (1)$$

علماً أن $0 \le \rho \le 1$، و $u(x,t)$ دالة مجهولة تمثل الجهد الكهربائي عبر غشاء الخلية، وأن α و β و γ ثوابت، حيث أنه إذا كانت $\beta = \gamma = 1$، فإننا نحصل على معادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة مع حد التشتت الخطي، والتي درست سابقاً من قبل Karroum و Injrou مستخدمين طريقة التكامل الأول في [7] وطريقة الدالة الأسية في [8]، وطريقة تعويض معادلة برنولي التفاضلية العادية في [9]، حيث قدما حلولاً ذات موجة جوالة لها، وإذا كان $\beta = \gamma = 1$ و $\alpha = 0$، فإننا أمام معادلة Fitzhugh–Nagumo التقليدية التي درست من قبل الكثيرين أمثال Kawahara و Tanaka في [10]، و Nucci و Clacson في [11] و Huayin و Yucui في [12] ومؤخراً Ouhadan و El-Kinani في [13]، حيث استخدما طريقة موازنة التجانس. سنعتمد في إيجاد حلول خاصة لمعادلة ريكاتي التفاضلية العادية على طريقة موازنة التجانس للحصول على حلول خاصة مختلفة الأمر الذي سيعطينا حلول مختلفة للمعادلة (1).

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي حلولاً تامة ذات موجة جوالة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة الكيفية والتي تعتبر في غاية الأهمية للباحثين في المجالات العلمية التطبيقية (الفيزياء– الكيمياء– علم الأحياء....)، ويهدف هذا البحث إلى حل هذه المعادلة باستخدام طريقة موازنة التجانس لإيجاد حلول تامة ذات موجة جوالة (traveling wave solutions) مختلفة.

طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

النتائج والمناقشة:

سنعرض طريقة موازنة التجانس مع معادلة ريكاتي التفاضلية العادية:

طريقة موازنة التجانس:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية، بمتحولين مستقلين فقط x و t، الآتية:

$$P\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \ldots\right)=0 \qquad (2)$$

حيث أن $u(x,t)$ الدالة المجهولة و P كثيرة حدود تابعة لـ $u(x,t)$ ومشتقاتها الجزئية.

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نستخدم متحول الموجة الجوالة (Travelling wave transformation) الآتي:

$$u(x,t)=u(\xi) \ ; \ \ \xi=kx+wt \qquad (3)$$

حيث أن k و w ثابتان يعينان لاحقاً، وبالتالي تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية (2) إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية للمجهول $u(\xi)$:

$$Q\left(u, u', u'', u''', \ldots\right)=0 \qquad (4)$$

حيث Q كثيرة حدود تابعة لـ $u(\xi)$ ومشتقاتها.

الخطوة الثانية: نفرض أن حل المعادلة (4) يكتب بالشكل الآتي:

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m} a_i \Psi^i(\xi) \qquad (5)$$

حيث أن a_i، من أجل $i=0,1,\ldots,m$، مع $a_m \neq 0$، ثوابت تعين لاحقاً، وأن $\Psi=\Psi(\xi)$ حل لمعادلة ريكاتي الآتية:

$$\Psi'=a\Psi^2+b\Psi+c \qquad (6)$$

علماً أن a و b و c ثوابت.

الخطوة الثالثة: يحسب العدد الصحيح الموجب m، بإجراء موازنة التجانس بين المشتق ذو المرتبة الأعلى مع الحد غير الخطي في المعادلة (4) حيث تعرف درجة $u(\xi)$، $\deg(u(\xi))=m$، ومنه وبشكل مماثل نجد:

$$\deg\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right)=m+p \quad , \quad \deg\left(u^p\left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^j\right)=mp+j(m+r)$$

الخطوة الرابعة: نعوض العلاقة (6) في العلاقة (5) مع مراعاة المعادلة (7) وأن:

$$\Psi''=2a\Psi\Psi'+b\Psi' \qquad (7)$$

ثم نطابق أمثال قوى $\Psi^i(\xi)$ بالصفر، لنحصل على جملة جبرية غير خطية، نحلها باستخدام برامج الحسابات الصيغية الرياضية مثل Maple أو Mathematica، لنحصل بذلك على قيم الثوابت a_i، من أجل $i=0,1,\ldots,m$، و k و w، ثم نعوضها في حل معادلة ريكاتي (6) الذي نحصل عليه بإجراء موازنة التجانس بين الحد Ψ' والحد Ψ^2، وبحيث نعطي صيغة للحل تحدد فيها أمثاله كما سنرى لاحقاً ومن ثم نعوض في (5)، فنحصل على حلول تامة، للمعادلة التفاضلية الجزئية (1).

حلول تامة لمعادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة:

باستخدام التحويل الموجي (3) وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية (1)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=w\,u'(\xi)\ \ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=k\,u'(\xi)\ \ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^2u''(\xi)$$

نحصل على المعادلة التفاضلية العادية للمجهول $u(\xi)$ التالية:

$$(w+\alpha k)u'-\beta k^2u''+\gamma u^3-\gamma(1+\rho)u^2+\gamma\rho u=0 \tag{8}$$

بفرض أنه يمكن كتابة حل المعادلة (8) بالشكل (5)، ولدينا:

$$\deg\left(u(\xi)^3\right)=3m\quad ,\quad \deg\left(\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)\right)=m+2$$

عندئذ بموازنة تجانس u^3 مع u''، نجد أن $3m=m+2$، ومنه $m=1$، وبالتعويض في (5)، نحصل على:

$$u(\xi)=a_1\Psi(\xi)+a_0\ \ ,\ \ a_1\neq 0 \tag{9}$$

حيث a_0 و a_1 ثابتان، يطلب تحديدهما.

نعوض العلاقة (9) في المعادلة (8)، مع مراعاة العلاقتين (6) و(7)، فنحصل على:

$$C_0+C_1\Psi(\xi)+C_2\Psi^2(\xi)+C_3\Psi^3(\xi)=0 \tag{10}$$

حيث:

$$C_0=a_1wc+a_1\alpha kc-\beta k^2a_1bc+\gamma a_0\rho-\gamma a_1^2-\gamma a_0^2\rho+\gamma a_0^3$$
$$C_1=a_1wb+a_1\alpha kb-\beta k^2a_1b^2-2\beta k^2a_1ac-2\gamma a_0a_1+3\gamma a_0^2a_1-2\gamma a_0a_1\rho+\gamma a_1\rho$$
$$C_2=a_1wa+a_1\alpha ka-3\beta k^2a_1ba+3\gamma a_0a_1^2-\gamma a_1^2-\gamma a_1^2\rho$$
$$C_3=-2\beta k^2a_1a^2+\gamma a_1^3$$

بجعل:

$$C_0=0\ ,\ C_1=0\ ,\ C_2=0\ ,\ C_3=0 \tag{11}$$

نحصل على الجملة الجبرية غير الخطية ذات المجاهيل a_0 و a_1 و k و w، وبحل هذه الجملة باستخدام برنامج Maple، نحصل على الحلول الآتية:

$$k=\frac{-\gamma}{\sqrt{2\beta\gamma\left(b^2-4ac\right)}}\ \ ,\ w=\frac{1}{2}\,\frac{\mp\dfrac{2\alpha\gamma b}{\sqrt{2\beta\gamma\left(b^2-4ac\right)}}+\mu\left(\pm\gamma\mp 2\gamma\rho\right)-2\gamma\rho+\gamma}{b}$$

$$a_1=\frac{-\left(a\left(2ac+\mu\left(\mp 4ac\rho\pm 2ac\pm b^2\rho\mp\frac{1}{2}b^2\right)-4ac\rho+b^2\rho+b^2\right)\right)}{b\left(-b^2+4ac\right)\left(\mp\frac{3}{2}\mu-1-\rho\right)}\ ,\ a_0=\mp\frac{1}{2}\mu$$

$$k=\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta\gamma\left(b^2-4ac\right)}}\ \ ,\ w=\frac{1}{2}\,\frac{\pm\dfrac{2\alpha\gamma b}{\sqrt{2\beta\gamma\left(b^2-4ac\right)}}+\mu\left(\pm\gamma\mp 2\gamma\rho\right)-2\gamma\rho+\gamma}{b}$$

$$a_1=\frac{-\left(a\left(2ac+\mu\left(\mp 4ac\rho\pm 2ac\pm b^2\rho\mp\frac{1}{2}b^2\right)-4ac\rho+b^2\rho+b^2\right)\right)}{b\left(-b^2+4ac\right)\left(\mp\frac{3}{2}\mu-1-\rho\right)}\ ,\ a_0=\mp\frac{1}{2}\mu$$

علماً أن:

$$\mu = \frac{-b^2 + 4ac + \sqrt{b^4 - 4b^2ac}}{-b^2 + 4ac}$$

بقي علينا الآن إيجاد حل خاص لمعادلة ريكاتي التفاضلية العادية (6)، سنستخدم طريقة موازنة التجانس بين Ψ' والحد Ψ^2، ونميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: نفرض أن الحل الخاص لمعادلة ريكاتي يأخذ الشكل الآتي:

$$\Psi(\xi) = \sum_{i=0}^{n} b_i \tanh^i \xi \qquad (12)$$

وبموازنة التجانس بين Ψ' والحد Ψ^2، نجد أن $n = 1$، أي أن:

$$\Psi(\xi) = b_0 + b_1 \tanh \xi \qquad (13)$$

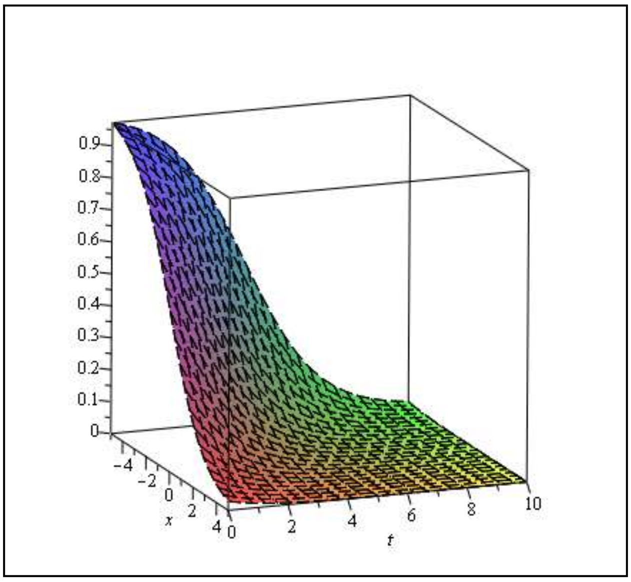
وبالتعويض في المعادلة (6)، نحصل على حل خاص لمعادلة ريكاتي:

$$\Psi(\xi) = \frac{-b}{2a} + \frac{-1}{a}\tanh \xi \;\;;\;\; b^2 - 4ac = 4 \qquad (14)$$

بالتعويض في (9) مع الأخذ بعين الاعتبار a_0 و a_1 و k و w التي حصلنا عليها سابقاً، نحصل على حل موجة جوالة متجعدة (Kink wave solution) للمعادلة (1)، من الشكل:

$$u(x,t) = a_0 - a_1\left(\frac{b}{2a} + \frac{1}{a}\tanh(kx + wt)\right) \qquad (15)$$

سنرسم هذا الحل مع $a = 1, c = 1, b = 2\sqrt{2}, \rho = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$



وبشكل مشابه إذا كان لمعادلة ريكاتي حلاً خاصاً من الشكل:

$$\Psi(\xi) = \sum_{i=0}^{n} b_i \coth^i \xi \qquad (16)$$

فنحصل على حل موجة جوالة للمعادلة (1) من الشكل:

$$u(x,t) = a_0 - a_1\left(\frac{b}{2a} + \frac{1}{a}\coth(kx + wt)\right) \qquad (17)$$

الحالة الثانية: سنفرض الآن أن الحل الخاص لمعادلة ريكاتي من الشكل:

$$\Psi(\xi)=q_0+\sum_{i=1}^{n}\left(q_i f^{\,i}(\xi)-d_i f^{\,i-1}(\xi)g(\xi)\right) \tag{18}$$

علماً أن الدالتين $f(\xi)$ و $g(\xi)$ معطيتان، كما في [15]، بالعلاقة الآتية:

$$f(\xi)=\frac{1}{\cosh\xi+r}\quad,\quad g(\xi)=\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+r}$$

وتحققان:

$$f'(\xi)=-f(\xi)g(\xi)\quad,\quad g'(\xi)=1-g^2(\xi)-rf(\xi)\quad,\quad g^2(\xi)=1-2rf(\xi)+(r^2-1)f^2(\xi)$$

وبموازنة التجانس بين الحدين Ψ' و Ψ^2، نجد أن:

$$\Psi(\xi)=q_0+q_1 f(\xi)+d_1 g(\xi)$$

وحسب المقالة [15]، لدينا:

$$\Psi(\xi)=\frac{-b}{2a}-\frac{1}{2a}\,\frac{\sinh\xi\pm\sqrt{r^2-1}}{\cosh\xi+r} \tag{19}$$

وبالتالي يكون حل المعادلة (1) هو:

$$u(x,t)=a_0-\left(\frac{a_1 b}{2a}+\frac{a_1}{2a}\,\frac{\sinh(kx+wt)\pm\sqrt{r^2-1}}{\cosh(kx+wt)+r}\right) \tag{20}$$

الحالة الثالثة: سنفرض الآن أن حل معادلة ريكاتي من الشكل:

$$\Psi(\xi)=e^{p_1\xi}\eta(z)+p_4(\xi) \tag{21}$$

حيث أن $z=e^{p_2\xi+p_3}$ و p_1 و p_2 و p_3 ثوابت، وكذلك حسب[15]، نجد عندما $c=\dfrac{-p_1^2+b^2}{4a}$:

$$\Psi(\xi)=\frac{-p_1 e^{p_1\xi}}{a\left(e^{p_1\xi}+p_3\right)}+\frac{p_1-b}{2a} \tag{22}$$

فإذا كان $p_3=1$، نحصل على:

$$\Psi(\xi)=\frac{-p_1}{2a}\tanh\left(\frac{1}{2}p_1\xi\right)-\frac{b}{2a} \tag{23}$$

ومنه يكون حل المعادلة (1):

$$u(x,t)=a_0-\frac{a_1 b}{2a}-\frac{a_1 p_1}{2a}\tanh\left(\frac{1}{2}p_1(kx+wt)\right) \tag{24}$$

وإذا كان $p_3=-1$، نحصل على:

$$\Psi(\xi)=\frac{-p_1}{2a}\coth\left(\frac{1}{2}p_1\xi\right)-\frac{b}{2a} \tag{25}$$

ومنه يكون حل المعادلة (1):

$$u(x,t)=a_0-\frac{a_1 b}{2a}-\frac{a_1 p_1}{2a}\coth\left(\frac{1}{2}p_1(kx+wt)\right) \tag{26}$$

نلاحظ أن (15) و (17) حالة خاصة من (24) و (26)، على الترتيب عندما $p_1 = 2$. في النهاية تجدر الإشارة إلى أنه عندما $\beta = \gamma = 1$ فإننا نكون أمام معادلة Fitzhugh–Nagumo المعممة ذات الأمثال الثابتة مع حد التشتت الخطي المعطاة في المقالة [9] ، ونكون بذلك قد حصلنا على حلول جديدة ذات موجة جوالة متجعدة، وكذلك في حال كان $k = \beta = \gamma = 1$ و $\alpha = 0$ و $w = -\lambda$، فإننا نحصل على حلول مشابهة للحلول الموجودة في المقالة [13] وحلول أخرى جديدة لنفس المعادلة والتي هي معادلة Fitzhugh–Nagumo التقليدية.

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد استخدمنا في هذا البحث طريقة موازنة التجانس مع معادلة ريكاتي التفاضلية العادية ذات الأمثال الثابتة الكيفية، حيث طبقنا موازنة التجانس على المعادلة التفاضلية الخطية المعطاة (1) ومن ثم طبقناها على معادلة ريكاتي لإيجاد حلول خاصة مختلفة الذي انعكس على طبيعة حلول المعادلة (1) مثل حل ذو موجة متعرجة (Kink wave solution)، كما وجدنا أن طريقة موازنة التجانس باستخدام معادلة ريكاتي تعطي حلول ذات نوع tahn و coth للموجة الجوالة وهي ذاتها التي تعطيها طريقة الظل القطعي الزائدي كما في [15] والتي يمكن اعتبارها حالة خاصة من الطريقة التي استخدمناها وذلك في حال كانت $b = 0$, $a = -\ell$, $c = \ell$. يتبين أن هذه الطريقة فعالة ويمكن من خلالها الحصول على مجموعة كبيرة من الحلول التامة لمختلف معادلات التطور التفاضلية الجزئية غير الخطية في الفيزياء الرياضية.

المراجع:

[1] FU, Z., LIU, S., LIU, S. AND ZHAO, Q. *New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations*, Phys. Lett. A 290, 72-76, 2001.

[2] Z.S. FENG, *On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation*, Phys. Lett. A 293 (2002) 57–66.

[3] Z.S. FENG, X.H. WANG, *The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg-de Vries equation*, Phys. Lett. A 308 (2003) 173–178.

[4] HE, J.H., WU, X.H. *Exp-function method for nonlinear wave equations*, Chaos Solitons Frac. 30, 700-708, 2006.

[5] WANG, M., LI, X. AND ZHANG, J. *The G ′/G-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics*, Phys. Lett. A 372, 417-423,2008.

[6] Bin Zheng, *New exact traveling wave solutions for fitzhugh-nagumo equation*, 2012 International Conference on Image, Vision and Computing (ICIVC 2012), doi: 10.7763/IPCSIT.2012.V50.40.

[7] R. KARROUM, S. INJROU, *finding exact solutions to generalized Fitzhug-Nagumo equation with constant coefficients*, Arabic journal of Tishreen University, 2014.

[8] S. INJROU, R. KARROUM, *Exact solitary wave solutions to generalized fitzhug-nagumo equation with constant coefficients by using exp-function method*, Arabic, journal of Tishreen University, 2014.

[9] S. INJROU, R. KARROUM, *Explicit Exact Traveling Wave Solutions for Generalized Fitzhug-Nagumo Equation with Constant Coefficients by Bernoulli sub-ODE Method*, Arabic, journal of Tishreen University, 2015.

[10] T. KAWAHARA, M. TANAKA, *Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation*, Phys. Lett. 97A (1983) 311–314.

[11] M.C. NUCCI, P.A. CLARKSON, *The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions: an example of the Fitzhugh–Nagumo equation*, Phys. Lett. A 164 (1992) 49–56.

[12] H. LI, Y. GUO, *New exact solutions to the Fitzhugh–Nagumo equation*, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 524–528.

[13] A. Ouhadan, E. H. El Kinani, *Fitzhugh-Nagumo Equation and Homogeneous Balancing Riccati Method*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, no. 109, 5417 – 5425, 2013.

[14] X.Q. Zhao, D.B. Tang, *A new note on a homogeneous balance method*, Phys. Lett. A 297 (2002) 59–67.

[15] C.L. Bai, H. Zhuo, *Generalized extended tanh-function method and its application*, Chaos Soliton & Fractals 27 (2006) 1026–1035.