مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

العلاقة بين النواة الدرجية ووضعية الممرات الدرجية الثلاث في المركبة المحدودة للمتممة

الدكتور عدنان ظريف*
الدكتور رامي شاهين*
نجود حسن**

(تاريخ الإيداع 6 / 4 / 2015. قُبِل للنشر في 13 / 7 /2015)

□ ملخّص □

تهتم نظرية المجموعات النجمية بتعيين نواة المجموعة النجمية وأيضاً رؤية النقاط والمناطق لبعضها البعض، ففي حالة الرؤية الدرجية برهن الباحث راجيف موتواني أن نقاط المناطق المفصولة عن بعضها بالأغوار لا ترى بعضها بعضاً، وبعد ذلك تمكنت الباحثة مارلين برين من إيجاد طريقة لتعيين نواة المضلع المتعامد النجمي درجياً عندما يكون المضلع المتعامد بسيط الترابط.

في هذا البحث سوف نعمم الطريقة السابقة عندما يكون المضلع المتعامد المغلق ثنائي الترابط،وجبهة المركبة المحدودة للمتممة اجتماعاً لثلاث ممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين، وسنثبت أن النواة تتألف من مركبة واحدة فقط.

الكلمات المفتاحية: المضلعات المتعامدة، المجموعات النجمية ضمن ممرات درجية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.
**طالبة دراسات عليا(دكتوراه) – قسم الرياضيات– كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (4) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (4) 2015

The relation between the staircase kernel and the position of the three staircase paths of the bounded component for the complement

Dr. Adnan Zarif *
Dr. Ramee Shaheen*
Njod Hassan**

(Received 6 / 4 / 2015. Accepted 13 / 7 /2015)

☐ ABSTRACT ☐

One of the most important subjects that the starshaped sets theory concerned withis specifying the kernel of the starshaped set and vision the points and regions for each other. So in staircase visibilitytheresearcher Rajeev Motwani proved that the points of separating regions with dents cannot see each other. After that Breen could find a way for specifying the kernel of starshaped orthogonal polygon when this orthogonal polygon is simply connected.

In this paper we will generalize the previous way when the closed orthogonal polygon is secondly connected and the bounded component for the complement is union of three staircase paths, every path consists of more than two edges. We will prove that the kernel is only one component.

Key words: orthogonal polygons, starshaped sets via staircase paths.

*Associate Professor, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen University. Lattakia, Syria.
**Postgraduate Student, Department of Math, Faculty of Science, Tishreen University. Lattakia, Syria.

مقدمة:

منذ ظهور نظرية المجموعات النجمية إلى النور اهتم الباحثون بدراسة مسائل كثيرة منها: مسألة إيجاد معايير نجمية مجموعة ما كأن ندرس نقاط جبهة المجموعة أو بعض نقاط الجبهة أو غير ذلك، وكذلك مسألة تغطية المجموعة النجمية أو تغطية المجموعات غير النجمية بمجموعات نجمية، وأيضاً مسألة تجزئة المجموعة غير النجمية إلى أقل عدد ممكن من المجموعات النجمية، ومسألة تعيين نواة المجموعة النجمية ودراسة خواص النواة.

أحد أهم المعايير التي بحثت في النواة هي النظرية المشهورة لـ تورانزوس [1] عام1967، وذلك في حالة الرؤية العادية، وفي عام 1992 أثبتت الباحثة مارلين برين [2] صحة نظرية مرادفة لهذه النظرية باستخدام مفهوم الرؤية الدرجية عندما تكون المجموعة S مضلعاً متعامداً بسيط الترابط، أما في عام 1990 فقد برهن الباحث راجيف موتواني [3] أن نقاط المناطق المفصولة عن بعضها بالأغوار لا ترى بعضها بعضاً، حيث أثبت صحة النظرية الآتية (إذا كانت $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداًبسيط الترابط وكانت $x, y \in S$ نقطتين كيفيتين، عندئذٍ x لا ترى y إذا وفقط إذا وجد غور D في S بحيث تنتمي x إلى إحدى المنطقتين $B_r(D)$, $B_l(D)$المفصولتين بهذا الغور وتنتمي y إلى الثانية)، وفي عام 1992 تمكنت الباحثة برين [2] من وضع طريقة لإيجاد نواة المضلع المتعامد بسيط الترابط و النجمي درجياً. ولكن عندما يكون المضلع المتعامد ثنائي الترابط فإن الطريقة السابقة غير كافية، وكذلك توجد عدة حالات ولكل حالة طريقة عامة خاصة بهذه الحالة، وفي بحثنا هذا سوف نناقش الحالة التي تكون فيها جبهة المركبة المحدودة لمتممة المضلع المتعامد المغلق النجمي المدروس اجتماعاً لثلاث ممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين.

وهكذا كانت الرؤية الدرجية موضع اهتمام الكثير من الباحثين علماً أن مفهوم الرؤية الخطية قدّم العديد من النتائج القيمة في التحدب [4]، وكذلك تمت الاستفادة من نتائج في التحدب في الحصول على نتائج في النجمية.

أهمية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية البحث من كونه يقدم إضافات جديدة في نظرية المجموعات النجمية في حالات متقدمة منها بالاستفادة من مفهوم الرؤية الدرجية، أما الهدف من البحث فهو تعيين عدد مركبات نواة المضلع المتعامد المغلق ثنائي الترابط والنجمي درجياً، وتعيين أماكن وجود هذه المركبات في عدة حالات، علماً أن جبهة المركبة المحدودة للمتممة عبارة عن اجتماعثلاثة ممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين.

طرائق البحث ومواده:

نعتمد في بحثنا على مفاهيم وأفكار نظرية المجموعات النجمية وعلى الأبحاث العلمية المتقدمة والحديثة في مجالي التحدب و النجمية و نستخدم المفاهيم الأساسية في التبولوجيا.

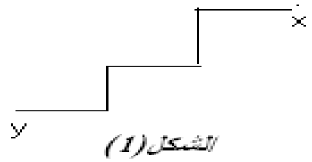
تعاريف:

تعريف المضلع المتعامد (orthogonal polygon): [5]، [6]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية، تدعى S مضلعاً متعامداً إذا كانت اجتماعاً مترابطاً لعدد منته من المضلعات المحدبة و التي أضلاعها توازي المحاور الإحداثية.

تعريف الممر الدرجي (staircase path): [5]،[6]

ليكن λ ممراً مضلعياً بسيطاً في R^2 أضلاعه $[v_{i-1}, v_i]; i = 1,2, \dots, n$ توازي المحاور الإحداثية، يدعى الممر λ ممراً درجياً إذا لم يكن لأي اثنين من أضلاعهاتجاهين متعاكسين.



الشكل(1)

وهكذا يكون اتجاه الممر الموضح في الشكل(1) من x إلى y هو الغرب والجنوب (أي غرب، جنوب، غرب، جنوب، غرب) ولا يمكن أن يحوي أي ضلع أفقية باتجاه الشرق ولا ضلع عمودية باتجاه الشمال.

ويدعى الممر الدرجي λ ممراً درجياً أعظمياًفي S إذا لم يكن $\lambda \cup [x, y]$ ممراً درجياً في S حيث أن $[x, y] \subseteq S$.

تعريف الممر من x إلى y (x−y path): [6]، [7]

يدعى الممر λ ممراً من x إلى y في S إذا كان λ محتوى في S ويحوي النقطتين الطرفيتين x و y.

تعريف الرؤية الدرجية (staircase visibility): [6]، [7]،[8]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة كيفية ولتكن $x, y \in S$ ، يقال إن x ترى y درجياً (أو y مرئية درجياً من x) في S إذا وجد ممر درجي في S يحوي كلتي النقطتين x و y.

تعريف المجموعة النجمية درجيا (orthogonally starshaped set): [5]،[9]

تدعى المجموعة S نجمية درجياً (نجمية متعامدة) إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل p في S بحيث أن p ترى كل نقطة في S ضمن ممرات درجية في S.

تعريف النواة الدرجية (staircase kernel): [2] [6]، [10]

تدعى مجموعة جميع النقاط p التي تكون من أجلها المجموعة S نجمية درجياً بالنواة الدرجية للمجموعة S ويرمز لها $Ker\ S$.

تعريف المجموعة المحدبة درجيا (staircase convex set): [5]

تدعى المجموعة S محدبة درجيا (أو محدبة متعامدة) إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ فإن x ترى y ضمن ممرات درجية في S.

تعريف المجموعة المحدبة أفقياً (horizontally convex set): [2]

تدعى المجموعة S محدبة أفقياً إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ والقطعة المستقيمة $[x, y]$ أفقية فإن $[x, y] \subseteq S$.

تعريف المجموعة المحدبة عمودياً (vertically convex set): [2]

تدعى المجموعة S محدبة عمودياً إذا كان من أجل كل نقطتين $x, y \in S$ والقطعة المستقيمة $[x, y]$ عمودية فإن $[x, y] \subseteq S$.

تعريف نقطة التحدب الموضعي (point of local convexity of S):[11],[12][4] ,[8]

لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة غير خالية ولتكن $x \in S$ نقطة كيفية. يقال إن x نقطة تحدب موضعي للمجموعة S إذا وفقط إذا وجدت مجاورة $N \subseteq R^2$ للنقطة x بحيث تكون المجموعة $N \cap S$ مجموعة محدبة.

تعريف الغور (dent of S):[2]

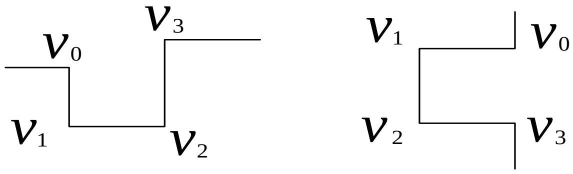
ليكن S مضلعاً متعامداً جبهته خط مغلق بسيط تدعى الضلع $[v_1 , v_2]$ غوراً في S إذا وفقط إذا لم يكن S محدباً موضعياً عند كل من النقطتين v_1 ,v_2.

يوجد نوعان للأغوار لها أربعة اتجاهات:

أفقية (أغوار شمالية وأغوار جنوبية) وعمودية (أغوار شرقية وأغوار غربية).

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً شمالياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 فوق المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$ حيث أن الذروة v_0 تسبق v_1 و الذروة v_3 تلي v_2، (الشكل (2)).

يدعى الغور الأفقي $[v_1 , v_2]$ غوراً جنوبياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 تحت المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$ حيث أن الذروةv_0 تسبق v_1 و الذروة v_3 تلي v_2.



غور شمالي   غور شرقي

الشكل (2)

يدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً شرقياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يمين المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$، الشكل(2)، ويدعى الغور العمودي $[v_1 , v_2]$ غوراً غربياً إذا وفقط إذا كانت كلتا النقطتين v_0, v_3 يسار المستقيم الحامل للضلع $[v_1 , v_2]$حيث أن الذروة v_0 تسبق v_1 والذروةv_3 تلي v_2.

تعاريف:[3]

ليكن D غوراً في S ولتكن $\overline{D}$القطعة المستقيمة التي تحوي D ومحتواة في S وطولها أعظم ما يمكن في Sعندئذٍ تتألف $\overline{D} \setminus D$من قطعتين مستقيمتين D_{r} إلى يمينD و D_{l} إلى يسار D

ليكن $D = N$ غور شمالي في S ولتكن $\grave{S} = S \setminus \overline{D}$ عندئذٍ:

–نرمز لمجموعة جميع المركبات المترابطة للمجموعة $\grave{S}$ والتي تقابل$\overline{D}$ إلى شمالهابالرمز $B(D)$ وهي تقسم إلى قسمين: المناطقالتي تقابل القطعة المستقيمة D_{r} ونرمز لها $B_r(D)$ والمناطق التي تقابل القطعة المستقيمة D_{l} ونرمز لها$B_l(D)$.

–مجموعة جميع المركبات المترابطة للمجموعة $\grave{S}$ والتي تقابل$\overline{D}$ إلى جنوبه مع $\overline{D}$ نرمز لها $A(D)$

– إن المجموعات $A(D)$ و $S \setminus B_r(D)$ و $S \setminus B_l(D)$ مجموعات مترابطة جزئية من S.

–نسمي الغور D الغور الفاصل للنقطتين $x, y \in S$إذا تحقق$x \in B_r(D) , y \in B_l(D)$ أو بالعكس.

سوف نستخدم الرموز الآتية: $Int\ S$، $bd\ S$، $cl(S)$، $\lambda(x, y)$ للدلالة على داخلية المجموعة S، جبهة المجموعة S، لصاقة المجموعة S، الممر الدرجي λ من x إلى y على الترتيب.

نعرض فيما يلي بعض المبرهنات المستخدمة في هذا البحث:

مبرهنة(1): [2]

كل مضلع متعامد بسيط الترابط ولا يحوي أغواراً يكون محدباً متعامداً.

مبرهنة(2): [3]

كل مضلع متعامد بسيط الترابط يحوي أغواراً عمودية فقط يكون محدباً أفقيا، وكل مضلع متعامد بسيط الترابط يحوي أغواراً أفقية فقط يكون محدباً عمودياً.

مبرهنة(3):[6]

اجتماع ممرين درجيين في S لهما نفس الاتجاه ونهاية الأول هي بداية الثاني هو ممر درجي في S.

النتائج والمناقشة:

مبرهنة (1):

ليكن$S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً، ولتكن $x, y \in S$ نقطتين كيفيتين على استقامة واحدةومفصولتين بغورٍ، عندئذٍ:

1) تكون $[x, y]$ أفقية إذا وفقط إذا كان الغور الفاصل بين x و y أفقياً؛

2) تكون $[x, y]$ عمودية إذا وفقط إذا كان الغور الفاصل بين x و y عمودياً.

البرهان:

1)**لزوم الشرط** :لتكن $x, y \in S$ نقطتينعلى استقامة واحدة ولنفرض أن $[x, y]$ أفقية وبالتالي إحدى النقطتين شرق الأخرى،وبما أنهما مفصولتين بغور Dفإن $x \in B_r(D)\ , y \in B_l(D)$أو بالعكس،وبما أن إحدى النقطتين شرق الأخرىفإن إحدى المنطقتين $B_r(D)\ , B_l(D)$ شرق الأخرى والغور الفاصل هو غور أفقي.

كفاية الشرط: لتكن $x, y \in S$ نقطتين على استقامة واحدة ومفصولتين بغور أفقي (جنوبي مثلاً وليكن s) وهذا يعني أن إحدى النقطتين ولتكن $x \in B_r(s)$ والأخرى$y \in B_l(s)$ وهكذا تكون x في الشمال الشرقي من y أو في الجنوب الشرقي من y أو في شرق y وبماأن النقطتين على استقامة واحدة فإن x شرق y أي أن $[x, y]$ أفقية.

2) نبرهن صحتها بأسلوب مماثل.

ملاحظة:

لإيجاد نواة مضلع متعامد نجمي درجياً يلزمنا إيجاد المجموعة Tالتي تحوي مركبات النواة ويتم ذلك كما يلي:

ليكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$مضلعاً متعامداً مغلقاً ونجمي درجياً، عندئذٍ إذا حوى S أغواراً شرقية نفرض أن L_e المستقيم الحامل لضلع الغور e ذات الإحداثي x الأصغر، وأن P_e نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_e وإلى الغرب منه، وكذلك عندما يحوي S أغواراً شمالية نفرض أن L_N المستقيم الحامل لضلع الغور N ذات الإحداثي y الأصغر، وأن P_N نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_N وإلى الجنوب منه، وإذا حوىS أغواراً غربية نفرض أن L_W المستقيم الحامل لضلع الغور w ذات الإحداثي x الأكبر، وأن P_W نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_W وإلى الشرق منه، وعندما يحوي S أغواراً جنوبية نفرض أن L_S المستقيم الحامل لضلع الغور s ذات الإحداثي y الأكبر، وأن P_S نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_S وإلى الشمال منه، وعندئذٍ نحصل على المجموعةTالمعطاة بالعلاقة:

تجدر الإشارة إلى أنه في العمل [12] تم إثبات أن $ker\ S \subseteq T$وذلك بالاستفادة من العملين [2] و[3].

نتيجة(1):

إذا كان $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً ونجمياً درجياً، فإن أي مستقيم أفقي أو عمودي Lيحقق $T \cap L \neq \emptyset$، يقسم S إلى مجموعتين مترابطتينعلى الأقل وكل منها مضلع متعامد.

مبرهنة (2):

ليكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ونجمياً درجياً،عندئذٍ: توجد شرق المجموعة T أغوار شرقية فقط، وغربها أغوار غربية فقط، وشمالها أغوار شمالية فقط، وجنوبها أغوار جنوبية فقط،حيث أن المجموعة Tمعرفة وفق الصيغة:$T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$.

البرهان:

ليكن N_1 غوراً شمالياً مختلفاً عن الغور الشمالي N وبما أن N هو الغور الشمالي ذو الإحداثيالأصغر y فإن N_1شمال L_N،ونعلم أن كل نقطة في S شرق T هي جنوب L_Nوهكذا لا يمكن أن يكون N_1 شرق T.وكذلك أي غور جنوبي s_1 مختلف عن الغور sهو جنوب L_sوبما أن كل نقطة في S شرق T هي شمال L_sلايمكن أن يكون s_1شرق T، وأيضاً أي غور غربي هو غرب L_Wوبالتالي غرب L_e فلا يمكن أن يكون شرق T، وينتج مما سبق أنه توجد شرق T أغوار شرقية فقط، وبأسلوب مماثل نبرهن بقية الحالات.

نتيجة(2):

ليكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ونجمي درجياً، نواته الدرجية K، عندئذٍ: توجد شرق K أغوار شرقية فقط، وغربها توجد أغوار غربية فقط، وشمالها توجد أغوار شمالية فقط، وجنوبها توجد أغوار جنوبية فقط.

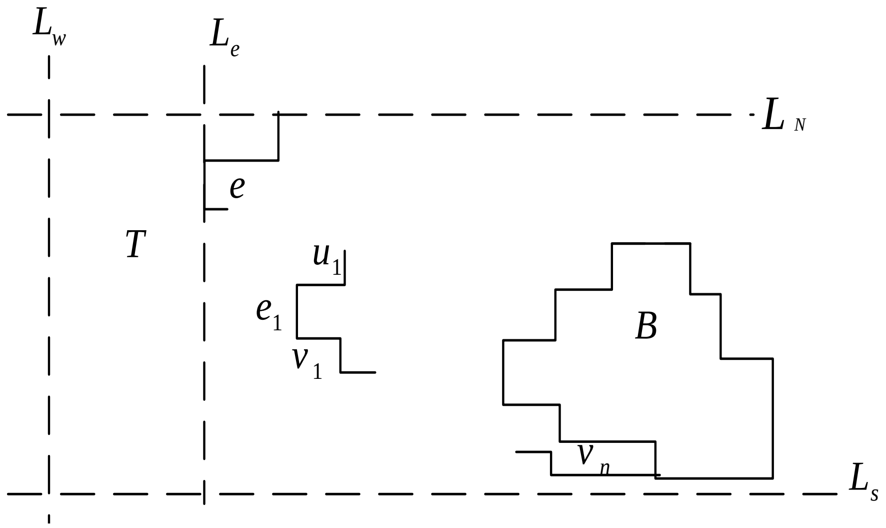
مبرهنة (3):

ليكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، بحيث أن S نجمية درجياً، ولتكن Bمركبة محدودة للمتمة $R^2 \setminus S$عندئذٍ إذا كانت المركبة Bواقعة شرق المجموعة Tفإنه لا يوجد أي غور شرقيغرب B وشرق T، حيث أن:$T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$.

البرهان:

نفرض جدلاً وجود غور شرقي e_1واقع غرب B وشرقTولنفرض أن الضلعين على جانبي الغور هما u_1 و v_1 حيث أن u_1 شمال v_1 وينتج عن ذلك أن الضلع العمودية u_2 التي تلي u_1 سوف تكون في اتجاه الشمال لأنه عندما u_2 في اتجاه الجنوب نحصل على الغور الجنوبيu_1وهذا تناقض حسب المبرهنة (2)،وكذلك كل ضلع عمودية تليu_2 سوف تكون في اتجاه الشمال، وأما الأضلاع العمودية التي تلي v_1 فإنها جميعها باتجاه الجنوب لأنه عندما v_2 تلي v_1 وفي اتجاه الشمال نحصل على الغور الشمالي v_1 وهذا تناقض، وهكذا تتالى الأضلاع بعد v_2 بين أفقية (باتجاه الشرق أو الغرب) وعمودية باتجاه الجنوب حتى نحصل على آخر ضلع v_n نفرض نهايتها yونميز هنا حالتين:

1) إما $y \in bd\ B$ وبالتالي سواء كانت v_n أفقية أو عمودية نحصل على غور شمالي (هو إما v_n أو الضلع التي تلي v_n في $bd\ B$)، (الشكل(3)).



الشكل(3)

2) أو $y \notin bd\ B$ وبالتالي $y \in bd\ S \setminus bd\ B$ ونعلم أنه $\forall x \in v_i; i = 1,2, \dots, n \Rightarrow x \in bd\ S$
لدينا Sمضلع متعامد فهو مجموعة مترابطة وبما أنه ثنائي الترابط ومغلق فهو يحوي $bd\ B$حيث أن $bd\ B \subseteq bd\ S$ولكن بقية النقاط داخل S تنتمي إلى $int\ S$ وينتج عن ذلك أن نقاط الخط المؤلف من الأضلاع $v_i; \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$تنتمي إلى $int\ S$ وبالتالي $x \in int\ S$ إذن $x \in int\ S \cap bd\ S$ ونعلم أن $int\ S \cap bd\ S =$ $\emptyset$وهذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ وهو وجود غور شرقي e_1 غرب B وشرق T، وبمناقشة مماثلة للأضلاع التي تلي u_2 نحصل على نفس النتيجة.

نشير إلى أن الباحث موتواني أثبتفي العمل [3]صحة النظرية الآتية:(إذا كان $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداًبسيط الترابط وكانت $x, y \in S$ نقطتين كيفيتين، عندئذٍ x لا ترى y إذا وفقط إذا وجد غور D في S بحيث$x \in B_r(D)\ , y \in B_l(D)$أو بالعكس) أما عندما يكون S متعدد الترابط فإننا نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة(3):

إذا كان $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداًمتعدد الترابط وكانت $x, y \in S$ نقطتين كيفيتين، عندئذٍ x لا ترىy إذا وفقط إذا تحقق على الأقل أحد الشرطين:

1)يوجد غور D في S بحيث $x \in B_r(D)\ , y \in B_l(D)$أو بالعكس؛

2) توجد مركبة محدودة Bللمتممة$R^2 \setminus S$تفصل x عن y.

البرهان: انظر[3]والمبرهنة المساعدة (1) في العمل [12].

وفي حالة خاصة عندما $x, y \in S$ وعلى استقامة واحدة نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة(4):

إذا كان $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداًمتعدد الترابط وكانت $x, y \in S$ نقطتين كيفيتينعندئذٍ $[x, y] \subseteq S$ إذا تحقق الشرطين:

1) لا يوجد غور D في S بحيث $x \in B_r(D)\,, y \in B_l(D)$ أو بالعكس؛

2) لا توجد مركبة محدودة B للمتممة $R^2 \setminus S$ تفصل x عن y

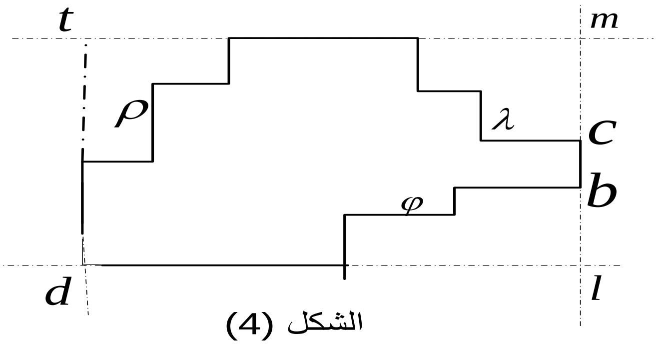
مبرهنة(5):

ليكن $S \subseteq R^2$، $S \neq \emptyset$ مضلعاً متعامداً مغلقاً ثنائي الترابط، بحيث أن S نجمية درجياً، عندئذ إذا كانت جبهة المركبة المحدودة B للمجموعة $R^2 \setminus S$ اجتماعاًلثلاثةممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين فإن نواة S تتألف من مركبة واحدة فقط.

البرهان:

لتكن $bd\ B$ مؤلفة من اجتماع الممرات الثلاث $\lambda \cup \varphi \cup \rho$ وبما أن طول الممر الدرجي أعظمي في $bd\ B$ فإن أحد الممرات الثلاثة سوف يتقاطع مع كل من الممرين الآخرين بضلع بينما يتقاطع الممرين الآخرين بنقطة، ولنفرض أن $\lambda(\mathrm{a,b}) \cap \varphi(\mathrm{c,d}) = [\mathrm{c,b}]$ و$\lambda(\mathrm{a,b}) \cap \rho(z,d) = [a,z]$ و$\varphi(c,d) \cap \rho(\mathrm{z,d}) = \{\mathrm{d}\}$ولنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن اتجاه $\lambda(\mathrm{a,b})$ هو الشرق والجنوب فيكون اتجاه كل من φ, ρ هو الجنوب والغرب، (الشكل (4)).

ليكن A أصغر مستطيل يحوي $bd\ B$ ولنفرض أن المستطيل A هو $mldt$ حيث l جنوب m ولنأخذ المستقيمات الحاملة لأضلاع A فينقسم المستوي إلى ثمانية أجزاء غير محدودة وجزء واحد محدود فقط هو A.

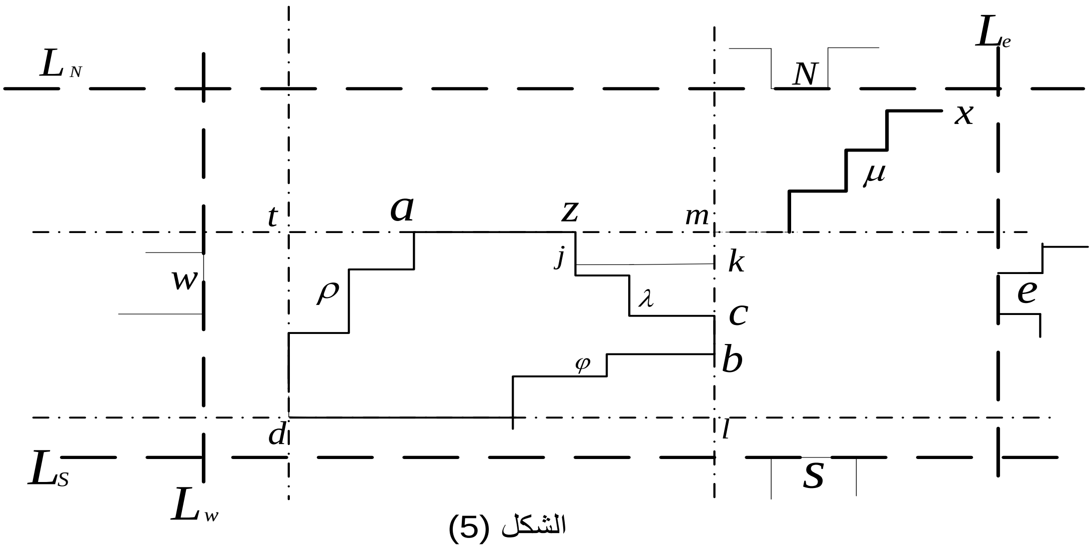


الشكل (4)

لدينا بالفرض S مجموعة نجمية بالتالي $KerS \neq \phi$، ولتعيين مركبات النواة نلاحظ أنه لا توجد أي مركبة لنواة Sشرق أو غرب أو جنوب أو شمال B وذلك حسب المبرهنة المساعدة (1) في العمل [12]، (الشكل (5))، وأيضاً لا توجد أي مركبة لنواة S في الجنوب الغربي من Bأو في الشمال الغربي من B أو الجنوب الشرقي من Bلأنها لا ترى جميع نقاط $\lambda(a,b)$ و$\varphi(\mathrm{c,d})$ و$\rho(z,d)$على الترتيب، وذلك حسب المبرهنة المساعدة (2)في العمل [12]، أما الشمال الشرقي من Bفهو يحوي نواة S ولنبرهن ذلك:

لنوجد المجموعة $T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$ كما سبق، فتكون $ker\ S \subseteq T$.

نعلم أنه يمكن أن تأخذ المركبة المحدودة B للمتممة أوضاعاً مختلفة داخل S وبما أن الدراسة متشابهة سوف ندرس الوضعين $bd\ B \subseteq T$ و $bd\ B$ شرق T، ونكتفي بتعيين النواة في بقية الحالات، انظر [11].



الشكل (5)

لتكن $bd\ B \subseteq T$ ولنبرهن على وجود مركبة لنواة S في الشمال الشرقي من B:

بما أن $ker\ S \subseteq T$ نأخذ D مجموعة نقاط T في الشمال الشرقي من B، وبما أن T لا تحوي أغواراً و $bd\ D$ هي الجزء من $bd\ T$ الموجود في الشمال الشرقي من B اجتماع القطعتين المستقيمتين المتعامدتين في m والموجودتين داخل T فإن D مجموعة مترابطة وبالتالي تكون مضلعاً متعامداً لا يحوي أغواراً، وبما أن $int\ B \cap D = \emptyset$ فإن D بسيطة الترابط، و حسب المبرهنة(1) في العمل [2] تكون D محدبة متعامدة.

لتكن $x \in D$ نقطة كيفية، ولنبرهن أن x ترى درجياً جميع نقاط S، ومن أجل ذلك نبين أولاً أن x ترى نقاط $bd\ B$ وثانياً أن x ترى بقية نقاط S.

لدينا $m \in D$ لأن $m \in T$ وموجودة في الشمال الشرقي من B، عندئذٍ x ترى m ضمن ممرات درجية في D (لأن D محدبة متعامدة) وبالتالي في S (لأن $D \subseteq S$)، وهذا يعني أنه يوجد ممر درجي في S من x إلى m ولنفرضه μ.

أولاً: إن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$ ولنثبت ذلك كما يلي:

نلاحظ أن x في الشمالي الشرقي من m أو شمال m أو شرق m لذلك يكون اتجاه μ هو الغرب والجنوب من x إلى m، ولدينا اتجاه $\rho(z,d)$ هو الغرب والجنوب من z إلى d وكذلك $[m,z] \subseteq S$ (حسب المبرهنة(4)) واتجاهها هو الغرب وينتج عن ذلك أن $\mu \cup [m,z] \cup \rho$ ممر درجي في S من x إلى d وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط هذا الممر،وبنفس الأسلوب لدينا اتجاه $\varphi(c,d)$ هو الغرب والجنوب من c إلى d وكذلك $[m,c] \subseteq S$ واتجاهها هو الجنوب وينتج عن ذلك أن $\mu \cup [m,c] \cup \varphi$ ممر درجي في S من x إلى d، وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاطه،وأما بالنسبة لرؤية نقاط الممر λ فنأخذ من أجل كل نقطة $j \in \lambda$ القطعة المستقيمة الأفقية $[j,k] \subseteq S\ ; k \in [m,c]$ (حسب المبرهنة(4)) ونحصل على الممر الدرجي $\mu \cup [m,k] \cup [k,j]$ في S من x إلى j وبالتالي x ترى درجياً j، وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط λ، (الشكل (5)).

إذن مما سبق نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$.

ثانياً: لنبرهن أن x ترى درجياً في S بقية نقاط S ومن أجل ذلك سوف نقسّم S إلى مجموعات جزئية كما يلي:

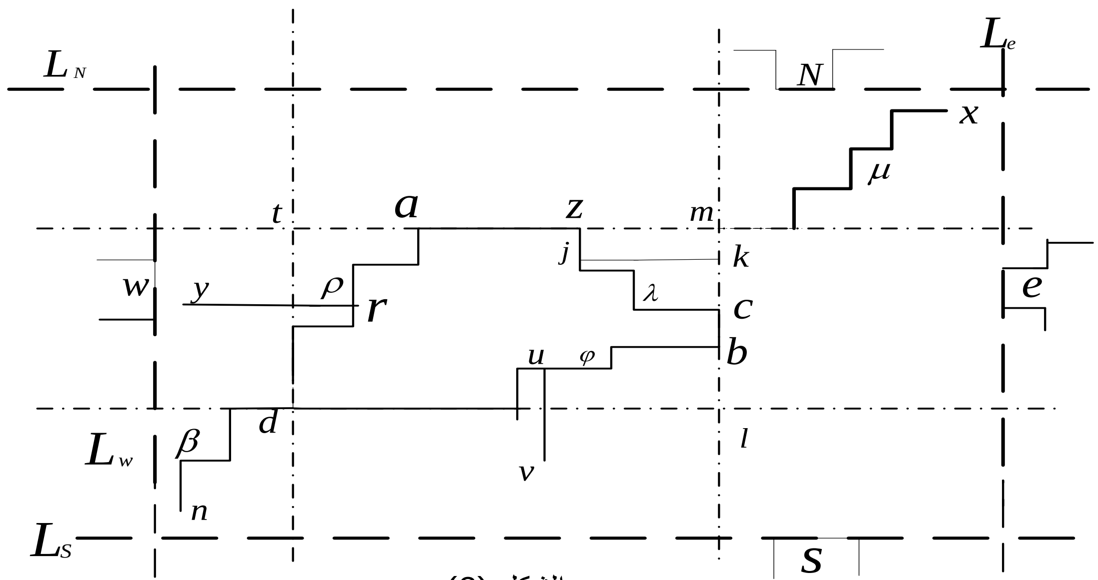
- **المجموعة E**

ليكن P_1 نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم $L(m,c)$ وإلى الشرق منه و P_2 نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم $L(a,z)$ وإلى الشمال منه ولتكن $F \subseteq S$ حيث $bd\ F = \lambda(z,c) \cup [c,m] \cup [m,z]$ ولنأخذ المجموعة $E = F \cup [(cl(P_1) \cup cl(P_2)) \cap S]$ الجزئية من S، وهذه المجموعة مضلع متعامد بسيط الترابط (حيث أن $E \cap int\ B = \emptyset$) ولنوجد نواة E، (الشكل (6)).

إن E يمكن أن تحوي أغواراً من مختلف الأنواع وفي هذه الحالة المستقيمان L_e و L_N يبقيان كما هما، وإذا كانت E تحوي الغورين الجنوبي s والغربي w السابقين فإن L_S و L_W يبقيان نفسيهما، أما إذا لم يتحقق ذلك نأخذ المستقيم L_{S1} الحامل للغور الجنوبي s_1 ذو الإحداثي y الأكبر في E ولنفرض أن P_{s1} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{S1} وإلى الشمال منه، وبنفس الأسلوب من أجل الغور الغربي w_1 نأخذ المستقيم L_{W1} ونصف المستوي المفتوح P_{W1} المحدد به وإلى الشرق منه، فنحصل على نواة المجموعة E المعطاة بالعلاقة: $\text{Ker } E = [cl(P_N) \cap cl(P_e) \cap cl(P_{s1}) \cap cl(P_{w1})] \cap E$، ولدينا $D \subseteq E$ ولنبرهن أن $D \subseteq \text{Ker } E$:

لتكن $y \in D$ نقطة كيفية، عندئذٍ إما y تقع على L_e أو غربه وبالتالي $y \in cl(P_e)$ أو y تقع على L_N أو جنوبه وبالتالي $y \in cl(P_N)$، أو y تقع على $L(a,z)$ أو شماله وبالتالي $y \in cl(P_{S1})$، أو y تقع على $L(a,c)$ أو شرقه وبالتالي $y \in cl(P_{W1})$ وهكذا ينتج لدينا: $y \epsilon [cl(P_N) \cap cl(P_e) \cap cl(P_{s1}) \cap cl(P_{w1})] \cap E$ ومنه $y \in Ker\ E$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة $y \in D$ نجد أن $D \subseteq Ker\ E$.

بما أن $x \in D$ فإن $x \epsilon ker E$ وهكذا ترى x درجياً في E (وبالتالي في S) كل نقطة من E.



الشكل (6)

في $bd\ B$ إلى y فتكون $[r,y] \subseteq S$ (لأن غرب B مجموعة محدبة أفقياً حسب المبرهنة (2) السابقة والمبرهنة (2) في العمل [3])، وهكذا نحصل على $[r,y] \cup \rho(z,r) \cup [m,z] \cup \mu$ وهو ممر درجي في S من x

إلىy،(الشكل (6))، وينتج عن ذلك أن x ترى y درجياً في S وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة y نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة غرب B.

- **جنوب المركبة المحدودةB للمجموعة $R^2\setminus S$ بما فيها نقاط S داخل المستطيل A:**

بمناقشة مماثلة نأخذ من أجل كل نقطة $v \in S$ جنوب B القطعة المستقيمة العمودية $[u,v] \subseteq S$ حيث أن $u \in bd\ B$ أقرب نقطة في $bd\ B$ إلى v، ونحصل على $\mu \cup [m,c] \cup \varphi[c,u] \cup [u,v]$ وهو ممر درجي في S من x إلىv، وينتج عن ذلك أن x ترى v درجياً في S، وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة v نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة جنوب B، (الشكل (6)).

- **المجموعة P**

وهي جزء المجموعة S في الجنوب الغربي من المركبة المحدودة B، وبنفس الأسلوب في المبرهنة (1) في العمل [12]نبرهن أن P مضلع متعامد بسيط الترابط،ولتعيين نواة Pكما في العمل [12] نحصل على صحة العلاقة $Ker\ P = [cl(P_{S2}) \cap cl(P_{W2}) \cap R^2] \cap P$حيث أن$s_2$هو الغور الجنوبي ذوالإحداثي y الأكبر في P و P_{S2} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{S2} وإلى الشمال منه، و w_2هو الغور الغربي ذو الإحداثي x الأكبر في P و P_{W2} نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم L_{W2} وإلى الشرق منه.

إن $d \in P$ وهي شمال L_{S2} أي أن $d \in cl(P_{S2})$ وأيضاً d شرق L_{W2} أي أن $d \in cl(P_{W2})$ إذن:$d \in$ $[cl(P_{S2}) \cap cl(P_{W2}) \cap R^2] \cap P$وينتج عن ذلك أن $d \in KerP$ وهذا يعني أن d ترى درجياً في Pكل نقطة من P وهكذا من أجل كل $n \in P$ يوجد ممر درجي β في P (وبالتالي في S لأن $P \subseteq S$) من d إلى n ونحصل على:$\mu \cup [m,c] \cup \varphi \cup \beta$ أو $\mu \cup [m,z] \cup \rho \cup \beta$ حيث أن كلاً منهما ممر درجي في S من x إلى n، وبمراعاة الاختيارالكيفي للنقطة $n \in P$ نجد أن النقطةx ترى درجياً في S كل نقطة من P،(الشكل (6)).

نستنتجمن المناقشة السابقة أن x ترى درجياً في S كل نقطة من S وهذا يعني أن $x \in Ker\ S$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة $x \in D$ نجد أن $D \subseteq Ker\ S$ ، وهكذا نكون قد برهنا أن Dمركبة لنواة S، وقد برهنا أن أي مركبة لنواة S يجب أن تكون في الشمال الشرقي من B ومحتواة في T وبما أن D هي جميع نقاط T الموجودة في الشمال الشرقي من B فإن $D = Ker\ S$.

ملاحظات عندما $bd\ B \subseteq T$:

1) لدينا$[a,z]$ أفقيةو$[c,b]$ عمودية وهما الضلعان المشتركتان بين الممر λ والممرين φ,ρويتقاطع المستقيمان الحاملان لهذين الضلعين في الشمال الشرقي من B حيث توجد نواة S وهكذا لإيجاد النواة نأخذ المستقيمين الحاملين للضلعين المشتركين بين λ وكل من الممرين φ,ρ فيتقاطع المستقيمان في نقطة ويقسمان المستوي إلى أربعة أرباع أحدها يحوي المركبة المحدودة B والربع المقابل له يحوي النواة (والتي هي دوماً جزء من نقاط T) فتكون النواة من جهة الممر λ.

2) بتدوير B بزوايا قائمة نحصل على مركبة واحدة لنواة S ويتغير موضع النواة بتغير مواضع الممرات الدرجية التي تشكل جبهة B وتكون النواة في الجهة المقابلة للممر λ الذي يشترك مع كل من الممرين φ,ρ بضلع.

3) عندما ينطبق $L(a,z)$ على L_Nفإن D عبارة عن قطعة مستقيمة أفقية، وكذلك عندما ينطبق $L(b,c)$ على L_e فإن D عبارة عن قطعة مستقيمة عمودية، وعندما ينطبقا معاً فإن D عبارة عن النقطة m.

مناقشة الحالات الأخرى:

وجدنا أن أي مركبة لنواة S يجب أن تكون في الشمال الشرقي منB وهي مقابل الممر الدرجي λ بمعنى أن أي مركبة لنواة Sهي مجموعة نقاط T خارج المستطيل المفتوح A ومقابل الممر الدرجي λوهكذا سوف تأخذ جبهة B في كل منطقة توجد فيها وضعية واحدة أو وضعيتين وهي أن يكون الممر الدرجي λمقابل المجموعة T (وإلا فإنS تكون غير نجمية):

1)$bd\,B$ شمال أو شرق أو غرب أو جنوب T :

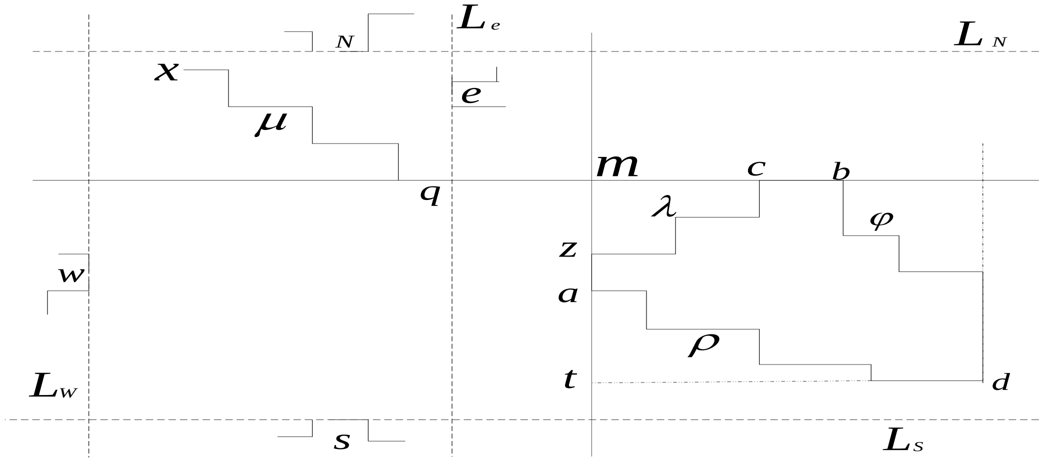
لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن $bd\,B$ شرق Tحيث أنالممر الدرجي λ من جهة المجموعة T

ولإيجاد النواة نعلم أنه لا توجد مركبة لنواة S شمال أو شرق أو غرب أو جنوب B وذلك حسب المبرهنة المساعدة (1) في العمل [12]، وكذلك لا توجد مركبة لنواة S في الشمال الشرقي أو الجنوب الشرقي من Bلأنها لا تحوي نقاطاً من T،(الشكل(7))، ولا توجد مركبة لنواة S في الجنوب الغربي من B لأنها لا ترى جميع نقاط الممر φ، وهكذا تكون أي مركبة لنواة S في الشمال الغربي من Bولإيجادها نأخذ المستقيمين الحاملين للضلعين المشتركين بين λ وكل من الممرين φ,ρ فيتقاطع المستقيمان في النقطة m ويقسمان المستوي إلى أربعة أرباع أحدها يحوي المركبة المحدودة B والربع المقابل له يحوي نقاط T الموجودة في الشمال الغربي من B ، ولنفرض أن مجموعة النقاط هذه هيD ولنبرهن أن $D=Ker\ S$:

لدينا L_e مستقيم عمودي و $L(b,c)$ مستقيم أفقي فهما متقاطعان ولنفرض أن $L_e\cap L(b,c)=\{q\}$ فتكون جبهة D جزء من جبهة T والموجود في الشمال الغربي من B اجتماع القطعتين المستقيمتين المتعامدتين في q والموجودتين داخل T في الشمال الغربي منB، وحسب المبرهنة(1) في العمل [2]تكونD محدبة متعامدة.

لتكن $x\in D$ نقطة كيفية، ولنبرهن أن x ترى درجياً جميع نقاط S.

لدينا $q\in D$ لأن$q\in T$ وموجودة في الشمال الغربي من B، عندئذٍ x ترى q ضمن ممرات درجية في D وبالتالي في S وهذا يعني أنه يوجد ممر درجي في S من x إلى q ولنفرضه μ.



الشكل (7)

إن $[q,c] \subseteq S$ حسب المبرهنة(4) حيث أن: $[q,c] \subseteq L(c,b)$ وبما أن $int\ B \cap L(c,b) = \emptyset$ فإن $int\ B \cap [q,c] = \emptyset$ وهذا يعني أنه لا توجد مركبة محدودة للمتممة تفصل q عن c، وكذلك بما أن $[q,c]$ أفقية فحسب المبرهنة(1) أي غور يفصل q عن c يجب أن يكون غور أفقي (إما شمالي أو جنوبي)ولكن حسب المبرهنة (2) توجد شرق T أغوار شرقية فقط وهذا يعني أنه لاتوجد أغوار أفقية تفصل q عن c.

إن $[m,z] \subseteq S$ حسب المبرهنة(4) حيث أن: $[m,z] \subseteq L(a,z)$ وبما أن $int\ B \cap L(a,z) = \emptyset$ فإن $int\ B \cap [m,z] = \emptyset$ وهذا يعني أنه لا توجد مركبة محدودة للمتممة تفصل m عن z، وكذلك حسب المبرهنات (1) و(2) و(3) لا يوجد أي غور يفصل m عن z.

أولاً: إن x ترى درجياً في S كل نقطة من $bd\ B$ ولنثبت ذلك كما يلي:

نلاحظ أن x في الشمال الغربي من q أو شمال q أو غرب q لذلك يكون اتجاه μ هو الشرق والجنوب من x إلى q، ولدينا $[q,m] \subseteq S$ واتجاهها هو الشرق و $[m,z] \subseteq S$ واتجاهها هو الجنوب وكذلك اتجاه $\rho(z,d)$ هو الشرق والجنوب من z إلى d وينتج عن ذلك أن $\mu \cup [q,m] \cup [m,z] \cup \rho$ ممر درجي في S من x إلى d وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاطه، وبنفس الأسلوب لدينا $[q,c] \subseteq S$ واتجاهها هو الشرق وكذلك اتجاه $\varphi(c,d)$ هو الشرق والجنوب من c إلى d وينتج عن ذلك أن $\mu \cup [q,c] \cup \varphi$ ممر درجي في S من x إلى d، وهكذا x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاطه، وأما بالنسبة لرؤية نقاط الممر λ فنأخذ من أجل كل نقطة $j \epsilon \lambda$ القطعة المستقيمة الأفقية $[j,k] \subseteq S\ ; k \in [m,z]$ (حسب المبرهنة(4)) ونحصل على الممر الدرجي $\mu \cup [q,m] \cup [m,k] \cup [k,j]$ في S من x إلى j وبالتالي x ترى درجياً j، وينتج عن ذلك أن x ترى درجياً في S كل نقطة من نقاط λ، (الشكل (7)). إذن مما سبق نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من bdB.

ثانياً: لنبرهن أن x ترى درجياً في S بقية نقاط S ومن أجل ذلك سوف نقسّم S إلى مجموعتين كما يلي:

المجموعة الأولى E وهي نقاط $S \cap A$ اجتماع نقاط S شرق A، والمجموعة الثانية $S \setminus E$ وهي بقية نقاط S

لنبرهن أن x ترى درجياً في S نقاط $S \setminus E$:

إن هذه المجموعة تحوي الأغوار e و N و s و w وبالتالي نواتها هي T وبما أن $D \subseteq T$ ولدينا $x \in D$ فإن $x \in Ker(S \setminus E)$ فهي ترى درجياً في $S \setminus E$ (وبالتالي في S) كل نقطة من $S \setminus E$.

لنبرهن أن x ترى درجياً في S نقاط المجموعة E وهي عبارة عن اجتماع ثلاث مجموعات جزئية:

الأولى M وهي نقاط S شرق B:

من أجل كل نقطة $y \in M$ نأخذ القطعة المستقيمة الأفقية $[r,y]$ حيث $r \in bd\ B$ وهي أقرب نقطة في $bd\ B$ إلى y فتكون $[r,y] \subseteq M \subseteq S$ (لأن M محدبة أفقياً)، ونحصل على الممر الدرجي في S $\mu \cup [q,c] \cup \varphi(c,r) \cup [r,y]$ من x إلى y، وينتج عن ذلك أن x ترى y درجياً في S وبما أن $y \in M$ كيفية فإن x ترى درجياً في S كل نقطة من M.

الثانية Q وهي نقاط $S \cap A$ جنوب B:

من أجل كل نقطة $v \in Q$ نأخذ القطعة المستقيمة العمودية $[u,v]$ حيث $u \in bd\ B$ وهي أقرب نقطة في $bd\ B$ إلى v فتكون $[u,v] \subseteq Q \subseteq S$ (لأن Q محدبة متعامدة)، ونحصل علىالممر الدرجي في S $\mu \cup [q,m] \cup [m,z] \cup \rho(z,u) \cup [u,v]$ من x إلى v، وينتج عن ذلك أن x ترى v درجياً في S وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة v نجد أن x ترى درجياً في S كل نقطة من Q.

الثالثةF وهي نقاط $A \cap S$ التي تحقق: $bdF = \lambda(c,z) \cup [z,m] \cup [m,c]$

إن F محدبة متعامدةوبالتالي من أجل كل نقطة $j \in F$ نأخذ القطعة المستقيمة الأفقية $[j,l] \subseteq F$حيث $l \in [m,z]$ونحصل على $\mu \cup [q,m] \cup [m,l] \cup [l,j]$وهوممر درجي في Sمن x إلى jوينتج عن ذلك أن x ترى jدرجياً في S وبما أن $j \in F$ كيفيةفإنx ترى درجياً في S كل نقطة من F.

مما سبق ينتج أن x ترى درجياً في S كل نقطة من E وكل نقطة من $S \setminus E$وبالتالي فهي ترى كل نقطة من نقاط S وينتج عن ذلك $x \in Ker\ S$ وبما أن $x \in D$ كيفية فإن $D = Ker\ S$.

2) **$bd\ B$ في الشمال الشرقي أو الشمال الغربي أو الجنوب الشرقي أو الجنوب الغربي من T:**

لنفرض دون المساس بعمومية المسألة أن $bd\ B$ في الشمال الشرقي من Tحيث أنالممر الدرجي λ من جهة المجموعة T، فتكون T في الجنوب الغربي من B وهكذا $Ker\ S = T$ولإثبات ذلك نستخدم الأسلوب السابق في الحالتين $bd\ B$ شرق T أو محتواة فيها.

3) $bd\ B$ تتقاطع مع كل من $int\ T$ و $int(S \setminus T)$:

بنفس الأسلوب السابق نثبت أنه عندما تتقاطع $int\ B$ مع واحد فقط أو مع اثنين فقط (غير متوازيين) من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N فإنه يكون لنواة S مركبة واحدة، (حيث أن الممر الدرجي λمن جهة المجموعة T)، ولكن لا يمكن أن تتقاطع $int\ B$ مع مستقيمين متوازيين من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N لأنها تصبح غير نجمية.

4) عندما$bd\ B \subset (S \setminus T)$ و $int\ B$ تتقاطع مع واحد من المستقيمات L_e, L_W, L_S, L_N:

لنفرض دون المساس بعمومية المسألة **أن** $int\ B \cap L_e \neq \emptyset$ (هذا التقاطع عبارة عن قطعة مستقيمة)حيث أن الممر الدرجي λ من جهة المجموعة Tوبمناقشة مماثلة للمناقشة السابقة نجد أنه لنواة S مركبة واحدة هي نقاط T في الربع المقابل للربع الذي يحوي B والمأخوذ كما سبق.

الاستنتاجات والتوصيات:

1) حصلنا على طريقة لتعيين نواة المضلع المتعامد S المغلق ثنائي الترابط و النجمي درجياً عندما تكون جبهة المركبة المحدودة B للمتممة اجتماعاً لثلاث ممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين، وهذه الطريقة تتلخص بالخطوات الآتية:

أ) إيجاد المجموعة T حيث: $T = \big(cl(P_e) \cap cl(P_N) \cap cl(P_W) \cap cl(P_S)\big) \cap S$

ب)نأخذ المستقيم الحامل للضلع الأفقية المشتركة بين الممر λوأحد الممرين الباقيين والمستقيم الحامل للضلع العمودية المشتركة بين الممر λوالممر الثالث فيتقاطع هذان المستقيمان في نقطة ويقسمان المستوي إلى أربعة أرباع، أحدها يحوي المركبة المحدودة B والربع المقابل له يحوي نواة المجموعة النجمية S(علماً أن الممر λ موجود من جهة المجموعة Tويتقاطع مع كل من الممرين الآخرين بضلع).

ج) استنتاج أن $Ker\ S$ هي مجموعة نقاط Tالموجودة في الربع المقابل للربع الذي يحوي Bبما فيها نقاط المحورين.

2)وجدنا أنه عندما لا يكون الممر λ من جهة المجموعة Tفإن S غير نجمية.

3) عندما تكون جبهة المركبة المحدودة للمتممة اجتماعاً لثلاث ممرات درجية كل منها مؤلف من أكثر من ضلعين فإنه يكون لنواة S مركبة واحدة فقط.

4) نوصي بدراسة حالات مماثلة عندما تأخذ جبهة المركبة المحدودة للمتممة شكلاً مختلفاً عن الشكل المدروس، وكذلك نوصي بتعميم هذه الدراسة إلى فضاءات أخرى.

المراجع:

[1]-TORANZOS,F.A. *Radial functions of convex and star-shaped bodies*. Am.Math.Monthly , Vol. 74, 1967, 278–280.

[2]-BREEN,M. *Staircase kernels in orthogonal polygons*. Arch. Math, Vol.59, 1992,588-594.

[3]-MOTWANI,R.؛RAGHUNATHAN,A.؛SARAN,H. *Covering orthogonal polygons with star polygons*: The Perfect Graph Approach. J.Comput.System Sci,Vol.40,1990,19-48.

[4]-VALENTINE,F.A.*Convex sets*. McGraw. Hill, New York, 1964.

[5]-BREEN,M. *Generating the kernel of a staircase starshaped set from certain staircase convex subsets*. Periodica Math. Hungarica,Vol.64,N1, 2012,29-37.

[6]- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set from a minimal collection of its subsets*. Beitr Algebra Geometrie, Vol. 52, 2011, 113-123.

[7]- BREEN,M. *Generating a staircase starshaped set and its kernel in* $\mathbb{R}^3$ *from certain staircase convex subsets*. Beitr Algebra Geom. 2011.

[8]-BREEN,M. *Simply connected orthogonal polygons as unions of two orthogonally starshaped sets*. J. Geom. Vol. 82, 2005, 025-035.

[9]-BREEN,M. *Dimensions of staircase kernels in orthogonal polygons*. Geometriae Dedicata, Vol .49, 1994,323-333.

[10]-BREEN,M. *Animproved Krasnosel'skii type theorem for orthogonal polygons which are starshaped via staircase paths*. J.Geom.Vol. 51,1994, 31–35.

[11] – حسن، نجود. تعيين نواة المضلعات المتعامدة النجمية ثنائية الترابط عندما المركبة المحدودة للمتممة مستطيلاً، بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2014/7/6.

[12] – ظريف، عدنان.، شاهين، رامي.، حسن، نجود. تأثير المركبة المحدودة لمتممة المضلع المتعامد النجمي درجياً على نواته ، بحث مقبول للنشر في مجلة جامعة تشرين بتاريخ 2015/2/26.