مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (37) العدد (6) 2015
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (37) No. (6) 2015

دراسة متراجحة ماركوف –بيرنشتين التّكاملية في الفضاء L_P الموزّن لكثيرات الحدود الحقيقية

الدكتور محمد علي *
الدكتور سمير إحسان **
أحمد معروف ***

(تاريخ الإيداع 12 / 8 / 2015. قُبِل للنشر في 28 / 12 /2015)

ملخّص

قمنا في هذا البحث بدراسة متراجحة ماركوف –بيرنشتين التّكاملية لكثيرات الحدود الجبرية من الدّرجة $2m$ على الأكثر مع دالة الوزن $(1+\frac{1}{x^2})^{-n}$ في الفضاء L_P على $\mathbb{R}^*$،ثمّ تمّتدراسة متراجحة ماركوف – بيرنشتين لكثيرات الحدود المثلثية ،وبعد ذلك توصلنا إلى متراجحة ماركوف –بيرنشتين لكثيرات الحدود الجبرية من الدّرجة m مع دالة الوزن $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-n}$ على $]0,+\infty[$.

الكلمات المفتاحية : متراجحة نيكولسكي ، متراجحة ماركوف –بيرنشتين ، فضاء موزّن.

---

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
** مدرّس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

On Markov and Bernstein inequalities in weighted L_p for real polynomials

Dr. Mohammad Ali*
Dr. SamerAhsan**
Ahmad Marouf***

(Received 12 / 8 / 2015. Accepted 28 / 12 /2015)

□ ABSTRACT □

In this research , we studied Markov -Bernstein inequalities for polynomials of degree at most$2m$ with weight function $(1+\frac{1}{x^2})^{-n}$ in L_p space on $\mathbb{R}^*$,then we studied Markov -Bernstein inequalities for trigonometric polynomials .After that, we obtained the Markov –Bernstein inequalities for algebraicpolynomials of degree m with weight function$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-n}$ on $]0,+\infty[$.

.

Keywords: Nikolskiiineguality , Markov and Bernstein inequality ,Weighted space.

*Professor , Department of mathematics ,Faculty of Sciences ,Tishreen University ,Lattakia ,Syria.
**Assistant Prof , Department of mathematics ,Faculty of Sciences ,Tishreen University, Lattakia, Syria.
***Postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة :

يندرج موضوع هذا البحث ضمن دراسة المتراجحات التّكاملية في الفضاءات المنظّمة التي تنقسم على نحو عام إلى قسمين رئيسين هما :

1 متراجحة نيكولسكي التي تعطي العلاقة بين نظيم الدّالة في L_p ونظيم الدّالة نفسها في L_q وهي: $\|f\|_{L_p} \le C\|f\|_{L_q}$.

2 متراجحة ماركوف –بيرنشتين التي تعطي العلاقة بين نظيم الدّالة ونظيم مشتقها من المرتبة n في نفس الفضاء .

فإذا كان A فضاءً منظماً ما كانت متراجحة ماركوف –بيرنشتين تملك الشّكل الآتي :

$\left\|f^{(n)}\right\|_A \le C\|f\|_A$.

- تركزت الدّراسة في هذا البحث على المتراجحات التّكاملية لكثيرات الحدود الحقيقية (الجبرية والمثلثية) مع وزن جبري ومثلثي ، وبشكل محدد تمّ الوصول إلى متراجحة من نوع ماركوف –بيرنشتين لكثيرات الحدود المثلثية $T_m(\theta)$ في الفضاء $L_p[-\pi,+\pi]$ الموزّن وذلك باستخدام دالة الوزن $w(\theta) = sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ ، و تمّ استخدام هذه المتراجحة للوصول إلى متراجحة ماركوف –بيرنشتين لكثيرات الحدود الجبرية $p(x)$ في الفضاء L_p الموزّن على كامل المحور الحقيقي باستثناء الصّفر، ثم تمّ إيجاد متراجحة ماركوف –بيرنشتين من أجل الدّالة $\mu(t) = p_m(t).\sqrt{t}$ في الفضاء L_p الموزّن على النّصف الموجب للمحور الحقيقي .

وفي النّهاية حصلنا على متراجحة ماركوف –بيرنشتين في الفضاء L_p الموزّن من أجل الدّالة $p_m(t)$ على النّصف الموجب للمحور الحقيقي.

أهمّية البحث و أهدافه:

إنّ أهمّية هذا البحث تكمن في استخدام نتائجه في العديد من مسائل التّحليل الرّياضي ، ولاسيّما في مسائل نظرية التّقريب ، أما هدف هذا البحث ، فهو الوصول إلى متراجحة تكاملية من نوع ماركوف –بيرنشتين في الفضاء L_p الموزّن في الحالات الآتية :

1. من أجل كثيرات الحدود المثلثية الحقيقية من الدّرجة m مع دالة الوزن $w(\theta) = sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ ، حيث أنّ r عدداً صحيحاً موجباً تماماً.
2. من أجل كثيرات الحدود الجبرية الحقيقية $p(x)$ من الدّرجة $2m$ على الأكثر على كامل المحور الحقيقي باستثناء الصفر مع دالة الوزن $w(x) = (1+\frac{1}{x^2})^{-n}$.
3. من أجل الدّالة $\mu(t) = p_m(t).\sqrt{t}$ على النّصف الموجب للمحور الحقيقي مع دالة الوزن $w(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-n}$.
4. من أجل كثيرات الحدود الجبرية الحقيقية $p(t)$ من الدرجة m على النّصف الموجب للمحور الحقيقي مع دالة الوزن $w(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-n}$.

طرائق البحث وموادّه :

إنّ هذا البحث يقع ضمن اختصاص التّحليل الرّياضي وبشكل خاص ضمن نظرية الدّوال وهو يملك صبغة نظرية تستخدم فيها

الطّرائق الرّياضية المناسبة للوصول إلى المتراجحة المطلوبة في الحالات المذكورة أعلاه .

النتائج والمناقشة :

تعريف (1):[1] الفضاء $L_p[a,b]$ هو فضاء كل الدّوال القابلة للقياس على المجال $[a,b]$ والتي تحقق الشّرط :

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

أما النّظيم في هذا الفضاء فهو : $\|f\|_p = \left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ حيث $p < \infty$.

تعريف(2):[1] لتكن w دالةمختلفة عن الصفر وقابلة للقياس على $I = [a,b]$، سوف نرمز بـ $L_p(I,w)$ لفضاء الدّوال f المعرّفة على $[a,b]$ التي من أجلها يكون :

$\int_a^b |f.w|^p\, dx < \infty$.

أما النّظيم في هذا الفضاء فهو: $\|f\|_{p,w} = \left\{\int_a^b |f.w|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$: $p < \infty$

بكلام آخر نقول : إن $f \in L_p(I,w)$ إذا كان $f.w \in L_p(I)$.

تعريف (3):[2] الفضاء $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{m})}$ هو فضاء كثيرات الحدود المثلثية من الدّرجة m، ونعرّف الفضاء $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{m,n})}$ بأنّه فضاء كثيرات الحدود المثلثية الموزّن الذي يتكون من عناصر الفضاء $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{m})}$ مع دالة الوزن $w(\theta) = sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ حيث $n = r + m$

أي أنّ كلّ عنصر $T_{m,n}$ من عناصر الفضاء $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{m,n})}$ معرّف بالصّيغة :

$T_m(\theta) \in \boldsymbol{T}_{(\mathbf{m})}$; $sin^{2r}\frac{\theta}{2}T_{m,n}(\theta) = T_m(\theta)$.

علماً أنّ النّظيم في الفضاء $\boldsymbol{T}_{(\mathbf{m,n})}$ هو : $\| T_{m,n}(\theta) \|_p = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |T_{m,n}(\theta)|^p\right)^{1/p}$

تعريف (4): [2] الفضاء $\boldsymbol{Q}_{m,n}$ هو فضاء موزّن لكثيرات الحدود الجبرية من الدّرجة $2m$ على الأكثر، وذلك على المجال $]-\infty,+\infty[$ من دون الصّفر مع دالة الوزن $(1+\frac{1}{x^2})^{-n}$.

إنّ كلّ عنصر من عناصر الفضاء $\boldsymbol{Q}_{m,n}$ هو من الشّكل : $f(x) = Q_m(x).(1+\frac{1}{x^2})^{-r}$

حيث إنّ $Q_m(x) = \frac{p(x)}{(1+x^2)^m}$ و، $p(x)$ كثيرة حدود جبرية من الدرجة $2m$ على الأكثر .

وبالتّالي فإنّ $f(x)$ يكتب بالشّكل : $f(x) = \frac{p(x)}{(1+\frac{1}{x^2})^m}.(1+\frac{1}{x^2})^{-r}$

$$= p(x).(1+\frac{1}{x^2})^{-r}.(1+\frac{1}{x^2})^{-m}$$

$$= p(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r-m} = p(x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-n}$$

ملاحظة (1): [3][2] إنّ عناصر الفضاء $Q_{m,n}$ تستخدم في تقريب الدّوال على المحور الحقيقي .

تعريف(5) :[2] الفضاء $R_{m,n}$ هو فضاء موزّن لكثيرات الحدود الجبرية من الدّرجة m على الأكثر ، وذلك على المجال

$]0,+\infty[$ مع تابع الوزن $(1+\frac{1}{t})^{-n}$ ، والذي يعتبر فضاءً جزئياً من $Q_{m,n}$.

إنّ كلّ عنصر g من $R_{m,n}$ هو من الشكل : $g(t)=R_m(t).(1+\frac{1}{t})^{-r}$

حيث إنّ $R_m(t)=\frac{p(t)}{(1+\frac{1}{t})^m}$، و $p(t)$ كثيرة حدود من الدرجة m على الأكثر .

وبالتّاليفإنّ $g(t)$ يكتب بالشّكل : $g(t)=\frac{p(t)}{(1+\frac{1}{t})^m}.(1+\frac{1}{t})^{-r}$

$$=p(t)\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r-m}=p(t)\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-n}$$

ملاحظة (2):[3][2] إنّ التّحويل $\frac{1}{x}\leftrightarrow \cot\frac{\theta}{2}$ يمكننا من مقابلة عناصر الفضاء ين $T_{(m,n)}$ و $Q_{m,n}$

أي أنّ: $Q_m(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}=T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}$.

ملاحظة (3) : [2] [3] إنّ التّحويل $t\leftrightarrow x^2 : x>0$ يمكننا من مقابلة عناصر الفضاء ين $Q_{m,n}$ و $R_{m,n}$

أي أنّ $R_m(t).(1+\frac{1}{t})^{-r}=Q_m(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}$.

- إنّ المبرهنة الآتية تعطينا متراجحة ماركوف – بيرنشتين في الفضاء $T_{(m,n)}$.

مبرهنة (1):

لتكن T_m كثيرة حدود مثلثية من الدرجة m على الأكثر ، و r عدداً صحيحاً موجباً تماماً ، و k ثابتاً موجباً ، و $1<p<+\infty$ عندئذ يكون :

$$\| T_m'(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\| \le \left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\ \| T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\| \qquad (1-1)$$

البرهان :

إنّ $T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ كثيرة حدود مثلية من الدّرجة $n=m+r$ على الأكثر ،ولدينا متراجحة ماركوف ـ بيرنشتين من أجل أيّ كثيرة حدود مثلثية من الدرجة n على الأكثر هي :

$$\| T_n'\| \le n\ \| T_n\| \qquad (1-2)$$

من اجل كثيرة الحدود المثلثية $T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}$ وبتطبيق المتراجحة $(1-2)$ يكون لدينا :

$$\| \left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)'\| \le (m+r)\ \| T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\| \qquad (1-3)$$

فإنّ : $\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)'=T_m'(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}+T_m(\theta).(sin^{2r}\frac{\theta}{2})'$

$$.sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.T_m(\theta)r + T_m'(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2} =$$

وعليه ؛ $T_m'(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2} = \left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)' - r.T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$

ولذلك

$$\| T_m'(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2} \| \le \| \left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)' \| + r \| T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} \| \qquad (1-4)$$

إنّ العنصر الأوّل في الطّرف الأيمن من العلاقة $(1-4)$ يمكن تقديره استناداً إلى العلاقة $(1-3)$ ، أما العنصر الثّاني في نفس الطّرف

فيمكن تقديره استناداً إلى متراجحة هاردي ، ومنه :

$$\int_0^{\pi} \left|T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta \le \int_0^{\pi} \left|\frac{T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta$$

$$\le \int_0^{\pi} \left|\frac{T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}}{\theta-\pi}.\left(\frac{\theta-\pi}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta$$

$$\le \left\|\left(\frac{\theta-\pi}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).\cos\frac{\theta}{2}\right\|_{\infty}^p . \int_0^{\pi} \left|\frac{T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}}{\theta-\pi}\right|^p d\theta$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left\|\left(\frac{\theta-\pi}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).\cos\frac{\theta}{2}\right\|_{\infty}^p \int_0^{\pi} \left|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)'\right|^p d\theta$$

من أجل $0 < □ < □$ فإنّ:

$$\left\|\left(\frac{\theta-\pi}{\sin\frac{\theta}{2}}\right).\cos\frac{\theta}{2}\right\|_{\infty}^p \le k^p(\theta)$$

ومنه نجد إنّ :

$$\int_0^{\pi} \left|T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta$$

$$\le k^p(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)^p . \int_0^{\pi} \left|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)'\right|^p d\theta \qquad (1-5)$$

ومن جهة أخرى فإنّ:

$$\int_{-\pi}^{0}\left|T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta \le k^p(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{-\pi}^{0}\left|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)^{\prime}\right|^p d\theta \quad (1-6)$$

بجمع المتراجحتين $(1-5)$ و $(1-6)$ طرفا لطرف نجد أنّ :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right|^p d\theta \le k^p(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)^{\prime}\right|^p d\theta \quad (1-7)$$

بأخذ الجذر من المرتبة p لطرفي المتراجحة $(1-7)$ نجد أنّ :

$$\left\|T_m(\theta).sin^{2r-1}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right\| \le k(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)\left\|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)^{\prime}\right\| \quad (1-8)$$

من المتراجحة $(1-4)$، وبالإستفادة من المتراجحة $(1-8)$ نجد أنّ :

$$\left\|T_m^{\prime}(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\| \le \left\|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)^{\prime}\right\| + r.k(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)\left\|\left(T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right)^{\prime}\right\| \quad (1-9)$$

من المتراجحتين $(1-9)$ و $(1-3)$ يكون لدينا :

$$\left\|T_m^{\prime}(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\| \le (m+r)\left\|T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\| + r.k(\theta).\left(\frac{p}{p-1}\right)(m+r)\left\|T_m(\theta).sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\|$$

وهي المتراجحة (1−1) *المطلوبة* .

مبرهنة (2):

إذا كان $Q_m(x)$ تابعاًكسرياًيملك الشّكل :

$$Q_m(x) = \frac{p(x)}{(1+\frac{1}{x^2})^m}$$

حيث $p(x)$ كثيرة حدود جبرية من الدّرجة $2m$ على الأكثر ، و r عدداً صحيحاًموجباً تماماً ، و k ثابتاً موجباً،و $1 < p < +\infty$ عندئذٍ :

− 7 −

$$\left\|Q_m^{\prime}(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\| \le 2\left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|Q_m(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\| \quad (2-1)$$

البرهان :

إنّ أيّ عنصر من $\boldsymbol{Q_{m,n}}$ يمكن كتابته بالصّيغة :

$$Q_m(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}$$

ومن ثمّ عبر التّحويل $\cot\frac{\theta}{2} \leftrightarrow \frac{1}{x}$ يمكن أن نكتب :

$$Q_m(x) = T_m(\theta)$$

حيث إنّ $T_m(\theta)$ كثيرة حدود مثلثية من الدرجة $2m$ على الأكثر .

بماأنّ

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{x^2} = 2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-1}.\frac{1}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-2)$$

فإنّ

$$\frac{dQ_m(x)}{dx} = \frac{dT_m(\theta)}{d\theta}.\frac{d\theta}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-3)$$

أي

$$Q_m'(x).(1+x^2) = 2.T_m'(\theta)$$

$$Q_m'(x).(1+x^2).\sin^{2r}\frac{\theta}{2} = 2.T_m'(\theta).\sin^{2r}\frac{\theta}{2}$$

$$Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.T_m'(\theta).\sin^{2r}\frac{\theta}{2}$$

ومنه

$$\left\|Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\| \leq 2\left\|T_m'(\theta).\sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\| \ldots\ldots\ldots\ldots (2-4)$$

من المتراجحتين $(2-4)$ و $(1-1)$ يكون لدينا :

$$\left\|Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\| \leq 2\left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|T_m(\theta).\sin^{2r}\frac{\theta}{2}\right\|$$
$$= 2\left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|Q_m(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\|$$

وهي المتراجحة $(2-1)$ المطلوبة .

مبرهنة (3) :

إذا كان $\boldsymbol{R_m(t)}$ تابعاً كسرياً يملك الشّكل:

$$\boldsymbol{R_m(t)} = \frac{p(t)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^m}$$

حيث $p(t)$ كثيرة حدود جبرية من الدرجة m على الأكثر ، و r عدداً صحيحاً موجباً تماماً ، و k ثابتاً موجباً،و $1 < p < +\infty$ عندئذٍ :

$$\left\|\sqrt{t}.R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| \leq \left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|R_m(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| \qquad (3-1)$$

البرهان :

إنّ التّحويل $t \leftrightarrow x^2$ ، و $x > 0$ يمكننا أن نكتب :

$$\frac{dt}{dx} = 2x = 2\sqrt{t}(3-2)$$

$$\mathrm{R_m(t)} = \frac{p(t)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^m} = Q_m(x) \qquad (3-3)$$

وعندئذٍ

$$\frac{dR_m(t)}{dt} = \frac{dQ_m(x)}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

ومنه

$$2\sqrt{t}.R_m'(t) = Q_m'(x)$$

$$2\sqrt{t}.R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r} = Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}$$

$$2\sqrt{t}.R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r} = Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r} \qquad (3-4)$$

بتطبيق المتراجحة $(1-2)$على العلاقة $(3-4)$ يكون لدينا :

$$\left\|2\sqrt{t}.R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| = 2\left\|\sqrt{t}.R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\|$$
$$= \left\|Q_m'(x).\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\|$$
$$\leq 2\left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|\boldsymbol{Q_m(x)}.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-r}\right\|$$
$$= 2\left(1+\frac{k(\theta).p.r}{p-1}\right)(m+r)\left\|R_m(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\|$$

وهي المتراجحة $(3-1)$ *المطلوبة* .

مبرهنة (4) :

إذا كان $\boldsymbol{R_m(t)}$ تابعاً كسرياً يملك الشّكل:

$$\boldsymbol{R_m(t)} = \frac{p(t)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^m}$$

حيث $p(t)$كثيرة حدود جبرية من الدّرجة m على الأكثر ، و r عدداً صحيحاًيحقّق $r \geq -1$،

و k ثابتاً موجباً،و $1 < p < +\infty$عندئذٍ :

$$\left\|R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| \leq \left(1 + \frac{k(\theta).p.(r+1)}{p-1}\right)\left(\frac{8p}{p-1}\right)(m+r+1)^2\left\|R_m(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r-1}\right\| \quad (4-1)$$

البرهان :

من أجل $t > 0$ و $x > 0$ و $\theta > 0$ فإنّ :

$$\frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{x} = \cot\frac{\theta}{2}$$

ومنه

$$\frac{-1}{2}t^{-3/2}dt = \frac{-1}{2sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = sin^2\frac{\theta}{2}.t^{-3/2}$$

إنّ

$$\mathrm{R_m(t)} = T_m(\theta) \quad (4-2)$$

ومنه

$$\frac{d\mathrm{R_m(t)}}{dt} = \frac{dT_m(\theta)}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$R_m'(t) = T_m'(\theta).sin^2\frac{\theta}{2}.\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^3$$

ومنه

$$R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r} = T_m'(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}.\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^3$$

وعليه ؛

$$\left\|R_m'(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| = \left\|T_m'(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}.\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^3\right\| \quad (4-3)$$

سنقدّر الطرف الأيمن في العلاقة $(4-3)$ ،فمن أجل $0 < |\theta| < |\pi|$ ، فإنّ $\left|\frac{\theta}{2}\right| < \left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$

وبتطبيق متراجحة هاردي يكون لدينا :

$$\left\|T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}.\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{3}\right\| \leq \left\|\frac{8}{\theta^{3}}.\left(T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right)\right\|$$

$$\leq \left(\frac{8p}{p-1}\right)\left\|\left(T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right)^{'}\right\|$$

بالعودة إلى المتراجحة $(1-3)$ في المبرهنة (1) نجد أنّ :

$$\left\|\left(T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right)^{'}\right\| \leq (m+r+1)\left\|T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right\| \quad (4-4)$$

ومنه فإن

$$\left\|R_m^{'}(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| \leq \left(\frac{8p}{p-1}\right)(m+r+1)\left\|T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right\| \qquad (4-5)$$

من المتراجحة $(1-1)$ في المبرهنة (1) نجد أنّ:

$$\left\|T_m^{'}(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right\| \leq \left(1+\frac{k(\theta).p.(r+1)}{p-1}\right)(m+r+1)\left\|T_m(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right\| \qquad (4-6)$$

بدمج المتراجحتين $(4-5)$ و $(4-6)$ يكون لدينا

$$\left\|R_m^{'}(t).\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-r}\right\| \leq \left(1+\frac{k(\theta).p.(r+1)}{p-1}\right)\left(\frac{8p}{p-1}\right)(m+r+1)^{2}\left\|T_m(\theta).sin^{2r+2}\frac{\theta}{2}\right\| \quad (4-7)$$

بتطبيق العلاقة $(4-2)$ على المتراجحة $(4-7)$ نحصل على المتراجحة $(4-1)$ المطلوبة .

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذا البحث إلى مجموعة من متراجحات ماركوف – بيرنشتين في الفضاء L_p الموزّن من أجل كثيرات الحدود الجبرية والمثلثية ، ونوصي أن تتم هذه الدّراسة على فضاءات موزّنة أخرى مثل فضاء أورليتش .

المراجع:

[1]-GUVEN,A; ISRAFILOV,D-M . *Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces.*
J.Korean Math soc,45,No6,2008,pp.1535-1548

[2]- T.Kilgore,*Interpolation properties of polynomials of degree at most* $2n$ *weighted by* $(1+x^{2})^{-n}$ *,East J.Approx.7(2001),no.1,9-25.*

[3]- T.Kilgore,*Markov and Bernstein inequalities in* L_p *for some weighted algebraic and trigonometric polynomails ,Journal of Inequalities and Application .4(2005),413-421.*