

معضلة النيوتريينو الشمسي و الحل الاهتزازي

*الدكتور نزيه حيدر

**الدكتور ناصر اسماعيل

***حنان أمين

(تاريخ الإيداع 15 / 6 / 2015. قُبِلَ للنشر في 2 / 8 / 2015)

□ ملخص □

استعرضنا في هذا البحث كيفية الحصول على علاقة احتمال اهتزاز النيوتريينو ثنائي النكهة ، و اختبرنا النموذج النظري للحل الاهتزازي ثنائي النكهة ، تبين لنا أن احتمال اهتزاز النيوتريينو يتعلق بطاقة النيوتريينو ، وطول القاعدة (المسافة بين المنبع والكاشف) ، و زاوية المزج θ ، ومربع فرق الكتلة $m_1^2 - m_2^2 = \Delta m_{12}^2$. يوضح هذا البحث أنه من أجل حدوث اهتزاز للنيوتريينو ، فإنه يجب أن تكون واحدة على الأقل من حالات الكتلة مختلفة عن الصفر ، وهذا يعني أن العلاقة $\Delta m_{12}^2 \neq 0$ يجب أن تتحقق . بتعبير آخر يجب أن يكون للنيوتريينو كتلة غير معدومة ، وهذه النتيجة بعد ذاتها كان له ارتدادات فيزيائية ضخمة . أولها يخص النموذج المعياري لفيزياء الجسيمات الأولية الذي يعتبر أن النيوتريينو بدون كتلة ، وثانيها يخص تجربة أوبرا حيث وجود كتلة للنيوتريينو تمنعه من الانتشار بسرعة تساوي سرعة الضوء وهذا يناقض ما جاءت به هذه التجربة من أن النيوتريينو ينتشر بسرعة أكبر من سرعة الضوء في الخلاء .

الكلمات المفتاحية: اهتزاز النيوتريينو - النموذج المعياري - تجربة أوبرا - احتمال الاهتزاز

* أستاذ - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

** مدرس - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

The solar neutrino problem and the oscillation solution

Dr. Nazih Haidar*
Dr. Naser Ismaeel**
Hanan Ameen***

(Received 15 / 6 / 2015. Accepted 2 / 8 / 2015)

□ ABSTRACT □

In this research, we reviewed how to get the relationship of the neutrino oscillation probability in the two flavor approximation, and tested the theoretical model of the oscillation solution. We show that the oscillation probability of neutrino relates with neutrino energy, length of the baseline (the distance between the source and the detector), mixing angle θ , and square mass difference $\Delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$. This research shows that in order to occur the oscillation of neutrino, it must be at least one of the mass states different of zero. This means that the relationship $\Delta m_{12}^2 \neq 0$ must be verify. In other words neutrino must have non zero mass. This result holds a huge physical importance. The first regards the Standard Model of elementary particles, which considered neutrino massless. The second regards the OPERA experiment, where neutrino have non zero mass, and cannot spreading fast equal to the speed of light and so this does not agree with the experience of OPERA, which found that the neutrino spreading faster than the speed of light in a vacuum.

Key words: Neutrino Oscillation, the Standard Model, OPERA Experience, Oscillation Probability.

*Professor at department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

**Assistant professor at department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria,

***Postgraduate student, Department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة:

أجريت التجربة الأولى للنيوترينوات الشمسية في منتصف ستينات القرن العشرين من قبل **ديفز R.Davis** وزملائه [1] من جامعة بنسلفانيا بهدف تحقيق نصر علمي يؤكد نظرية الاندماج النووي لتوليد الطاقة الشمسية ، ويمثل بداية لحقل معرفي جديد يستخدم النيوترينوات لدراسة الشمس. وقد كشفت تجربة ديفز ، التي أجريت في منجم هومستيك للذهب بولاية داكوتا الجنوبية، عن النيوترينوات بطريقة إشعاعية-كيميائية. فقد احتوى المكشاف على سائل التتراكلورواثيلين **tetrachloroethylene** ، وعملت النيوترينوات على تحويل ذرات الكلورين في هذا السائل إلى ذرات الإرغون المشع. وبدلاً من أن يلاحظ ديفز تحول ذرة واحدة من الكلورين إلى أرغون يوميا (وفقا لما تتنبأ به النظرية) فإنه لاحظ حصول هذه العملية مرة واحدة كل يومين ونصف. وقد كشفت السنوات اللاحقة من الأبحاث، والمستخدم تقنيات مختلفة، عن نتائج مماثلة لتلك التي حصل عليها ديفز، ففي جميع تلك التجارب كان عدد النيوترينوات التي تصلنا من الشمس أقل كثيرا من العدد المتوقع، إذ تراوح بين ثلث العدد المتوقع وثلاثة أخماسه، وذلك حسب طاقات النيوترينوات المدروسة. ونظراً لعدم فهم الفيزيائيين أسباب التفاوت الكبير بين القياسات والتنبؤات لعدد النيوترينوات الملتقطة، كان عليهم أن يوقفوا مؤقتاً متابعة هدفهم الأصلي "دراسة لب الشمس عن طريق رصد النيوترينوات". انقضى ما يقارب من قرن حتى تمكن العلماء تماما من فهم كيفية توليد الشمس لطاقتها. وتطور من خلال ذلك فهمنا للنيوترينوات وتحولت من كونها فرضيات تخمينية لتصبح أداة تجريبية أساسية.

ما هو النيوترينو؟ في الحقيقة إن الشيء الذي نسميه النيوترينو هو الحالة التي يتم إنتاجها في التفاعل الضعيف أي هو، بالتعريف، حالة مميزة للنكهة، بمعنى أن النيوترينو دائما يولد ، أو يمتص لإعطاء لبيتون مشحون بنكهة الإلكترون، أو الميون، أو التاو . فالنيوترينو الذي يولد مع الإلكترون المشحون هو نيوترينو الإلكترون، وكذلك الأمر بالنسبة للنكهة .

اهتزاز النيوترينو: ظاهرة كمومية اكتشفت من قبل برونو بونتكيرفو Bruno Pontecorvo عام 1957 ومن قبل مكي Maki، وناكاجاوا Nakaguwa وساليتا Saleata عام 1962. إنها نتيجة لمزج النيوترينو، التي تتلخص في أن حالات النيوترينو المتضمنة في التفاعلات الضعيفة (أي حالات النكهة ν_e, ν_τ, ν_μ) ليست هي نفسها الحالات عند الانتشار في فراغ حر (أي حالات الكتلة $\nu_1; \nu_2; \nu_3$).

الصورة كالاتي : لنفترض أن أحداً ما يولد نيوترينو في المنبع وهذا النيوترينو يملك نكهة محددة من النكهات المشار إليها أعلاه، ويمكن إنتاجه كتركيب خطي من الحالات المميزة للكتلة الأنفة الذكر. سوف تنتشر هذه الحالات ذات الكتلة المحددة من المنبع نحو الكاشف . فإذا كانت الحالات المميزة للكتلة لديها كتل مختلفة فإن الطور بين الحالات سوف يتغير مع المسافة بين المنبع والمصدر. وعندما نذهب للكشف عنهم عند الكاشف، فمن الممكن أن نكتشف حالة نكهة جديدة لم تكن موجودة في الحزمة الصادرة عن المنبع . ولتبسيط الأمر وتوضيحه تناولنا في هذا البحث اهتزازات ثنائية النكهة بشكل عام.

أهمية البحث وأهدافه:

أهمية البحث:

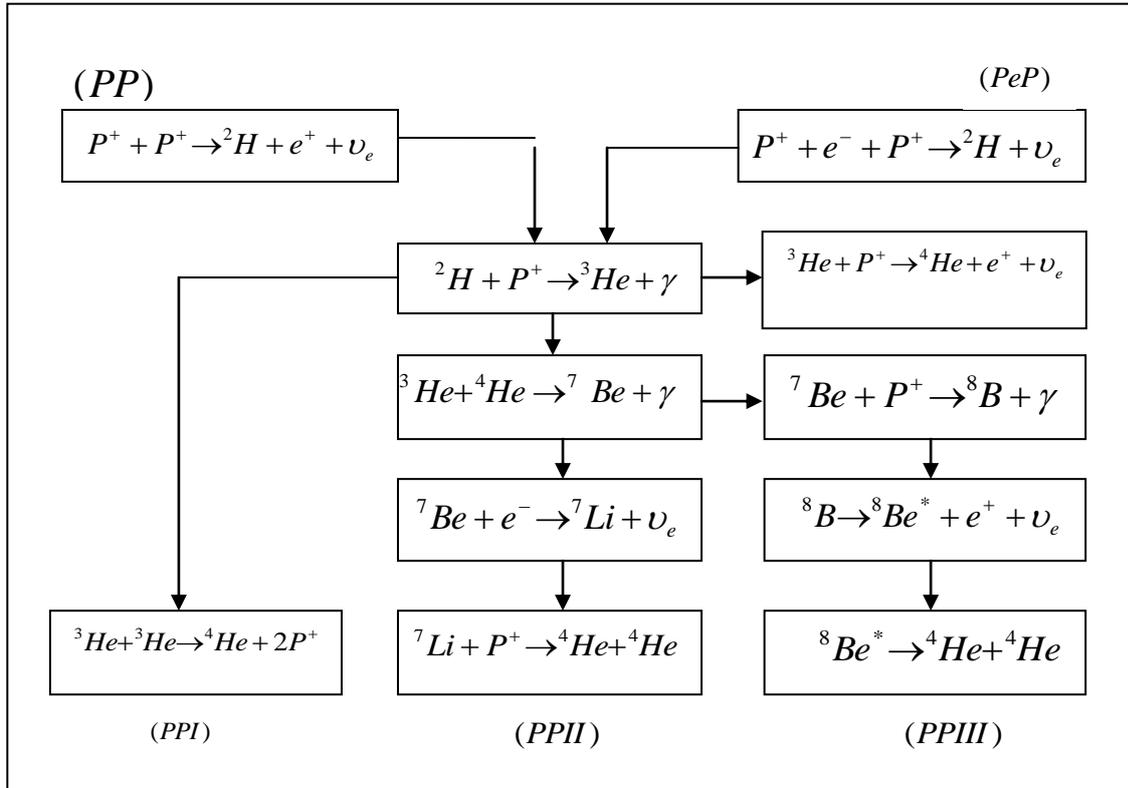
تكمن أهمية البحث في إجراء دراسة مستفيضة لمسألة اهتزاز النيوتريينو من مرحلة التنبؤ إلى مرحلة القياس التجريبي ومناقشة بعض الأدلة على ذلك على ضوء قياسات عدد من الحوادث الملنقطة في بعض التجارب التي تمت خلال السنوات العشر الأخيرة وأسهمت في حل مسألة النيوتريينو الشمسي.

أهداف البحث: الاطلاع على أهم تجارب فيزياء النيوتريينو ومحاولة مواكبة التطورات العلمية المتسارعة في هذا المجال وخاصة نتائج تجربة أوبرا التي حيرت علماء الفيزياء ووضعتهم في مأزق حقيقي بين القبول بنتائجها أو عدم القبول. كذلك الأمر بالنسبة للنموذج المعياري (القياسي) الذي لا مفر أمامه من الاعتراف بكتلة غير معدومة لجسيم النيوتريينو.

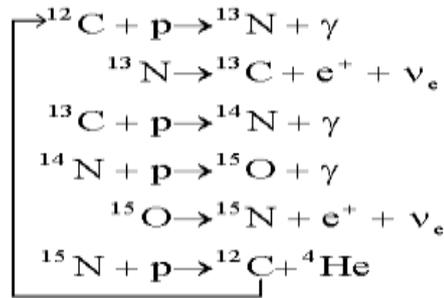
طرائق البحث ومواده:

• منشأ النيوتريينو الشمسي: يتولد النيوتريينو الشمسي من خلال الدورتين التاليتين:

أولاً: دورة اندماج بروتون - بروتون (PP-cycle) لإنتاج الهليوم ومساهمتها بتوليد النيوتريينو تقدر بـ 98.3%. هذه العملية أساسية لإنتاج الطاقة في الشمس وكل النجوم الشبيهة بالشمس وتسيطر على أحداث باطن النجم عندما لا تتجاوز درجة الحرارة 15 مليون درجة مئوية ، ويمكن تلخيصها بالمخطط الآتي [2] :

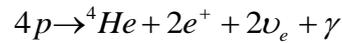


وتسيطر على أحداث باطن النجم عندما تتجاوز درجة الحرارة 15 مليون درجة مئوية. ويمكن تلخيصها بالمخطط الآتي[3]:



• طاقة النيوتريونات الشمسية: Energy of Solar Neutrinos

تعمم الطاقة الشمسية على أنها حصيلة تفاعلات اندماجية وفق العلاقة التالية[4]:



الطاقة المتحصل عليها من خلال هذا التفاعل تساوي $Q = 4m_p - m_{4\text{He}} - 2m_e \approx 26\text{MeV}$ ينبعث معظمها كفوتونات و جزءاً منها يُحمل بواسطة النيوتريونات ويقدر بـ $\langle E_{2\nu_e} \rangle = 0.59\text{MeV}$. ان التدفق النيوتريوني الناتج من خلال التفاعل $p + p \rightarrow ^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ هو التدفق الغالب . غير أنه من الصعب اكتشاف مثل هذه النيوتريونات لأنها تولد بطاقة منخفضة جداً تقدر بـ $E_\nu \langle 0,42\text{MeV}$. لدراسة النقاط النيوتريونات الشمسية من الأهمية بمكان دراسة ما يسمى بنيوتريونات البيريليوم المتولدة من خلال التفاعل $^7\text{Be} + e^- \rightarrow ^7\text{Li} + \nu_e$ ذات الطاقة $E_\nu = 0.86\text{MeV}$ أو $E_\nu = 0.39\text{MeV}$ والنيوتريونات المتولدة في التفاعل $^8\text{B} \rightarrow ^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$ بطاقة $E_\nu \langle 15\text{MeV}$.

إن اكتشاف النيوتريونات الشمسية في الوقت الراهن يعتمد على العديد من النماذج التي تم تطويرها [5, 6] لوصف ديناميكا الشمس وهذه النماذج تتبأت بتدفق النيوتريو الشمسي إلى الأرض بشكل رئيس على ثلاثة نماذج استكشافية تمتلك طاقات عتبة مختلفة وسوف نركز على نموذج (Pinsonneault-Bahcall) كنموذج شمسي معياري SSM مختار[7].

• ظهور معضلة النيوتريو الشمسي Appearance Solar neutrino problem

نستعرض في هذا البحث أهم تجارب فيزياء النيوتريو التي أدت إلى ظهور التباين في عدد الحوادث المسجلة في التجارب والحسابات النظرية المعتمدة على النموذج الشمسي المعياري المستخدم لهذا الغرض:

1- تجربة هومستاك Homestake: يعتبر هومستاك أول كاشف أقيم لمراقبة النيوتريونات الفلكية في منجم ذهب يقع في داكوتا Dakota الجنوبية في الولايات المتحدة الأمريكية USA يرأسه ديفز R.Davis . أعلنت هذه التجربة أول نتائجها رسمياً في اكتشافها للنيوتريونات الشمسية في عام 1968 [8]. يحتوي كاشف النيوتريو في تجربة هومستاك على 615 طن من ثاني كلور الايتلين C_2Cl_4 ويحصل التفاعل التالي : $\nu_e + ^{37}\text{Cl} \rightarrow ^{37}\text{Ar} + e^-$ بطاقة عتبة 0.814MeV . النتيجة تعتمد على الأروغون المستخلص حيث يحصى عدد نوى ^{37}Ar بواسطة نشاطها الإشعاعي. المعدل الوسطي للحوادث الملتقطة في هذه التجربة كان يساوي : $Q_{\text{Cl}} = 2.56 \pm 0.16\text{SNU}$ حيث Solar Neutrino Unit (SNU) هي وحدة النيوتريو الشمسي وتساوي تفاعل نيوتريو واحد من أصل 10^{36} من

نيوترينوات المصدر مع ذرة هدف واحدة خلال الثانية . معدل الحوادث المشاهدة هو حوالي ثلث معدل الحوادث الذي ينتبأ بها النموذج الشمسي (SSM) التي تساوي:

$$(R_{Cl})_{SSM} = 7.6_{-1.1}^{+1.3} SNU$$

2- تجربة ساج و غاليس/جنو SAGE and GALLEX/GNO

(SAGE (Soviet – American – Gallium Experiment) و (Gallium Experiment GALLEX) (الاثنتان تستعملان ^{71}Ga كهدف. إن كاشف ساج SAGE متوضع في مرصد بكسان BAKSAN النيوترييني في روسيا ويحتوي على 37 طن من الغاليوم المعدني السائل . تجربة غاليس GALLEX متوضعة في نفق غران ساسو *Gran Sasso* في ايطاليا تستعمل 30.3 طن من ^{71}Ga و 101 طن من محلول كلوريد الغاليوم المائي ($GaCl_3 - Hcl$) كهدف . في كلتا التجريبتين يقوم اكتشاف النيوتريينو على تفكك بيتا العكسي التالي : $\nu_e + ^{71}Ga \rightarrow ^{71}Ge + e^-$ ، حيث طاقة العتبة تساوي $0.233 MeV$ ولذلك تجارب الغاليوم قادرة على كشف النيوتريينوات منخفضة الطاقة من الاندماج النووي pp . إن المنتج مستخلص بطريقة (اشعاعية-كيميائية) وعدد تفككات ^{71}Ge تقاس بواسطة عداد تناسبي . بينما تجربة ساج SAGE [10,9] مازالت مستمرة فإن تجربة غاليس GALLEX [11] أنهت عملها في عام 1997 وانطلق مرصد جنو GNO (Gallium Neutrino Observer) وأخذ يعطي معطيات في ربيع 1998. إن معدلات الحوادث المشاهدة في تجارب SAGE [12] ، GALLEX [13] ، GALLEX+ GNO المشتركة [15,14] هي :

$$R_{SAGE} = 70.8_{-5.2}^{+5.3} SNU$$

$$R_{GALLEX} = 77.5 \pm 6.2 SNU$$

$$R_{GALLEX+GNO} = 70.8 \pm 4.5 SNU$$

وكل هذه التجارب تقدم حوالي 55 – 60% من توقعات SSM الآتية .

$$(R_{Ga})_{SSM} = 128_{-7}^{+9} SNU$$

حيث الإسهام الرئيسي 69.7SNU يأتي من نيوتريينوات القناة pp .

3- تجربة كاميوكاند و سوبركاميوكاند Kamiokande And Super- Kamiokande

إن تجربتي كاميوكاند Kamiokande والسوبر كاميوكاند Super- Kamiokande متوضعتان في مرصد تحت الأرض في كاميوكا Kamioka في اليابان يستخدمان كاشف شيرنكوف . يحتوي كاشف كاميوكاند على 3000 طن من الماء النقي. أما كاشف سوبر كاميوكاند فهو أكبر من الأول ويحتوي على 50 كيلو طن من الماء منهم 22.5 كيلو طن تستخدم لقياس النيوتريينوات الشمسية. في كلتا التجريبتين عملية اكتشاف النيوتريينوات الشمسية حصلت من خلال مراقبة تفاعل التبعثر المرن التالي: $\nu_\alpha + e \rightarrow \nu_\alpha + e$ حيث $\alpha = e, \mu, \tau$. من هنا تملك التفاعلات الالكترونية الحساسة لمختلف أصناف النيوتريينو الفعّال على خلاف التجارب التي تعتمد الأسلوب (الاشعاعي-الكيميائي) والتي تتحسس فقط لصف النيوتريينوات الالكترونية ν_e وعلى كل حال فإن النيوتريينوات الالكترونية تعطي الإسهام الأكبر حتى في تجربة كاميوكاند وكذلك في سوبر كاميوكاند حيث مقطع تشتتهم هو حوالي 6 مرات أكبر من مقاطع تشتت النيوتريينوات الميونية ν_μ والنيوتريينوات النابوية ν_τ . إن طاقة العتبة للإلكترون المرتد هي أكبر قليلاً من 7.5MeV في تجربة كاميوكاند و 5MeV في تجربة سوبر كاميوكاند ولذلك فقط نيوتريينوات البورون 8B والقليل من نيوتريينوات القناة hep ($^3He + P \rightarrow ^4He + e^+ + \nu_e$) يمكن قياسها في التجارب . إن

النتيجة الختامية لتجربة كاميوكاند III, II [16] والقياسات الأخيرة لـ 8B حول تدفق النيوتريو الشمسي في Super-K [17] K نعرضها كالتالي :

$$\phi_{Kam} = (2.80 \pm 0.19) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

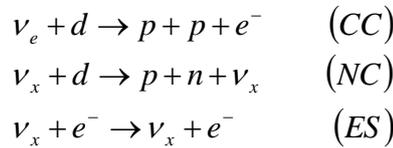
$$\phi_{Super-K} = (2.35 \pm 0.02) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

وهذه النتائج تعكس حوالي 40-50% من توقعات النموذج المعياري الشمسي SSM التي تساوي:

$$(\phi_{^8B})_{SSM} = 5.05_{-0.16}^{+0.02} \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

4- تجربة مرصد سودبري النيوتريوني SNO :

إن SNO اختصاراً لـ (Sudbury Neutrino Observation) وهو عبارة عن كاشف شيرنكوف المتوضع في منجم كريفتون Creighton بالقرب من سودبري Sudbury في كندا [18]. إن وسط اكتشاف النيوتريو عبارة عن واحد كيلو طن من الماء الثقيل النقي $SNO. D2O$ حساس لكل نكهات النيوتريو الفعّال من خلال تفاعلات التيار المشحون والتيار الحيادي وكذلك التبعثر المرن :



حيث $x = e, \mu, \tau$. إن تفاعل التيار المشحون (CC) بالنسبة للديترون (deuteron) بطاقة عتبة

$E_{th} = 6.8 \text{ MeV}$ حساس فقط للنيوتريو الالكتروني ν_e بينما تفاعل التيار الحيادي NC وبطاقة عتبة

$E_{th} = 2.2 \text{ MeV}$ فهو حساس بشكل متساو لكل نكهات النيوتريو الفعّال. إن المعدلات الملاحظة من أجل طاقة

عتبة أعلى من 5MeV [19] هي :

$$\Phi_{CC}^{SNO} = (1.76_{-0.05}^{+0.06}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} ,$$

$$\Phi_{NC}^{SNO} = (5.09_{-0.43}^{+0.44}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} ,$$

$$\Phi_{ES}^{SNO} = (2.39_{-0.23}^{+0.24}) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

باستخدام هذه المعطيات أعلاه نجد أن تدفق ν_e من 8B هو:

$$\Phi_e = (1.76 \pm 0.05) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

وبالنسبة للتدفق غير ν_e نجد :

$$\Phi_{\mu\tau} = (3.41 \pm 0.45) \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

إن التدفق الكلي لنيوتريونات 8B الفعالة المقاسة بالتفاعل NC تتسجم مع تنبؤات النموذج المعياري الشمسي

SSM . نخلص مما سبق إلى أن كل تجارب النيوتريو الشمسي تقريباً تمكنت من اكتشاف حوالي 30-60% فقط

مما يتوقعه النموذج المعياري الشمسي SSM لتدفق النيوتريو. هذا الاختلاف بين القياس والتنبؤ دعي بمعضلة

النيوتريو الشمسي. أدى ذلك إلى ظهور آراء كثيرة بعيدة عن الحل الاهتزازي وعلى سبيل المثال ظهرت ما يسمى

بتفاعلات النيوتريو اللامعيارية مع المادة [20] ومبادرة نكهة السبين التجاوبية [21] ، وتفكك النيوتريو الميوني [22] ،

وتأثيرات اللاترباط المحرّضة من فيزياء جديدة (على سبيل المثال تكيم الجاذبية) [23]، تغير النكهة من خلال تفاعلات

النيوتريو مع المادة والتي تحرض التحويل من النيوتريو الميوني الى النيوتريو التاوي في حالة النيوتريونات اللاكتلية

[24]. كل هذه الحلول المضطربة قدمت أفكاراً هزيلة لسد الهوة بين التجارب العملية والتنبؤات النظرية وبقي الحل

الاهتزازي هو المرجح لحل مسألة النيوتريينو الشمسي وقد أكدته لاحقا العديد من تجارب النيوتريينو الشمسي كتجربة مفاعل النيوتريينو KamLAND [25] التي كانت تأييداً قوياً لفرضية الاهتزاز. كذلك قياسات تجربة SNO أثبتت بما لا يدع الشك أن النيوتريينو غير الالكتروني في التدفق الشمسي لـ 8B هو موجود وأكبر من الصفر ولذلك فإن الدليل على تحول نكهة النيوتريينو من ν_e إلى ν_μ أو ν_τ هو المرجح .

• تدفق المعطيات المؤيدة للحل الاهتزازي:

1- نيوتريونات السوبر كاميوكاند: Super- Kamiokande neutrinos

قدم فريق تعاون السوبر-كاميوكاند [26] أدلة قوية جداً على تذبذب النيوتريينو، حيث أظهرت النتائج أن نيوتريونات-الميون التي تولدها الأشعة الكونية في طبقات الجو العليا، كانت تختفي بنسبة تتوقف على المسافة التي تقطعها. وتفسر فرضية اهتزاز النيوتريينو هذا الاختفاء تفسيراً جيداً، وهي في هذه الحالة تتضمن تحول نيوتريونات الميون على الأرجح إلى نيوتريونات التاو. ويتم الكشف عن النيوتريونات الأولى في طاقات الأشعة الكونية بواسطة السوبر-كاميوكاند، أما الثانية بواسطة تجربة أوبرا. ويمكن على نفس النحو تفسير النقص الحاصل في النيوتريونات الشمسية.

2- نيوتريونات LSND

هي تجربة لكاشف نيوتريينوي يعتمد على سائل وماض يرمز لها بالحروف LSND اختصاراً لأوائل الكلمات المشكلة للعبارة التالية [27]: Liquid Scintillating Neutrino Detector أنجزت هذه التجربة في مخبر (لوس ألاموس) Facility Los Alamos Meson Physics . لقد عرضت أول دليل حول الاهتزاز من نيوتريينو مضاد ميوني $\bar{\nu}_\mu$ إلى نيوتريينو مضاد الكتروني $\bar{\nu}_e$.

3- تجارب المسرع ذو الخط القاعدي الطويل Long-Baseline Accelerator Experiments

إن K2K (KEK to Kamioka) [28] يعتبر أول مسرع متوضع على خط قاعدي طويل في تجربة LBL. حزمة النيوتريينو يتم إنتاجها بواسطة حزمة بروتونات طاقتها 12GeV آتية من مسرع سنكروتوني يقع في هيئة أبحاث المسرع عالي الطاقة KEK، اليابان ، وتكتشف في كاشف Super-K الكائن على بعد 250 كيلو متر عن KEK. حزمة النيوتريينو تتألف من 98% نيوتريونات ميونية صافية بطاقة رئيسية 1.3GeV . إن عدد حوادث النيوتريينو المسجلة وطيف الطاقة المسجل كلاهما متناغم مع فرضية اهتزاز النيوتريينو .

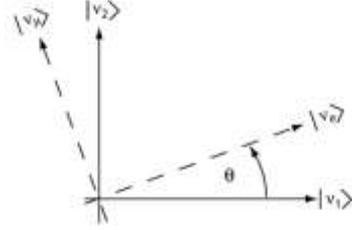
4- تجربة أوبرا OPERA [30,29]

وتهتم هذه التجربة بملاحظة حزمة من جسيمات النيوتريينو المتولدة في "سيرن" التي يوجد مقرها على الحدود الفرنسية السويسرية قرب جنيف ورصدها في مختبر غران ساسو Gran Sasso القومي في إيطاليا والذي يقع على مسافة 730 كم منها. ويذكر أن تجربة أوبرا تم إطلاقها في عام 2006م لدراسة التحول النادر الاهتزاز لجسيم نيوتريينو الميون ν_μ إلى نيوتريينو تاو ν_τ . وتم ملاحظة مثل هذه التحولات في عام 2010 م وهو ما يبرهن على القدرة الفريدة للتجربة في كشف الإشارة المحيرة لنيوتريونات تاو.

احتمال اهتزاز النيوتريينو في الفراغ : Probability of Neutrino Oscillation In Vacuum

اهتزاز النيوتريينو مشابه للاهتزاز $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ المعروف منذ زمن طويل فهو عبارة عن ظاهرة كمومية تنتج عن مزج النيوتريونات. إن فكرة اهتزاز النيوتريينو تعود تاريخياً إلى العام 1950 حيث ناقشها لأول مرة بونتيكورفو Pontecoruo [31]. الحالات الضعيفة المميزة للنكهة والتي عادة ما نلاحظها بالشكل الثنائي ν_e, ν_μ يمكن لها أن تهتز من واحدة لأخرى أو من حالة إلى أخرى إذا كانت مركبة من مزيج من الحالات المميزة للكتلة التي

نعبر عنها بالشكل v_1 ، v_2 . إذا دارت الحالات الضعيفة المميزة للنكهة بزواوية θ بالنسبة للحالات المميزة للكتلة كما هو واضح في الشكل (1) التالي:



الشكل (1): الحالات الضعيفة المميزة للنكهة تدور بزواوية θ بالنسبة للحالات المميزة للكتلة v_1 ، v_2

فإن المعادلة المصفوفية التي تربط الحالات المميزة للنكهة بالحالات المميزة للكتلة يعبر عنها كما يلي [32]:

$$\begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

مما سبق نعبر عن حالتي النكهة v_e, v_μ بالعلاقتين:

$$\begin{aligned} |v_e\rangle &= \cos \theta |v_1\rangle + \sin \theta |v_2\rangle \\ |v_\mu\rangle &= -\sin \theta |v_1\rangle + \cos \theta |v_2\rangle \end{aligned}$$

حيث تدعى θ بزواوية المزج . لنفرض أن الحالات المميزة للكتلة v_1, v_2 تملك الكتل m_1, m_2 وكلاهما يملك اندفاعاً P أي $P_1 = P_2 = P$. عندئذٍ التطور الزمني للحالة v_μ يعبر عنه كما يلي:

$$\begin{aligned} |v_\mu(t=0)\rangle &\equiv |v_\mu\rangle = -\sin \theta |v_1\rangle + \cos \theta |v_2\rangle \\ |v_\mu(t \neq 0)\rangle &\equiv |v_\mu(t)\rangle = -\sin \theta |v_1\rangle e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \cos \theta |v_2\rangle e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \end{aligned}$$

$$E_1 = \sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4} \quad \text{و} \quad E_2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} \quad \text{حيث:}$$

نعتبر النيوتريونات نسبية من أجل إجراء بعض التقريبات حيث نختار الجملة الطبيعية ($\hbar = c = 1$) وعند ذلك

$$E_2 = \sqrt{p^2 + m_2^2}, \quad E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2} \quad \text{نجد:}$$

بما أن النيوتريونات نسبية نستطيع أن نكتب:

$$E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2} = \sqrt{p^2 \left(1 + \frac{m_1^2}{p^2}\right)} = p \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{p^2}} \cong \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{p^2}\right) p$$

حيث استخدمنا منشور نيوتن واحتفظنا بالحددين الأول والثاني فقط. استناداً إلى ماسبق يمكننا الآن كتابة طاقتي

$$E_2 \cong p + \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{p}, \quad E_1 \cong p + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{p} \quad \text{الحالتين المميزتين للكتلة بالشكل التقريبي التالي:}$$

$$|v_\mu(t)\rangle = -\sin \theta |v_1\rangle e^{-i\left(p + \frac{m_1^2}{p}\right)t} + \cos \theta |v_2\rangle e^{-i\left(p + \frac{m_2^2}{p}\right)t} \quad \text{بنشر } V_\mu \text{ من خلال الزمن نجد:}$$

$$|v_\mu(t)\rangle = e^{-i(p+\frac{m_1^2}{p})t} \left[-\sin\theta |v_1\rangle + \cos\theta |v_2\rangle e^{+i(\frac{1}{2}\frac{m_1^2-m_2^2}{p})t} \right]$$

نفرض الآن أن: $t = x/c = x$ ، عندئذ نستطيع أن نكتب:

$$|v_\mu(t)\rangle = e^{-i(p+\frac{m_1^2}{p})t} \left[-\sin\theta |v_1\rangle + \cos\theta |v_2\rangle e^{+i(\frac{1}{2}\frac{\Delta m_{12}^2}{p})x} \right]$$

لحساب احتمال الانتقال من الحالة v_μ إلى الحالة v_e يجب تربيع المطال الذي يصف عملية الانتقال:

$$P(v_\mu \rightarrow v_e) = \left| \langle v_e | v_\mu(t) \rangle \right|^2$$

$$\langle v_e | = \cos\theta \langle v_1 | + \sin\theta \langle v_2 | \quad \text{لدينا:}$$

وبالتالي نستطيع كتابة المطال بالصيغة:

$$\langle v_e | v_\mu(t) \rangle = e^{-iz} \left(-\sin\theta \cos\theta + \sin\theta \cos\theta e^{\frac{i}{2}\frac{\Delta m_{12}^2}{p}x} \right)$$

$$\exp[-i(p+\frac{m_1^2}{p})t] = \exp(-iz)$$

مع الإشارة إلى أن: $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$ ، $\langle v_i | v_i \rangle = 1$. نأخذ مربع القيمة المطلقة للمطال أعلاه فنجد الاحتمال:

$$P(v_\mu \rightarrow v_e) = \left| \langle v_e | v_\mu(t) \rangle \right|^2 \\ = e^{+iz} e^{-iz} \sin^2\theta \cos^2\theta \left(-1 + e^{\frac{i}{2}\frac{\Delta m_{12}^2}{p}x} \right) \left(-1 + e^{-\frac{i}{2}\frac{\Delta m_{12}^2}{p}x} \right)$$

بما أن سرعة النيوتريو نسبية يمكن الافتراض أيضا التالي: $x = L$ ، $P = E_\nu$

وفي هذه الحالة تتحول العلاقة الأخيرة إلى الشكل التالي:

$$P(v_\mu \rightarrow v_e) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{2} \frac{L}{E_\nu} \right) \right]$$

باستخدام العلاقات المتثلثة: $2 \sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ ، $\cos\theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ نجد:

$$P(v_\mu \rightarrow v_e) = \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2}{4} \frac{L}{E_\nu} \right)$$

الآن نكتب ماداخل الحد \sin^2 بوساطة عدد مناسب من \hbar ، c كما يلي:

$$\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{4} \frac{L}{E_\nu} \right) \Rightarrow \left(\frac{\Delta m_{12}^2 c^4}{4\hbar c} \frac{L}{E_\nu} \right)$$

وهكذا يصبح المقدار أعلاه بوحدات ملائمة للفيزيائيين التجريبيين. الآن نرغب أن تحتوي المتغيرات في المعادلة

الأخيرة للوحدات التالية: $(\Delta m^2 c^4 (eV^2))$ ، $L(\text{meter})$ ، $E_\nu(\text{MeV})$

إذا عوضنا $\hbar c$ بـ $1.7eV.nm$ يمكننا كتابة المقدار بين قوسين بالشكل التالي:

$$\left(\frac{\Delta m_{12}^2 c^4}{4\hbar c} \frac{L}{E_\nu} \right) \Rightarrow \left(\frac{\Delta m_{12}^2 c^4}{4 \times 197 eV.nm} \frac{L}{E_\nu} \right) \left(\frac{10^{-6} MeV/eV}{10^{-9} m/nm} \right) = 1.27 \Delta m_{12}^2 \frac{L}{E_\nu}$$

أخيراً يمكننا كتابة المعادلة الأخيرة بالصيغة الأكثر شهرة:

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(L/E_\nu) = \sin^2(2\theta) \cdot \sin^2 \left(1.27 \Delta m_{12}^2 \frac{L(km)}{E_\nu(GeV)} \right) \quad (*)$$

أي إذا بدأنا بنكهة واحدة ولنقل ν_μ ، في المصدر نجد أن الكاشف يكتشف نكهة أخرى ولنقل ν_e واحتمال الكشف بحسب بالعلاقة (*). والاحتمال المتبقي يكتب كالتالي:

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta m_{12}^2 (eV^2) L(km)}{E(GeV)} \right)$$

باستخدام طول الاهتزاز المعروف بالعلاقة $L_{osc} = 4\pi E / \Delta m_{12}^2$ فإن الجزء الاهتزازي من الاحتمال يمكن كتابته بالشكل:

$$\sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) = \sin^2 \left(\frac{L}{L_{osc}} \pi \right)$$

من الأهمية بمكان أن نشير بأن أية تجربة اهتزازية تكون حساسة للقيمة المعطاة للمقدار Δm_{12}^2 فقط إذا كانت المسافة بين منبع النيوتريينو ونقطة الاكتشاف L (الطول القاعدي) من مرتبة طول الاهتزاز L_{osc} الموافق إلى $E/L \approx \Delta m_{12}^2$. إذا كان الطول القاعدي أقصر بكثير من طول الاهتزاز فإن الاهتزازات لا تملك زمناً كافياً كي تتطور (تتنامى) وبالتالي الاحتمالية الانتقالية تتراجع. من جهة أخرى إذا كان الطول القاعدي أطول كثيراً من الطول الاهتزازي أي $L \gg L_{osc}$ فإن السلوك الاهتزازي يختفي بسبب التوسيط على طيف النيوتريينو و كذلك بسبب مبدأ الشك على الطول القاعدي وبالتالي نجد من التوسيط أن الاحتمال الانتقالي يصبح بشكل عام:

$$\hat{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta)$$

النتائج والمناقشة:

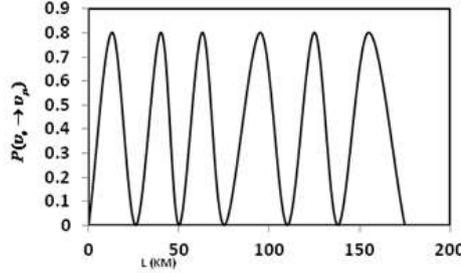
نرتب بعض ما قدمته تجارب النيوتريينو الشمسي والجوي بكافة أنواعها من قياسات لوسائط المزج الشمسية والجوية في جدول كالتالي [34,33]:

Δm_{21}^2	$8.0 \pm 0.20 \times 10^{-5} eV^2$	solar
$ \Delta m_{13}^2 $	$2.35 \pm 0.09 \times 10^{-3} eV^2$	atmospheric
$ \Delta m_{32}^2 $	$2.44 \pm 0.09 \times 10^{-3} eV^2$	
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.317^{+0.017}_{-0.016}$	$\theta_{12} = 32.5^\circ$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.45^{+0.04}_{-0.05}$	$\theta_{23} = 45^\circ$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.009^{+0.015}_{-0.008}$	$\theta_{13} \langle 6^\circ$

لاختبار القياسات التجريبية من خلال النموذج النظري للاهتزاز ثنائي النكهة نعود إلى علاقة الاهتزاز بالفراغ ثنائي النكهة (*) ونختار من الجدول أعلاه الوسيطين الأكثر تداولاً بين التجارب وهما:

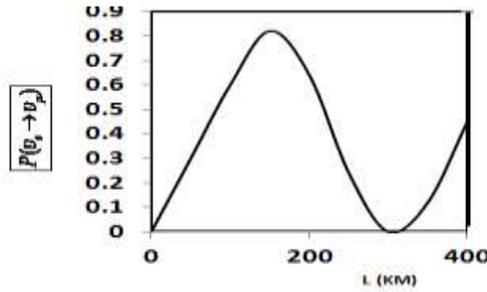
$$\theta_{12} \approx 32.5^\circ, \Delta m_{12}^2 \approx 8.0 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$$

ثم نرسم المنحني البياني الذي يمثل احتمال اهتزاز النيوتريينو من النكهة الالكترونية إلى النكهة الميونية $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = f(L)$ بتابعة طول القاعدة L من أجل الطاقة $E = 1 \text{ MeV}$ فنحصل على الشكل (2).



الشكل (2): يمثل تابعة احتمال اهتزاز النيوتريينو $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ لطول خط القاعدة L .

ومن أجل قيمة أخرى للطاقة $E = 10 \text{ MeV}$ مع الاحتفاظ بقيمة الوسائط الباقية نجد احتمال اهتزاز النيوتريينو $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ بتابعة طول خط القاعدة L ممثلاً بالشكل (3).

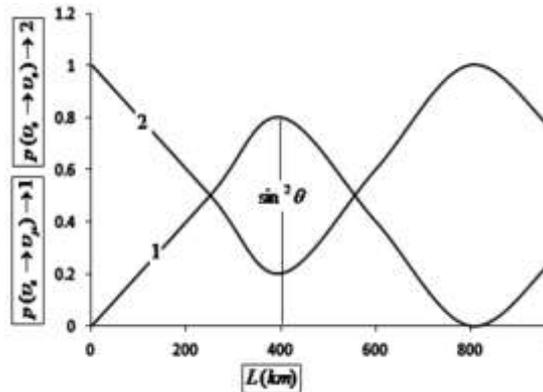


الشكل (3): يمثل تابعة احتمال اهتزاز النيوتريينو $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ لطول خط القاعدة L .

بالعودة إلى علاقة الاهتزاز (*) واختيار مجموعة أخرى من القيم للوسائط من خارج الجدول أعلاه كالقيم:

$$E_\nu = 1 \text{ GeV}, \sin^2(2\theta) = 0.8, \Delta m^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

ورسم المنحني البياني $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = f(L)$ الموافق للمعطيات الجديدة نجد الشكل (4).



الشكل (4): احتمال الاهتزاز كتابع لطول القاعدة L من أجل البارامترات المعطاة

نلاحظ من الأشكال السابقة أنه عندما $L=0$ فإن احتمال الاهتزاز هو صفر. وعندما يزداد L فإن الاهتزازات تبدأ في العمل حتى $L/E = \pi/2$ وهذا ما يعادل $L=400$ km. عند هذه النقطة يكون الاهتزاز أعظمي. ومع ذلك، فإن زاوية المزج هي مجرد $\sin^2(2\theta) = 0.8$ لذلك في المزج الأعظمي، 80% فقط من النيوترينوات الأولية قد تهتز أثناء الانتشار بعيداً. كلما تزداد L فإن الاهتزاز ينخفض حتى يختفي عند $L = km$ وتتكون الحزمة عندئذٍ كلياً من نكهة النيوترينو الأولية. تشير أيضاً إلى أنه إذا كان $\sin^2(2\theta) = 1.0$ ، فإن الاهتزازات سوف تبدو كأنها أعظميه وهذا يعني أنه في بعض النقط على الطريق إلى الكاشف تكون النيوترينوات قد اهتزت فيها 100% كما يبين الشكل (4).

بالعودة مرة أخرى إلى المعادلة (*) نجد أن هذه المعادلة تحوي على العديد من النقاط الهامة :

(1) - الزاوية θ التي تسمى بزاوية المزج تحدد مدى اختلاف حالات النكهة عن حالات الكتلة. إذا كانت $\theta = 0$ ، فإن حالات النكهة مطابقة لحالات الكتلة وهذا يعني أن النيوترينو سوف تنتشر من المصدر إلى الكاشف وتبقى نفسها و بكمية حركة محددة. ومن الواضح في هذه الحالة، أن الاهتزازات لا يمكن أن تحدث. إذا كان $\theta = \pi/4$ فإن الاهتزازات تقريباً تكون أعظميه وفي بعض النقط على الطريق بين المصدر والكاشف كل النيوترينوات التي بدأنا بها سوف تبدأ تهتز إلى نكهة أخرى.

(2) - فرق مربع الكتلة الذي يعبر عنه بالعلاقة: $\Delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$. من أجل أن تحدث اهتزازات النيوترينو، يجب أن تكون واحدة على الأقل من حالات الكتلة مغايرة للصفر. هذه الحالة البسيطة لها تطبيقات ضخمة. إذن لكي تحدث الاهتزازات، يجب أن يكون للنيوترينو كتلة. أبعد من ذلك يجب أن تكون كتل الحالات الكتلية مختلفة لأن الكتل إذا كانت متساوية فإن $\Delta m_{12}^2 = 0$ وهذا يعني أن احتمال الاهتزاز معدوم. يمكننا توضيح هذا الأمر كما يلي: نتحكم الكتل بالطور النسبي لدالتين موجبتين كتلويتين. إذا كانتا متشابهتين فإن حالات الكتلة سوف لن تخرج أبداً عن الطور أثناء الانتشار وسوف نقيس نفس التركيب الخطي لحالات الكتلة عند الكاشف كما ولدت في المصدر. نشير هنا أن تجارب تحديد اهتزاز النيوترينو يمكن لها أن تعطي معلومات مفصلة عن الفرق بين قيم الكتلة، ولكن لا يمكن أن تخبرنا ما هي الكتلة الدقيقة لهذه الحالات. ولا تستطيع أن تقول لنا هل الكتلة m_1 أكبر من الكتلة m_2 .

(3) - L/E : هذا الوسيط يتحكم به التجريبيون، L (المسافة بين المصدر والكاشف)، E هي طاقة النيوترينو. من أجل المعطاة فإن احتمال الاهتزاز سوف يتغير وفق العلاقة:

$$1.27 \Delta m_{12}^2 \frac{L}{E} = \frac{\pi}{2}$$

وبتعبير آخر نقول: حتى تكون تجربتنا حساسة لاحتمال الاهتزاز يجب أن يتحقق التالي.

$$\frac{L}{E} = \frac{\pi}{2.54 \Delta m_{12}^2}$$

عند ذلك نحن أمام خيارين إما لتغيير طاقة الحزمة، أو خط القاعدة، أو كليهما. ومن الناحية المثالية نحن نريد تكبير L وتقليل E . كل هذا يبدو سهلاً جداً، ولكن التطبيقات العملية تميل إلى التداخل والتعقيد.

الاستنتاجات والتوصيات:

نستج مما سبق ومن خلال الأشكال البيانية أعلاه أن الاهتزاز حقيقة واقعة وأن النيوتريينو يمتلك كتلة وأن اشتقاق احتمال الاهتزاز يعتمد على افتراضين هما: مزج نكهة النيوتريينو وحالات الكتلة .
أخيراً نوصي بتوسيع إطار النموذج المعياري ليضم إلى بنيته النيوتريينو الكتلي، ومن ثم إعادة النظر بنتيجة تجربة أوبرا والبحث عن حل للمعضلة المتمثلة في أن النيوتريينو ينتشر بسرعة أكبر من سرعة الضوء حسب ما جاءت به التجربة.

المراجع:

- [1] RAYMOND DAVIS, JR. *A HALF-CENTURY WITH SOLAR NEUTRINOS*, Nobel Lecture, December 8, 2002.
- [2] NAKAMURA, K. *Solar neutrinos review*. KEK, High Energy Accelerator Research Organization, Japan, December 2007, 19.
- [3] BALANTEKIN, A. B; HEEGER, K; RAMSEY-MUSOLF, J. M. *Solar fusion cross sections II: the pp chain and CNO cycles*. Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, WI 53706 USA, 2011, 245.
- [4] OREBI GANN, G. D. *Everything Under the Sun: A Review of Solar Neutrinos*. Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720, Department of Physics, University of California, Berkeley, CA 94720, USA, 10 Apr 2015, 9.
- [5] CLEVELAND, B. T. *MEASUREMENT OF THE SOLAR ELECTRON NEUTRINO FLUX WITH THE HOMESTAKE CHLORINE DETECTOR*. The Astrophysical journal, U.S.A, 496 (1998), 505-526.
- [6] ABDURAASHITO, J. N. *Measurement of the Solar Neutrino Capture Rate by the Russian-American Gallium Solar Neutrino Experiment During One Half of the 22-Year Cycle of Solar Activity*. SAGE Collaboration, J. Exp. Theor. Phys. 95 Moscow, Russia, (2002) 12.
- [7] BAHCLL, J. N ; PINSONNEAULT, M. H, Phys. Rev. (2004), 121301.
- [8] HAMPLE, W. *GALLEX Collaboration*, Phys. Lett. B 447 (1999), 127-133.
- [9] KATORI, T. *Short Baseline Neutrino Oscillation Experiments*, Queen Mary University of London, London E1 4NS, UK, 5 Jan 2015, 8.
- [10] SAKAZAKI, T; SHIOTANI, M ; SUZUKI, M ; KINNISON, D ; ZAWODNY, M. J ; UGH, M ; K. A. Walke. *Sunset–sunrise difference in solar occultation ozone measurements (SAGE II, HALOE, and ACE–FTS) and its relationship to tidal vertical winds*, Received: 9 May 2014 – Published in Atoms, 8.
- [11] HAMPLE, W. *GALLEX Collaboration*, Phys. Lett. B 447 (1999), 127–133.
- [12] KIRSTEN, T. *presented at the Neutrino 2002 Conference*, Munich, Germany, May 2002.
- [13] AHMAD, Q. R. et al. *SNO Collaboration*, Phys. Rev. Lett. 89, (2002), 5.
- [14] FUKUDA, S. et al. *Super-Kamiokande Collaboration*. Phys. Lett. B 539 (2002) 179, HEP-EX/0205075, 179-187.
- [15] DVALI, G. R. ; SMIRNOV A. Y. Nucl. Phys. B 563 (1999), 63.
- [16] AHMAD, Q. R. et al. *SNO Collaboration*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002), 3.
- [17] ALIMONTI, G. et al. *Borexino Collaboration*, Astropart. Phys. 16 (2002), 205.
- [18] AHARMIM, B. et al. *SNO Collaboration* Phys, Rev. C 81 (2010), 4.

- [19] CHAUHAN, B. C ; PULIDO, J. *KamLAND, solar antineutrinos and the solar magnetic field* . Phys. Rev. D 66 (2002) 053006, and references therein, 15. Portugal , 5 May 2003, 14.
- [20] SHIOZAWA, M. for the Super-K Collaboration, presented at the Neutrino 2002 Conference, Munich, Germany, May 2002.
- [21] ALLISON, W. W. et al. *Soudan-2 Collaboration*, Phys. Lett. B 449 (1999), 137.144.
- [22] ATHANASSOPOULOS, C. et al. *LSND Collaboration*, Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 1774-1777.
- [23] APOLLONIO, M. et al. *CHOOZ Collaboration*, Phys. Lett. B. 466 (1999), 415.
- [24] YELLIN, S. J. *proceedings of Conference on Particle Physics and the Early Universe (COSMO 98)*, Monterey, CA, edited by D. Caldwell, AIP Conference Proceedings, Springer-Verlag, 1999, USA, Nov. 1998.
- [25] ARKANI-HAMED, N ; DEMOPOULOS, S ; DVALI, G. R. ; MARCH-RUSSELL, J. Phys. Rev. D 65 (2002) 024032, 5.
- [26] WENDELL, R. et al. *Super-Kamiokande Collaboration*, Phys. Rev. D 81 (2010), 092004.
- [27] AGUILAR, A. et al. *LSND Collaboration*, Phys. Rev. D 64 (2001) 112007.
- [28] ABE, K. et al. *T2K Collaboration*, Nucl. Instrum. Meth. A 659 (2011), 106–135.
- [29] DARCOS, M. *The neutrino velocity measurement by OPERA experiment*. IPHC, University de Strasbourg, CNRS/IN2P3 (on behalf of OPERA Collaboration, Kyoto .Japan , 2012, 24.
- [30] HOLLNAGEL, A. *The OPERA Experiment(Latest Results)*, Hamburg University Institute for Experimental Physics, DPG-Frühjahrstagung , Germany, 2015.
- [31] Bruno Pontecorvo, *neutrino physics*, arXiv:0910.1657v4 [physics.hist-ph] 5 Oct 2010.
- [32] DARREL SMITH, *Calculating the probability for neutrino oscillations*, Student lecture series for MiniBooNE, Embry-Riddle University, July 18, 2001.
- [33] DANIEL KRUPPKE , *On Theories of Neutrino Oscillations*, A Summary and Characterization of the Problematic Aspects, September 2007.
- [34] CARLO GIUNTI, *Theory and Phenomenology of Neutrino Mixing*, Heavy Quarks and Leptons, Munich, 19 October 2006.