مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

وجود ووحدانية حل قوي للمعادلة الموجية شبه الخطية مع شرط التبدد الحدي اللاخطي

الدكتور وديع علي*

(تاريخ الإيداع 27 / 12 / 2015. قُبِل للنشر في 6 / 3 /2016)

□ ملخّص □

نهدف في هذا البحث إلى إثبات وجود ووحدانية حل قوي لمسألة القيم الحدية الابتدائية للمعادلة الموجية شبه الخطية مع شرط التبدد الحدي اللاخطي، بتحويلها إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية مؤثرية من المرتبة الثانية في فضاء هلبرت، وذلك باستخدام صيغة غرين لثلاثية من فضاءات هلبرت.

الكلمات المفتاحية: معادلة الموجة – التبدد الحدي اللاخطي – صيغة غرين – مسألة كوشي الحل القوي – فضاء هلبرت.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات بكلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

Existence And Uniqueness Of Strong Solution For A Semi-Linear Wave Equation With Nonlinear Boundary Dissipation

Dr. Wadiaa Ali*

(Received 27 / 12 / 2015. Accepted 6 / 3 /2016)

☐ ABSTRACT ☐

We aim in this research to study the existence and uniqueness of strong solution for initial-boundary values problem for a semi-linear wave equation with the nonlinear boundary dissipation, by transforming it to a Cauchy problem with second order operator differential equations in Hilbert space. Therefore, we transform it, using Green's formula for a triple of Hilbert spaces.

Keywords: wave equation – boundary dissipation – Green's formula – Cauchy problem – strong solution – Hilbert space.

***Associate Professor ,Department of Mathematic ,Faculty of Sciences ,Tishreen University Lattakia, Syria.**

مقدمة:

اهتم العديد من الباحثين في النصف الثاني من القرن العشرين بدراسة المسائل الهيدروديناميكية، باستخدام طرائق التحليل الدالي وبشكل خاص طرائق المؤثرات وصيغة غرين لثلاثية من فضاءات هلبرت.

ندرس في هذا البحث وجود ووحدانية حل قوي لمسألة قيمة حدية- ابتدائية ، ذات معادلة موجية شبه خطية لمجموعة من السوائل مع شرط تبدد حدي لاخطي، استناداً إلى النتائج الواردة في [1],[2] ، حيث قمنا بتحويل مسألة القيمة الحدية – الابتدائية إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وذلك باستخدام صيغة غرين لثلاثية من فضاءات هلبرت وتطبيقاتها على مسائل ستوكس الحدية، ومن ثم تحويل مسألة كوشي الأخيرة إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى وذلك باستخدام طرائق التحليل الدالي ونظرية المؤثرات ونظرية المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة وجود و وحدانية حل قوي لمسألة القيمة الحدية – الابتدائية ذات المعادلة الموجية شبه الخطية، وذلك باستخدام طرائق التحليل الدالي ونظرية المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت.

تكمن أهمية البحث في تطبيقاته العملية إذ يعطي الإجابة عن وجود الحل القوي ووحدانيته للمسائل الرياضية التي تنتج عن أعمال الباحثين الفيزيائيين والهندسيين.

طرائق البحث و مواده:

ندرس في هذا البحث مسألة القيم الحدية- الابتدائية من أجل معادلة موجية شبه خطية ذات شرط حدي متبدد [1] وذلك باستخدام طرائق التحليل الدالي ونظرية المؤثرات ونظرية المعادلات التفاضلية في فضاء هلبرت .[6, 5, 4, 3]

النتائج والمناقشة:

1.النموذج الرياضي للمسألة المطروحة:

بفرض أنّ $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ منطقة ذات محيط ليبشتز ولنضع $\Gamma := \partial\Omega$ كما في [2]. لنأخذ مسألة القيم الحدية الابتدائية الآتية ذات معادلة التدفق [1] :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^k}{\partial t^2} - \Delta \vec{u}^k = f(t,x), \qquad x \in \Omega_k, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^k}{\partial n} + \vec{u}^k + \alpha \frac{\partial \vec{u}^k}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma_k, \alpha > 0, \tag{2}$$

$$\vec{u}^k(0,x) = u_k^0(x), \quad \frac{\partial \vec{u}^k}{\partial t}(0,x) = u_k^1(x), \quad x \in \Omega_k \tag{3}$$

والمطلوب: تحديد الدالة $\hat{u}(t,x) := \left\{\vec{u}^k\right\}_{k=1}^m$ ، حيث أنّ $f(t,x), u_k^0(x), u_k^1(x)$ دوال معلومة، ولنرمز بـــــــــ $\partial/\partial n$ للمشتق المتجهي بالنسبة للناظم $\vec{n}$ على سطح المنطقة Ω.

تعريف(1): [1] تدعى مجموعة الدوال القيوسة لوبيغياً $\hat{u} := \left\{\vec{u}^k\right\}_{k=1}^m$ التي تحقق العلاقة:

$$\sum_{k=1}^m \rho_k \int_{\Omega_k} \left|\vec{u}^k\right|^2 d\Omega_k < \infty$$

بفضاء هلبرت $\hat{L}_2(\Omega)$، حيث يعرّف الجداء الداخلي فيه بالعلاقة الآتية:

$$\left(\hat{u},\hat{v}\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m}\rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}^k.\vec{v}^k d\Omega_k$$

تعريف(2): $[1]$ يقال عن المؤثر A، ذي الساحة الكثيفة في فضاء هلبرت E، إنّه متبدد إذا تحققت المتراجحة الآتية:

$$\mathrm{Re}\left(Ax,x\right)\le 0 \quad ; x\in D\left(A\right)$$

ويقال إنّه متبدد أعظمياً (Maximal dissipative) إذا كان متبدداً ولا يوجد له ممدداً متبدداً، ويلزم ويكفي لذلك أن يكون A مغلقاً، وأن تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\mathrm{Re}\left(A^*x,x\right)\le 0 \quad ; x\in D\left(A^*\right).$$

مبرهنة(1): $[7]$ إن لمسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=A\vec{u}+\vec{f}\left(t\right),\ \vec{u}\left(0\right)=\vec{u}^0\ ,\ t\ge 0,$$

حلاً قوياً $\vec{u}\left(t\right)$ على المجال $[0,T]$، ويأخذ قيمه في الفضاء E إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) يولّد المؤثر A نصف زمرة ضاغطة *(Contractive Semigroup)*.

2) $\vec{u}^0\in D\left(A\right),\ f\left(t\right)\in C^1\left([0,T];E\right)$.

صيغة غرين لثلاثية من فضاءات هلبرت: $[2]$

نعرض فيما يلي صيغة غرين لثلاثية من فضاءات هلبرت وتطبيقاتها على بعض مسائل القيم− الحدية.

مبرهنة (2): $[2]$

إذا كان E و F و G ثلاثة فضاءات هلبرت وكان:

- الفضاء F محتوىً بكثافة في الفضاء E.
- المؤثر $\gamma:F\to G$ محدود، حيث إن $R\left(\gamma\right)=:G_+\subset G$، وتتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|\varphi\|_G\le b\|\varphi\|_{G_+} \quad ; \forall\varphi\in G_+ \tag{4}$$

عندئذٍ يوجد المؤثران $L:D\left(L\right)=F\to F^*$ و $\partial:F\to G_-=\left(G_+\right)^*$ بحيث تتحقق صيغة غرين الآتية:

$$\left\langle\vec{\eta},L\vec{u}\right\rangle_E=\left(\vec{\eta},\vec{u}\right)_F-\left\langle\gamma\vec{\eta},\partial\vec{u}\right\rangle_G\ ;\ \forall\vec{\eta},\vec{u}\in F \tag{5}$$

مبرهنة (3): $[3]$

تتحقق صيغة غرين الآتية:

$$\left\langle\eta,-\Delta u\right\rangle_\Omega=\left(\eta,u\right)_{1,\Omega}-\left\langle\gamma\eta,\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma u\right\rangle_\Gamma,\quad \forall\eta,u\in H^1\left(\Omega\right). \tag{6}$$

حيث $L_2(\Omega), H^1(\Omega), L_2(\Gamma)$ ثلاثية فضاءات لهلبرت، و $\gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ مؤثر الأثر المُعرّف بالشكل الآتي: $\gamma u := u|_\Gamma$ حيث $u \in H^1(\Omega)$.

تعريف (3): تُعطى دالة الجداء الداخلي في الفضاء $H^1(\Omega)$ بالشكل الآتي:

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_\Omega \nabla u . \overline{\nabla v} \, d\Omega + \int_\Omega u . \bar{v} \, d\Gamma .$$

تعريف (4): $[1]$ يقال عن العنصر $v \in F$ إنه حل لمسألة نيومان الحدية ذات معادلة بواسون:

$$Lu = f \ (in\,E) \ , \quad \partial v = \mathbf{0} \ (in\,G) \qquad (7)$$

إذا تحققت المتطابقة الآتية:

$$(\eta, v)_F = (\eta, f)_E \ ; \ \forall \eta \in F \qquad (8)$$

تعريف (5): $[1]$ يقال عن العنصر $\omega \in F$ إنه حل لمسألة نيومان الحدية الآتية ذات معادلة لابلاس:

$$L\omega = \mathbf{0} \ (in\,E) \ , \quad \partial\omega = \psi \ (in\,G) \qquad (9)$$

إذا تحققت المتطابقة الآتية:

$$(\eta, \omega)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G \quad \forall \eta \in F \qquad (10)$$

مبرهنة (4): $[1]$

يوجد لمسألة نيومان الحدية الآتية:

$$L\vec{u} = \vec{f} \ , \quad \partial\vec{u} = \vec{\psi} \qquad (11)$$

حلاً ضعيفاً $\vec{u} \in F$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$$\vec{f} \in F^* \ , \quad \vec{\psi} \in (G_+)^* \qquad (12)$$

$$\vec{u} = A^{-1}\vec{f} + T_M \ \vec{\psi} \qquad (13)$$

نتيجة:

ينتج من العلاقة (13) أنّ حل مسألة نيومان (11) يكتب بالشكل:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \qquad (14)$$

حيث إن $\vec{v} = A^{-1} f$ حل ضعيف للمسألة (7)، بينما $\vec{\omega} = T_M \ \psi$ حل ضعيف للمسألة (9) .

2. **الانتقال إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية- مؤثرية من المرتبة الثانية في فضاءات هلبرت[8-10]:**

لتكن $E = \hat{L}_2(\Omega)$, $F = \hat{H}^1(\Omega)$, $G = \hat{L}_2(\Gamma), G_+ = \hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)$ ، ثلاثة فضاءات هلبرت ، و المؤثر $\gamma : \hat{H}^1(\Omega) \to \hat{L}_2(\Gamma)$ وتتحقق شروط المبرهنة (1)، عندئذٍ يوجد مؤثران:

$$L : \hat{H}^1(\Omega) \to \left(\hat{H}^1(\Omega)\right)^* , \ \partial : \hat{H}^1(\Omega) \to (G_+)^*$$

حيث إن:

$$L\hat{u} = -\Delta u , \ \partial\hat{u} = \frac{d\hat{u}}{dn} + \gamma\hat{u} \ . \qquad (15)$$

استناداً لذلك نستطيع كتابة مسألة القيمة الحدية – الابتدائية $(1)-(3)$ على النحو الآتي:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} - L\,\hat{u} = f\left(t,x\right), \quad \left(in\,\hat{L}_2(\Omega)\right), \tag{16}$$

$$\partial\,\hat{u} + \alpha\frac{d}{dt}\left(\gamma\,\hat{u}\right) = 0, \left(in\;\hat{L}_2(\Gamma)\right), \alpha > 0, \tag{17}$$

$$\hat{u}\left(0,x\right) = \hat{u}^0\left(x\right), \quad \hat{u}'\left(0\right) = u^1, \tag{18}$$

أو:

$$L\,\hat{u} = F; \qquad F = \frac{d^2\hat{u}}{dt^2} - f\left(t,x\right), \quad \left(in\,\hat{L}_2(\Omega)\right), \tag{19}$$

$$\partial\,\hat{u} = \psi\;; \qquad \psi = \alpha\frac{d}{dt}\left(\gamma\,\hat{u}\right), \left(in\;\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right), \alpha > 0, \tag{20}$$

$$\hat{u}\left(0,x\right) = \hat{u}^0\left(x\right), \quad \hat{u}'\left(0\right) = u^1, \tag{21}$$

ينتج من المبرهنة (3) أنّ :

$$\hat{u} = \hat{v} + \hat{\omega} = A^{-1}F + T_M\;\psi \qquad ;\partial = T^{-1}$$

وبالتالي تكتب المسألة $(\mathbf{19})-(\mathbf{20})$ بالشكل الآتي:

$$A^{-1}\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + \alpha T\,\frac{d}{dt}\left(\gamma\hat{u}\right) + \hat{u} = A^{-1}f\,\left(t\right)\;\left(in\;\hat{H}^1(\Omega)\right). \tag{22}$$

$$\hat{u}\left(0,x\right) = \hat{u}^0\left(x\right), \quad \hat{u}'\left(0\right) = u^1 \tag{23}$$

نجري التبديل الآتي:

$$\hat{u}\left(t\right) = A^{-1/2}\;\hat{\eta}\left(t\right)$$

ونؤثر بالمؤثر $A^{1/2}$ على طرفي المعادلة $(\mathbf{22})$، فنحصل على المعادلة الآتية:

$$A^{-1/2}\,\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\,\hat{\eta}\right) + \alpha\,Q^*\,\frac{d}{dt}\left(Q\,\hat{\eta}\right) + \hat{\eta} = A^{-1/2}f\left(t\right) \;\; \left(in\;\hat{L}_2\left(\Omega\right)\right). \tag{24}$$

حيث:

$$Q := \gamma A^{-1/2} : \hat{L}_2\left(\Omega\right) \to \hat{L}_{2,\Gamma}\left(\Gamma\right),\; Q^* := A^{1/2}\,T : \left(\hat{L}_{2,\Gamma}\left(\Gamma\right)\right)^* \to \hat{L}_2\left(\Omega\right) \tag{25}$$

والشروط الابتدائية:

$$\eta\left(\mathbf{0}\right) = A^{1/2}\;u^{\mathbf{0}}\;, \quad \eta'\left(\mathbf{0}\right) = A^{1/2}u^{\mathbf{1}} \tag{26}$$

3. الانتقال إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية- مؤثرية من المرتبة الأولى في فضاءات هلبرت:

نقوم الآن في هذا القسم بتحويل المسألة $(\mathbf{24}),(\mathbf{26})$ إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى حيث معاملاتها مؤثرات تولد شبه زمرة، والتي تسمح لنا بالبرهان على وجود و وحدانية حل قوي لها.

من أجل ذلك نعرّف الدالة $\hat{\zeta}\left(t\right)$ بالشكل الآتي:

$$-i\hat{\eta} = \frac{d\hat{\zeta}}{dt}\;, \quad \hat{\zeta}\left(\mathbf{0}\right) = \mathbf{0}. \tag{27}$$

نشتق طرفي المعادلة $(\mathbf{27})$ بالنسبة لـــ t ، فنحصل على:

$$\frac{d^2\,\hat{\zeta}}{dt^2} + i\,\frac{d\,\hat{\eta}}{dt} = \mathbf{0}\;, \quad \hat{\zeta}'\left(\mathbf{0}\right) = -i\hat{\eta}^{\mathbf{0}} \tag{28}$$

بالتالي يمكننا كتابة المعادلة $(\mathbf{23})$، مع الأخذ بعين الاعتبار المعادلتين $(\mathbf{27}),(\mathbf{28})$، باستخدام المصفوفات على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} f \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

مع الشروط الابتدائية الآتية:

$$\begin{pmatrix} \hat{\eta}(0) \\ \hat{\zeta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}\hat{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\eta}'(0) \\ \hat{\zeta}'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}\,\hat{u}^1 \\ -iA^{1/2}\,\hat{u}^0 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

أو بالشكل الآتي:

$$J^{-1/2}\frac{d}{dt}\left(J^{-1/2}y\right) + Ky = f_0(t)\,,\ y(0) = y^0 \qquad (31)$$

حيث:

$$y(t) := \begin{pmatrix} \dfrac{d\hat{\eta}}{dt} \\ \dfrac{d\hat{\zeta}}{dt} \end{pmatrix}, \quad f_0(t) := \begin{pmatrix} A^{-1/2} f \\ 0 \end{pmatrix}, \ J^{-1/2} := \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \ K := \begin{pmatrix} \alpha B & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$$

وبوضع:

$$z(t) := J^{-1/2}y(t)$$

ومن ثم نؤثر بالمؤثر $J^{1/2}$ من اليسار على طرفي المعادلة (31)، فنحصل على مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{dz}{dt} = -\,J^{1/2}KJ^{1/2}z + J^{1/2}f_0(t),\ z(0) = J^{1/2}y^0 := \left(\hat{u}^1;\ -\ iA^{1/2}\,\hat{u}^0\right)^t \qquad (32)$$

4. دراسة قابلية الحل لمسألة القيم الحدية – الابتدائية:

نقوم في هذا القسم بالبرهان على وجود و وحدانية حل قوي لمسألة القيمة الحدية – الابتدائية (1)-(3) انطلاقاً من البرهان على وجود ووحدانية حل قوي لمسألة كوشي (32).

تمهيدية (1): $[4]$

إنّ المؤثرين $Q := \gamma A^{-1/2} : \hat{L}_2(\Omega) \to \hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\,,\ Q^* := A^{1/2}\,T : \left(\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right)^* \to \hat{L}_2(\Omega)$

مترافقان و متراصان.

البرهان:

بما أنّ المؤثرين $A^{-1/2}$ و γمحدودان، فإنّ المؤثر Q محدود أيضاً.

من جهة ثانية، من أجل كل $\hat{\xi} \in \hat{H}^1(\Omega)\,,\ \hat{\eta} \in \hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)$ لدينا:

$$\left(Q^*\hat{\eta}, \hat{\xi}\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} = \left(A^{1/2}T\hat{\eta}, \hat{\xi}\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} = \left(T\hat{\eta}, A^{-1/2}\hat{\xi}\right)_{\hat{H}^1(\Omega)} = \left(\hat{\eta}, \hat{\gamma}A^{-1/2}\hat{\xi}\right)_{\hat{L}_{2,\Gamma}} = \left(\hat{\eta}, Q\hat{\xi}\right)_{\hat{L}_{2,\Gamma}}$$

ومنه يكون Q,Q^* مترافقين.

بما أنّ المؤثر $A^{-1/2}$ متراص وأن γ مؤثر محدود، عندئذٍ فإن المؤثر Q متراص، وبناءً عليه يكون المؤثر Q^* متراصاً، وذلك حسب خواص المؤثر المتراص. وبذلك يتم المطلوب.

مبرهنة (5): إذا تحققت الشروط الآتية:

$f(t) \in C^1\left([0,T], \hat{L}_2(\Omega)\right)$ (1)

$\hat{u}^1 \in D\left(A^{1/2}\right) = \hat{H}^1(\Omega)$ (2)

$\alpha T\gamma \hat{u}^1 + \hat{u}^0 \in D(A)$ (3)

فإنه يكون للمسألة (32) حلاً قوياً وحيداً $z(t)$ على المجال $[0,T]$.

البرهان:

بما أنّ $\alpha T\gamma \hat{u}^1 + \hat{u}^0 \in D(A)$ و $\hat{u}^1 \in D\left(A^{1/2}\right) = \hat{H}^1(\Omega)$، فإنّ $z(0) = \left(\hat{u}^1 ; - iA^{1/2}\hat{u}^0\right)^t$ ينتمي إلى $D\left(J^{1/2} K J^{1/2}\right)$.

من ناحية ثانية بما أنّ $f(t) \in C^1\left([0,T], \hat{L}_2(\Omega)\right)$، فإنّ $J^{1/2} f_0(t) = \left(f(t);0\right)^t \in \hat{L}_2(\Omega) \oplus \hat{L}_2(\Omega)$ أي أنّ الشرط الثاني من المبرهنة (1) قد تحقق.

بقي علينا أن نبرهن أنّ المؤثر $K_J := J^{1/2} K J^{1/2}$ يولد نصف زمرة ضاغطة.

استناداً إلى التمهيدية (1) يكون المؤثر $B = Q^*Q$ محدوداً، وبالتالي فإن K مؤثر محدود و قابل للعكس و مؤثره العكسي K^{-1} محدود أيضاً، حيث إن:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix}.$$

واستناداً لذلك، و بما أنّ المؤثر A^{-1} موجود ومحدود، فإنّ المؤثر J_K^{-1} موجود و محدود في الفضاء $\hat{L}_2(\Omega) \oplus \hat{L}_2(\Omega)$ ، حيث إن:

$$J_K^{-1} := J^{-1/2} K^{-1} J^{-1/2} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ -iI & \alpha B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

من جهة أخرى:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(J_K z, z\right)_{\hat{L}_2(\Omega)\oplus\hat{L}_2(\Omega)} &= \left(\alpha B\left(A^{1/2} z_1\right), \left(A^{1/2} z_1\right)\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} = \alpha\left(Q\left(A^{1/2} z_1\right), Q\left(A^{1/2} z_1\right)\right)_{\hat{L}_2(\Omega)} \\ &= \alpha \left\| Q A^{1/2} z_1 \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

وذلك من أجل كل $z = \left(z_1; z_2\right)^t \in D\left(J_K\right) = \hat{L}_2(\Omega) \oplus \hat{L}_2(\Omega)$ ، أي أنّ المؤثر J_K–متبدد أعظمي ويولد نصف زمرة من المؤثرات الضاغطة $U(t) := \exp\left(-tJ_K\right)$.

ينتج مما سبق أنّ شروط المبرهنة (1) محققة، وهذا يقتضي أنّ للمسألة (32) حلاً قوياً وحيداً $z(t)$ على المجال $[0,T]$.

تعريف(6):

يقال إنّ لمسألة كوشي $(24)-(26)$ حلاً قوياً وحيداً على المجال $[0,T]$ يأخذ قيمه في $D\left(A^{1/2}\right)=F$ إذا كان $\alpha Q^{*}\frac{d}{dt}\left(Q\hat{\eta}\right)+\hat{\eta}\in C\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right)$, $A^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-1/2}\hat{\eta}\right)\in C\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right)$ وأن تتحقق الشروط الابتدائية (26).

مبرهنة(6):

إذا تحققت الشروط (1)-(3) في المبرهنة (5) فإنه يكون للمسألة$(\mathbf{24}),(\mathbf{26})$ حلاً قوياً وحيداً على المجال $[0,T]$.

البرهان:

بما أنّ الشروط (1)-(3) في المبرهنة (5) محققة فإنّ للمسألة (32) حلاً قوياً وحيداً $z(t)$ على المجال$[0,T]$ وبالتالي جملة المعادلات:

$$\frac{dz_1}{dt}+A^{1/2}\left(\alpha BA^{1/2}z_1+iz_2\right)=f(t),\ \frac{dz_1}{dt}+iA^{1/2}z_1=0 \qquad (33)$$

وشروط القيمة الابتدائية الآتية:

$$z_1(0)=\hat{u}^1\ ,\ z_2(0)=-iA^{1/2}\hat{u}^0 \qquad (34)$$

محققة من أجل $z(t)=\left(z_1(t),z_2(t)\right)$ حيث إن $z_1(t)\in C\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right)\cap C^1\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$ و $z_2(t)\in C^1\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$ و $\alpha BA^{1/2}z_1(t)+iz_2(t)\in C\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$.

نحصل، بعد تبديل $z_1(t)=A^{-1/2}\frac{d\hat{\eta}}{dt},\ z_2(t)=\frac{d\hat{\zeta}}{dt}$ ، على جملة المعادلات الآتية:

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right)+A^{1/2}\left(\alpha B\frac{d\hat{\eta}}{dt}+i\frac{d\hat{\zeta}}{dt}\right)=f(t),\ \frac{d^2\hat{\zeta}}{dt^2}+iA^{1/2}\frac{d\hat{\eta}}{dt}=0 \qquad (35)$$

وشروط القيمة الابتدائية الآتية:

$$\hat{\eta}(0)=A^{1/2}\hat{u}^0,\ \hat{\zeta}(0)=0,\ \eta'(0)=A^{1/2}\hat{u}^1\ ,\ \hat{\zeta}'(0)=-iA^{1/2}\hat{u}^0 \qquad (36)$$

ونحصل، بعد الأخذ بالحسبان الشروط الابتدائية $\hat{\zeta}'(0)$, $\hat{\eta}(0)$ من المعادلة الثانية في الجملة (35) ، على المعادلة الآتية:

$$\frac{d\hat{\zeta}}{dt}+i\hat{\eta}(t)=0\ ,\quad \hat{\zeta}(t)\in C^2\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right),\ \hat{\eta}(t)\in C^1\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right) \qquad (37)$$

نبدل $\frac{d\hat{\zeta}}{dt}=-i\hat{\eta}(t)$ في المعادلة الأولى من الجملة (35) ، فنجد أن مسألة كوشي الآتية:

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-\frac{1}{2}}\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right)+A^{\frac{1}{2}}\left(\alpha B\frac{d\hat{\eta}}{dt}+\hat{\eta}\right)=f(t),\quad \hat{\eta}(0)=A^{\frac{1}{2}}\hat{u}^{0},\hat{\eta}'(0)=A^{\frac{1}{2}}\hat{u}^{1} \qquad (38)$$

تملك حلاً قوياً وحيداً $\hat{\eta}(t)$ على المجال $[0,T]$.

بتطبيق المؤثر $A^{-\frac{1}{2}}$ على طرفي المعادلة (38) ، نحصل على المعادلة الآتية:

$$A^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{-\frac{1}{2}}\hat{\eta}\right)+\alpha Q^{*}\frac{d}{dt}\left(Q\hat{\eta}\right)+\hat{\eta}=A^{-\frac{1}{2}}f(t) \qquad (39)$$

حيث:

$$\frac{d}{dt}\left(A^{-\frac{1}{2}}\frac{d\hat{\eta}}{dt}\right)\equiv A^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2\hat{\eta}}{dt^2}\ ,\ B\frac{d\hat{\eta}}{dt}=Q^{*}Q\frac{d\hat{\eta}}{dt}\equiv Q^{*}\frac{d}{dt}\left(Q\hat{\eta}\right)$$

وهذا يقتضي أنّ مسألة كوشي $(24),(26)$ تملك حلاً قوياً وحيداً على المجال $[0,T]$ ، وبذلك يتم المطلوب.

تعريف (7):

يقال عن الدالة $\hat{u}(t)$ إنها حلاً قوياً للمسألة $(16)-(18)$ على المجال $[0,T]$ إذا تحققت الشروط الآتية:

$$\hat{u}(t)\in C\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T];D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\right) \qquad (1)$$

(2) تحقق الدالة $\hat{u}(t)$ المعادلة (16) ، حيث إن كل حد في المعادلة (16) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$.

(3) تحقق الدالة $\hat{u}(t)$ المعادلة (17) ، حيث إن كل حد في المعادلة (17) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right)$.

(4) تحقق الشروط الابتدائية (18).

مبرهنة (7):

إذا تحققت الشروط 1-3 في المبرهنة (5) عندئذٍ يكون لمسألة القيمة الحدية– الابتدائية $(\mathbf{1})-(\mathbf{3})$ حلاً قوياً وحيداً على المجال $[0,T]$.

البرهان:

بما أنّ الشروط 1-3 في المبرهنة (5) محققة فإنّ مسألة كوشي $(\mathbf{24}),(\mathbf{26})$ تملك حلاً قوياً وحيداً $\hat{\eta}(t)$ على المجال $[0,T]$، عندئذٍ نحصل ، بعد تطبيق المؤثر $A^{-\frac{1}{2}}$ إلى طرفي المعادلة (39) وتبديل $\hat{u}(t)=A^{-\frac{1}{2}}\hat{\eta}(t)$ على المعادلة الآتية:

$$.\ A^{-1}\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}+\left(\alpha T\frac{d}{dt}\left(\gamma\hat{u}\right)+\hat{u}\right)=A^{-1}f(t) \qquad (40)$$

وشروط القيمة الابتدائية:

$$u(0)=u^{0}\ ,\ \ u'(0)=u^{1} \qquad (41)$$

ينتج من المبرهنة (6) أن جميع حدود المعادلة (40) تنتمي إلى $C\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right)$، وبالتالي فإنّ $\hat{\eta}(t)\in C^1\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$ من ناحية ثانية، بما أنّ $\hat{u}\in C^2\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$، $\hat{u}(t)=A^{-1/2}\,\hat{\eta}(t)\in C^1\left([0,T];\hat{H}^1(\Omega)\right)$، وهذا يقتضي أنّ:

$$\hat{u}(t)\in C\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right).$$

بقي علينا الآن أن نتحقق من تحقق الشرطين (2) و (3) في التعريف (7).

و من أجل ذلك، نعرّف الدالتين الآتيتين:

$$\hat{v}(t):=A^{-1}\left(f(t)-\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}\right),\ \hat{w}(t):=-\alpha T\frac{d}{dt}(\gamma\hat{u}) \tag{42}$$

وهذا يقتضي، ومن العلاقة (40)، أنّ:

$$\hat{u}(t)=\hat{v}(t)+\hat{w}(t) \tag{43}$$

و

$$\hat{v}(t)\in C\left([0,T];D(A)\right),\ \hat{w}(t)\in C\left([0,T];D\left(A^{1/2}\right)\right). \tag{44}$$

عندئذٍ نحصل من الدوال (42) على العلاقتين الآتيتين:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}+A\hat{v}=f(t),\quad \partial\hat{w}+\alpha\frac{d}{dt}(\gamma\hat{u})=0. \tag{45}$$

بما أنّ $\hat{u}(t)\in C^1\left([0,T];\hat{H}^1(\Omega)\right)$، فإنّ $\gamma\hat{u}(t)\in C^1\left([0,T];\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right)$، وبالتالي فإن $\frac{d}{dt}(\gamma\hat{u})\in C\left([0,T];\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right)$، أي أنّ كل حد في المعادلة الثانية من (45) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{L}_{2,\Gamma}(\Gamma)\right)$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أن كل حد في المعادلة الأولى من (45) ينتمي إلى $C\left([0,T];\hat{L}_2(\Omega)\right)$.

استناداً إلى ما سبق وإلى التعريف (7) يكون للمسألة $(16)-(18)$ حلاً قوياً $\hat{u}(t)$ على المجال $[0,T]$ ، وبما أنّ مسألة القيم الحدية – الابتدائية $(1)-(3)$ مكافئة لمسألة كوشي $(16)-(18)$، فإنه يكون لمسألة القيم الحدية – الابتدائية $(1)-(3)$حلاً قوياً وحيداً على المجال $[0,T]$ ، وبذلك يتم المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

إنّ أهم ما توصلنا إليه من نتائج هو:

1. تحويل مسألة القيم الحدية – الابتدائية الموافقة للنموذج الرياضي$(1)-(3)$ إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومن ثم تحويلها إلى مسألة كوشي ذات معادلة تفاضلية مؤثرية من المرتبة الأولى.
2. البرهان على وجود و وحدانية حل قوي لمسألة القيم الحدية – الابتدائية.

ونوصي بالاستفادة من النتائج أعلاه في دراسة المسألة الطيفية الموافقة للمسألة المدروسة.

References:

[1] CHUESHOV,I.D, ELLER,M, and LASIECKA,I. "*Finite dimensionality of the attractor for a semi-linear wave equation with non linear boundary dissipation "*. Partial differential equations ,29,No,11-12,1847-1867, 2004.

[2] KOPACHEVSKY,N.D, KREIN,S.G, and Nogo Zui Kan. "Operato methods in linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral problems". Moscow,1989.

[3] KOPACHEVSKY,N.D.An abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem ,Tavrich. Vestn. Mat.Inf., No. 2, 52–80,2004.

[4] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G .Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics Vol. 1: Self-ad joint Problems for Ideal Fluid, Birkh¨auserVerlag, Basel—Boston—Berlin, 2001,383.

[5] KOPACHEVSKY,N.D; KREIN,S.G. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself - adjoint Problems for Viscous Fluids, Birkh¨auser Verlag , Basel—Boston—Berlin, 2003, 444.

[6] KOPACHEVSKII,N.D, On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container, Math.Nachr 248-249,3-39(2003).

[7] GOLDSTEIN,A.J. Semi-groups of Linear Operators and Applications, VyshchaShkola,Kiev,1989,245.

[8] Ali V., Kopachevsky, N. D. Small oscillations of a plane pendulum with a cavity partially filled with an ideal capillary, Proceeding of the FourthCrimean Autumn Math. School–Sympos 4, 98-102.

[9] Ali W. Studying the Small Movements of a System of Rotating-Relaxing Fluids, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

[10] Ali W., Tfiha A. Using some Functional Analysis methods in studying small motions of a system of heavy viscous fluids, s. Al-baath University Journal, 2014