مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

دراسة المشتقات من المرتبة الثانية لدوال محدبة –مقعرة وفق مسافة ρ–هاوسدورف

الدكتور محمد سويقات*
عزام محمود علي**

(تاريخ الإيداع 15 / 9 / 2015. قُبِل للنشر في 27 / 4 /2016)

☐ ملخّص ☐

تلعب المشتقات فوق البيانية من المرتبة الثانية دورا هاما في حل مسائل الأمثليات وتحديد شروط لها، وكان روكافولار أول من درس مشتقات الدوال المحدبة والمحدبة –المقعرة في فضاءات منتهية البعد ومن ثم تناولها العديد من الرياضيين .

يهدف هذا البحث إلى دراسة وتعميم المشتقات فوق البيانية من المرتبة الثانية لدوال محدبة–مقعرة الى فضاءات باناخ وفضاءات منظمة باستخدام مفهوم مسافة ρ–هاوسدورف والحصول على نتائج هامة تتعلق بالمشتقات فوق البيانية للدوال القرينة المحدبة ومشتقات الدوال القرينة المقعرة وكذلك بالمشتق البياني للمؤثرات التفاضلية الموافقة لها.

الكلمات المفتاحية: دالة محدبة – مقعرة ، مسافة ρ– هاوسدورف ، دالة قرينة محدبة ، المشتق من المرتبة الثانية التفاضل الجزئي ، مشتق بروتو .

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية
** طالب دراسات عليا (ماجستير)– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (2) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (2) 2016

On Epi-Derivatives Of convex–concave Functions in terms of ρ-Hausdorff distance

Dr. Mohamed Soueycatt[*]
Azzam Mahmoud Ali[**]

(Received 15 / 9 / 2015. Accepted 27 / 4 /2016)

□ ABSTRACT □

The second –order epi derivatives play an important role in nonsmooth analysis and in statements of optimality conditions ,these notions introduced by Rockafellar for convex functions and convex−concave functions in finite dimensional spaces.

It is purpose of this paper is to study and extend the epi-derivatives for convex – concave functions to general Banach spaces and normed spaces using ρ-Hausdorff distance convergence, and obtain important results for the epi-derivative of parent convex functions , parent concave functions and proto-derivative of subdifferential operator

Key words: Convex – concave functions , ρ-Hausdorff Distance , parent convex function , epi-derivative , subdifferential , proto-derivative .

[*] **Professor- Department of mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**] **postgraduate Student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.**

مقدمة:

حازت المشتقات من المرتبة الثانية على اهتمام العديد من الرياضيين في السنوات الماضية لدورها الهام في حل مسائل الأمثليات وتحديد شروط لها، حيث قاموا بتعريف المشتق الاتجاهي من المرتبة الثانية بطرق مختلفة، انظر [6,7,8,20] للحالة غير المحدبة و [2,3,10,12,18] للحالة المحدبة.

وظهرت حديثا طريقة جديدة من قبل الرياضي روكافولار لدراسة المشتقات من المرتبة الثانية للدوال المحدبة والمحدبة– المقعرة في فضاءات منتهية البعد حيث استبدل التقارب البسيط بتقارب فوق البيان لأسرة النسب التفاضلية من المرتبة الثانية ودعاه بالمشتق فوق البيان انظر [14,16]. وفي [10] عمم دو دراسة روكافولار إلى فضاءات باناخ انعكاسية حيث استبدل التقارب فوق البيان بتقارب موسكو–فوق البيان، وفي[18] قام الدكتور سويقات بتعميم دراسة المشتق من المرتبة الثانية للدوال المحدبة إلى فضاءات منظمة مستخدما مفهوم تقارب مسافة ρ–هاوسدورف.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة المشتقات من المرتبة الثانية لدوال محدبة–مقعرة في فضاءات خطية منظمة غير منتهية البعد باستخدام مفهوم تقارب مسافة ρ– هاوسدورف لأسرة النسب التفاضلية من المرتبة الثانية،ودراسة مؤثرات التفاضلات الجزئية الموافقة لها، وإيجاد بعض النتائج التي تملك تطبيقات هامة في العديد من المجالات الرياضية وخاصة في تحديد شروط مسائل الأمثليات.

طرائق البحث وموارده:

تعتمد طرائق البحث على بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالدوال المحدبة والدوال المحدبة– المقعرة وعلى مفهوم مسافة ρ– هاوسدورف والذي استخدم من قبل العديد من الرياضيين في مجالات مختلفة.

1 – تعاريف ومفاهيم أساسية (Notations and Definitions) :

سنعتبر $X\ ,Y$ فضاءين تبولوجيين و $X^*\ ,\ Y^*$ فضائيهما الثنويين على الترتيب .

سنذكّر ببعض عناصر التحليل المحدب(convex analysis) ومن أجل تفاصيل أكثر ينصح بالعودة إلى المراجع التالية: [3,9,11]

يرمز لمجموعة الدوال $f\ :X\ \to \overline{R}$ المعرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$ بالرمز $\overline{R}^X$.

يعرف فوق بيان الدالة f بالعلاقة : $epi\ f\ :=\{(x,\alpha)\in X\ \times R : f\ (x)\le \alpha\}$

يبرهن أنَّ الدالة f محدبة إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة محدبة في الفضاء $X\times R$ وأنها دالة نصف مستمرة من الأدنى إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة مغلقة، و دالة خاصة (proper) إذا وفقط إذا كانت $epif$ مجموعة غير خالية أو إذا كان المجال الفعلي $dom\ f\ \neq \varnothing$ حيث: $dom\ f\ =\{x\ \in X\ \mid\ f\ (x)<+\infty\}$.

نقول إنَّ f دالة مقعرة إذا وفقط إذا كانت $(-f)$ دالة محدبة.

يرمز لمجموعة الدوال المحدبة والنصف مستمرة من الأدنى والخاصة على X بالرمز $\Gamma(X)$.

تعرَّف الدالة المرافقة $f^*:X^*\to \overline{R}$ للدالة f بالعلاقة: $f^*(x^*)=\sup\limits_{x\in X}\{\langle x,x^*\rangle-f\ (x)\}$

وهي دالة محدبة سواء كانت f محدبة أو ليست محدبة.

يعرف مؤثر التفاضلات الجزئية للدالة $f \in \overline{R}^X$ في x_0، ويرمز له بالرمز $\partial f(x_0)$ بالعلاقة التالية:

$$\partial f(x_0)=\left\{x^* \in X^* / f(x) \geq f(x_0)+< x-x_0, x^* >; \forall x \in X\right\}$$

(مسافة ρ − هاوسدورف على X):[1,5]

لتكن d دالة المسافة المولدة بالنظيم $\|.\|$ المعرف على X .

من أجل كل مجموعة جزئية C في X نعرف المسافة بين العنصر x وبين المجموعة C بالعلاقة:

$$d(x,C):=\inf_{y \in c}\left\{\|x-y\|, y \in C\right\}$$، (إذا كانت $C=\phi$ تكون $d(x,C)=\infty$)

من أجل كل $\rho \geq 0$ ، نرمز بـ ρB للكرة المغلقة في X التي مركزها الصفر ونصف قطرها ρ ،ولكل C مجموعة جزئية من الفضاء X نعرف المجموعة: $C_\rho := C \cap \rho B$

من أجل أي مجموعتين C و D في X ،يعرف مدى (تجاوز) هاوسدورف (*excess Hausdoroff*) لـ C على D بالعلاقة: $e(C,D):=\sup\{d(x,D); x \in C\}$ ، (باعتبار $e(C,D)=0$ إذا كانت $C=\phi$)

تعرف مسافة ρ − هاوسدورف بين المجموعتين C و D بالعلاقة: $haus_\rho(D,C)=Sup\{e(C_\rho,D), e(D_\rho,C)\}$

نقول عن متتالية من المجموعات $(D_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المجموعة D في X بالنسبة لمسافة ρ − هاوسدورف إذا وفقط إذا كان $\lim_{n \longrightarrow \infty} haus_\rho(D_n, D)=0$, $\forall \rho \geq 0$ وهذا يعني من أجل كل $\rho \geq 0$ وكل $\varepsilon \geq 0$ من اجل n كبيرة بشكل كافي الاحتواءان التاليان محققان :

$$D \cap \rho B \subset D_n+\varepsilon B \quad, D_n \cap \rho B \subset D_n+\varepsilon B \quad ..... \quad (1)$$

(مسافة ρ − هاوسدورف فوق البيانية على $\overline{R}^X$)

نعرف مسافة ρ − هاوسدورف بين الدالتين f و g من $\overline{R}^x$ بالعلاقة:

$$h_\rho(f,g):=haus_\rho(epif, epig); \quad \forall \rho \geq 0$$

حيث $epif$ ، $epig$ مجموعتان جزئيتان في $X \times R$ وتعرف الكرة المغلقة ρB في الفضاء $X \times R$ بالعلاقة:

$$\rho B_{X\times R}=\{(x,\alpha) \in X \times R : \|X\| \leq \rho; |\alpha| \leq \rho\}$$

نقول عن متتالية من الدوال $(f_n)_{n \in N}$ إنها متقاربة نحو الدالة f في الفضاء $\overline{R}^x$ وفق مسافة ρ −هاوسدورف إذا وفقط إذا كان: $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_\rho(f_n, f)=0 \;\; ; \;\; \forall \rho \geq 0$

سمي هذا المفهوم بمسافة ρ −هاوسدورف فوق البياني وتبناه العديد من الرياضيين في دراسات مختلفة ونذكر منها [4,13,18,19]

مبرهنة (1.1):[5]

لتكن $(f_n)_{n\in N}$ متتالية من الدوال في الفضاء $\Gamma(X)$ عندئذ من أجل كل $\rho \geq 0$ التكافؤ التالي محقق:

$$f_n \xrightarrow{h_\rho} f \quad \Leftrightarrow f_n^* \xrightarrow{h_\rho} f^*$$

(مسافة ρ − هاوسدورف البيانية):

ليكن $A: X \rightrightarrows Y$ مؤثر متعدد القيم يعرف بيان المؤثر A بالعلاقة: $gph\, A=\{(x,y) \in X \times Y \,; y \in A(x)\}$

من أجل $\rho \geq 0$ ، تعرف مسافة $\rho-$ هاوسدورف البيانية بين المؤثرين $A : X \rightrightarrows Y$ و $B : X \rightrightarrows Y$ بالعلاقة:

$h_\rho(A,B) = haus_\rho(gph\,A, gph\,B)$ حيث $gph\,A$ و $gph\,B$ مجموعتين جزئيتين من الفضاء $X \times Y$

حيث تعرف الكرة ρB في الفضاء $X \times Y$ بالعلاقة: $\rho B_{X \times Y} = \{(x,y) \in X \times Y : \|x\| \leq \rho, \|y\| \leq \rho\}$

نقول عن متتالية من المؤثرات $(A_n)_{n\in N}$ إنها متقاربة نحو المؤثر A بالنسبة لمسافة $\rho -$ هاوسدورف إذا وفقط إذا كان: $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_\rho(A_n, A) = 0 \ ; \ \forall \rho \geq 0$

تعريف(1.2):(المشتق من المرتبة الثانية لدالة محدبة):

لتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة من $\Gamma(X)$ ذات قيمة محدودة في $x \in X$، ولتكن $x^* \in X^*$. تعرف اسرة النسب التفاضلية من المرتبة الثانية للدالة f في x بالنسبة لـ x^* بالعلاقة :

$$(\Delta_t^2 f)_{(x,x^*)}(\zeta) = \frac{1}{t^2}\{f(x+t\zeta) - f(x) - t < \zeta, x^* >\}$$

وإذا كانت هذه الدوال $(\Delta_t^2 f)_{(x,x^*)}$ تتقارب وفق مسافة $\rho -$ هاوسدورف(عندما $t \to 0$) من دالة $\varphi \in \Gamma(X)$ عندئذ نقول إن f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة $\rho -$ هاوسدورف في x بالنسبة لـ x^* ونكتب عندئذ f''_{x,x^*} بدلا من φ.

مبرهنة (1.3):[18]

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة $\rho -$ هاوسدورف في x بالنسبة لـ x^* عندئذ تكون:

f''_{x,x^*} دالة محدبة ونصف مستمرة من الأدنى وخاصة ومتجانسة إيجابيا من المرتبة الثانية و $f''_{x,x^*}(0) = 0$.

و (0) القيمة الصغرى لـ f''_{x,x^*} أي $(0 \in \partial f''_{x,x^*}(0))$.

مبرهنة (1.4):[18]

لتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة محدبة ومغلقة وخاصة عندئذ تكون f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة $\rho -$ هاوسدورف في x بالنسبة لـ x^* إذا وفقط إذا كانت f^* قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة $\rho -$ هاوسدورف في x^* بالنسبة لـ x ويكون:

$$(f''_{x,x^*})^* = (f^*_{x^*,x})'' \quad ..... (2)$$

تعريف(1.5): مشتق بروتو(Proto–Differentiation)

ليكن $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ مؤثر متعدد القيم و $x \in X$ بحيث $\Gamma(x) \neq \varnothing$ و $y \in \Gamma(x)$ ولتكن أسرة المؤثرات التفاضلية التالية :

$$(\Delta_t \Gamma)_{x,y}(\zeta) = \frac{1}{t}\{\Gamma(x+t\zeta) - y\} \ : \zeta \in X \ ,(t > 0)$$

إذا كانت بيانات هذه المؤثرات كعائلة من المجموعات الجزئية من $X \times Y$ تتقارب وفق مفهوم مسافة $\rho -$ هاوسدورف البيانية (عندما $t \to 0$) من مجموعة أخرى من $X \times Y$ عندئذ نقول إن Γ بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة لـ y، وستكون النهاية بيان لمؤثر أخر $\Gamma'_{x,y} : X \rightrightarrows Y$ والذي يسمى مشتق بروتو في x بالنسبة لـ y .ونكتب:

$$\Gamma'_{x,y} = (H_\rho - gph) - \lim_{n\to\infty}(\Delta_{t_n}\Gamma)_{x,y} \ : \ \forall t_n \to 0 \quad \text{أو} \quad \Gamma'_{x,y} = (H_\rho - gph) - \lim_{t\to 0}(\Delta_t \Gamma)_{x,y}$$

مبرهنة (1.6):

لتكن X_1, X_2, Y_1, Y_2 فضاءات منظمة .وليكن $A = (A_1, A_2) : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$ إيزمورفيزم خطي، وليكن

$\Gamma : X_1 \ \vec{\rightarrow} \ Y_1$ مؤثر متعدد القيم ، وليكن $A\Gamma : X_2 \ \vec{\rightarrow} \ Y_2$ مؤثر أخر متعدد القيم معرف بالشكل: $gph(A\Gamma) = A\ gph(\Gamma)$ ،ولنفرض أن $\Gamma(x) \neq \varnothing$ و $y \in A(x)$ ،عندئذ Γ بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة لـ y إذا وفقط إذا كان A بروتو قابل للاشتقاق في $A_1(x,y)$ بالنسبة لـ $A_2(x,y)$ ويكون :

$$A\Gamma'_{x,y} = (A\Gamma)'_{A_1(x,y), A_2(x,y)}$$

مبرهنة (1.7):[18]

لتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة محدبة ومغلقة وخاصة و $x \in X$ بحيث $f(x)$ منتهية و $x^* \in X^*$ ،عندئذ الشرطان التاليان متكافئان:

a) f قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ – هاوسدورف في x بالنسبة لـ x^* .

b) $x^* \in \partial f(x)$ ، و ∂f بروتو قابل للاشتقاق في x بالنسبة لـ x^* ويكون:

$$\partial(f''_{x,x^*}) = (\partial f)'_{x,x^*} \quad ...... (3)$$

(الدوال المحدبة –المقعرة) [6,14,15]

ليكن $X\ ,\ Y$ فضاءين منظمين، وليكن $X^*\ ,\ Y^*$ الفضاءين الثنويين لهما على الترتيب.

نقول عن الدالة $L : X \times Y \to R$ إنها دالة محدبة – مقعرة(convex–concave)إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني.

يعرف المجال الفعلي للدالة L ويرمز له بالرمز $dom\ L$ بالعلاقة: $dom\ L = dom_1 L \times dom_2 L$ حيث:

$$dom_1 L = \{x \in X \,/\, L(x,y) < +\infty; y \in Y\}\ ,\ dom_2 L = \{y \in Y \,/\, L(x,y) > -\infty; x \in X\}$$

تعرف الدالة القرينة المحدبة $F : X \times Y^* \to R$ (parent convex) للدالة L بالعلاقة:

$$F(x,y^*) = \sup_{y\in Y}\{L(x,y) + \langle y, y^* \rangle\} \quad .....(4)$$

تعرف الدالة القرينة المقعرة $G : X^* \times Y \to R$ (parent concave) للدالة L بالعلاقة:

$$G(x^*,y) = \inf_{x\in X}\{L(x,y) + \langle x, x^* \rangle\} \quad .....(5)$$

نقول عن دالتين محدبتين – مقعرتين إنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الدوال القرينة.

نقول عن الدالة L إنها مغلقة إذا كانت دوالها القرينة مترافقة فيما بينها أي إذا كان:

$$F(x,y^*) = (-G)^*(-x,y^*) \quad , \quad -G(x^*,y) = F^*(-x^*,y) \quad .... (6)$$

يعرف صف التكافؤ للدالة L (equivalence class)ويرمز له بالرمز $[\underline{L}, \overline{L}]$ بأنه مجموعة الدوال المحدبة–المقعرة المحصورة بين الدالتين $\underline{L}$ و $\overline{L}$ حيث:

$$\underline{L}(x,y) = \sup_{x^*\in X^*}\{G(x^*,y) - \langle x, x^* \rangle\} = (-G)^{*x^*}(-x,y) \quad ..... (7)$$

$$\overline{L}(x,y)=\inf_{y^*\in Y^*}\left\{F(x,y^*)-<y,y^*>\right\}=-F^{*y^*}(x,y)\ \ .....\qquad(8)$$

وتكون الدالتين $\underline{L}\,,\overline{L}$ دوال محدبة – مقعرة وتحقق $\underline{L}\le\overline{L}$ ،والمجال $[\underline{L},\overline{L}]$ يحوي جميع الدوال المحدبة – المقعرة

التي لها نفس الدوال القرينة $F\ ,\ G$.

يرمز لصف كل الدوال المحدبة ونصف المستمرة من الأدنى المعرفة على $X\times Y^*$ والتي تأخذ قيمها في Rبالرمز :

$$\Gamma\left(X\times Y^*\right)$$

تعرف الدالة المرافقة الدنيا $\underline{L}^*:X^*\times Y^*\to R$ للدالة Lبالعلاقة:

$$\underline{L}^*(x^*,y^*):=\sup_x\inf_y\left\{-L(x,y)-<x,x^*>-<y,y^*>\right\}.....(9)$$

تعرف الدالة المرافقة العليا $\overline{L}^*:X^*\times Y^*\to R$ للدالة Lبالعلاقة:

$$\overline{L}^*(x^*,y^*):=\inf_y\sup_x\left\{-L(x,y)-<x,x^*>-<y,y^*>\right\}....\ (10)$$

إذا كانت Lدالة محدبة – مقعرة ومغلقة كانت كلا الدالتين $\overline{L}^*\ ,\ \underline{L}^*$دوال محدبة – مقعرة ومغلقة، وهما على التوالي الدوال الدنيا والعليا في صف التكافؤ للدالة المرافقة L^* للدالة L. ويرمز له بالرمز $[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$، ويدعى هذا الصف بالصف المرافق (conjugate class) للصف $[\underline{L},\overline{L}]$.

برهن روكافولار في $[17]$ أنه توجد أربع تقابلات واحد لواحد بين مجموعة صفوف التكافؤ لـ(دالة محدبة – مقعرة مغلقة و الدالة المرافقة لها والدالة القرينة المحدبة لها والدالة القرينة المقعرة لها) أي :

$$\begin{tikzcd}
\left[\underline{L}\,,\overline{L}\right] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \left[\underline{L}^*,\overline{L}^*\right] \arrow[d, leftrightarrow] \\
F \arrow[r, leftrightarrow] & G
\end{tikzcd}$$

يعرف مؤثر التفاضل الجزئي للدالة L بالشكل التالي:

$$(x^*,y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}L(\zeta,y)\ge L(x,y)+<\zeta-x,x^*>\ :\ \ \forall\zeta\in X\\ \\ L(x,\eta)\le L(x,y)+<y^*,\eta-y>:\ \ \forall\eta\in Y\end{cases}\ ....\ (11)$$

ويبرهن بسهولة صحة العلاقة الآتية:

$$(-x^*,y)\in\partial F(x,y^*)\Leftrightarrow(x,-y^*)\in\partial G(x^*,y)\Leftrightarrow(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow(x,y)\in\partial L^*(x^*,y^*)\ ...(12)$$

يقال عن نقطة $(\overline{x},\overline{y})$إنها نقطة سرجيه للدالة Lإذا حققت الشرط التالي:

$$L(\overline{x},y)\le L(\overline{x},\overline{y})\le L(x,\overline{y})\ :\ \forall(x,y)\in X\times Y$$

ويبرهن أن:

$$(0,0)\in \partial L(\overline{x},\overline{y}) \Leftrightarrow L \text{ نقطة سرجيه للدالة } (\overline{x},\overline{y}) \quad .... \quad (13)$$

(مسافة ρ–هاوسدورف على $\overline{R}^{X\times Y}$)[1,19]

لتكن $\rho \geq 0$ ، تعرف مسافة ρ–هاوسدورف بين الدالتين L , K من الفضاء $R^{X\times Y}$ بالعلاقة:

$$H_\rho(L,K)=h_\rho(F_1,F_2)$$

حيث F_1 و F_2 هما الدالتان القرينتان المحدبتان للدالتين L و K على الترتيب.

ويقال عن المتتالية $(L_n)_{n\in N}$ من الفضاء $R^{X\times Y}$ إنها متقاربة من الدالة L وفق مسافة ρ– هاوسدورف إذا حققت:

$$\lim_{n\to\infty} H_p(L_n,L)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} h_\rho(F_n,F)=0 \text{ .....}(14)$$

حيث F_n و F هي الدوال القرينة المحدبة للدوال L_n و L على الترتيب.

تعريف (1.9): (المشتق من المرتبة الثانية لدالة محدبة –مقعرة)

لتكن $L: X\times Y \to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة ولتكن F و G دوالها القرينة المحدبة والمقعرة على الترتيب. وليكن $(x,y)\in X\times Y$ و $(-x^*,-y^*)\in X^*\times Y^*$ عندئذ تعرف نسب الدوال التفاضلية من المرتبة الثانية للدالة L في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ بالعلاقة التالية:

$$(\Delta_t^2 L)_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta):=\frac{1}{t^2}\left\{L(x+t\zeta,y+t\eta)-L(x,y)+t<\zeta,x^*>+t<\eta,y^*>\right\}$$

$$: t>0 \ , \ \zeta\in X \ , \eta\in Y \qquad ....(15)$$

وسنرمز لهذه الدوال بالرمز $\phi_t = (\Delta_t^2 L)_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ وتكون هذه الدوال هي دوال محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة.

يقال عن الدالة L إنها قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ–هاوسدورف في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ إذا كانت أسرة النسب التفاضلية من المرتبة الثانية $\phi_t=(\Delta_t^2 L)_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ متقاربة وفق مسافة ρ– هاوسدورف عندما $(t\to 0)$ من دالة ϕ محدبة– مقعرة ومغلقة وخاصة.عندئذ ندعو الدالة ϕ مشتق ρ– هاوسدورف من المرتبة الثانية للدالة L في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ ونكتب عندئذ: $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ بدلا" من ϕ

النتائج والمناقشة:

مبرهنة (2.1):

إذا كانت φ_t هي الدوال القرينة المحدبة لـ ϕ_t ، و ψ_t هي الدوال القرينة المقعرة لها عندئذ تعطى φ_t, ψ_t بالعلاقتين:

$$\varphi_t(\zeta,\eta^*)=\frac{1}{t^2}\left\{F(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)-\left[L(x,y)+<y,y^*>\right]+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\} \text{ ....}(16)$$

$$\psi_t(\zeta^*,\eta)=\frac{1}{t^2}\left\{G(x^*+t\zeta^*,y+t\eta)-\left[L(x,y)+<x,x^*>\right]-t<x,\zeta^*>+t<\eta,y^*>\right\} \text{ .....} \quad (17)$$

البرهان:

من تعريف الدالة القرينة المحدبة لدينا:

$$\varphi_t(\zeta,\eta^*)=\sup_{\eta}\left\{\Phi_t(\zeta,\eta)+<\eta,\eta^*>\right\}$$

$$=\sup_{\eta}\left\{\frac{1}{t^2}\left\{L(x+t\zeta,y+t\eta)-L(x,y)+t<\zeta,x^*>+t<\eta,y^*>\right\}+<\eta,\eta^*>\right\}$$

$$=\frac{1}{t^2}\sup_{\eta}\left\{L(x+t\zeta,y+t\eta)-L(x,y)+t<\zeta,x^*>+<t\eta,y^*+t\eta^*>\right\}$$

بفرض $t\eta=\eta'-y\Leftarrow\eta'=y+t\eta$ والتعويض في العلاقة السابقة:

$$\varphi_t(\zeta,\eta^*)=\frac{1}{t^2}\left\{L(x+t\zeta,\eta')-L(x,y)+t<\zeta,x^*>+<\eta',y^*+t\eta^*>-<y,y^*+t\eta^*>\right\}$$

$$=\frac{1}{t^2}\left\{\sup_{\eta}\left\{L(x+t\zeta,\eta')+<\eta',y^*+t\eta^*>\right\}-\left\{L(x,y)+<y,y^*>\right\}+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\}$$

$$=\frac{1}{t^2}\left\{F(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)-\left\{L(x,y)+<y,y^*>\right\}+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\}$$

وبشكل مشابه ينتج أن:

$$\psi_t(\zeta^*,\eta)=\inf_{\zeta}\left\{\Phi_t(\zeta,\eta)+<\zeta,\zeta^*>\right\}$$

$$=\frac{1}{t^2}\left\{G(x^*+t\zeta^*,y+t\eta)-\left[L(x,y)+<x,x^*>\right]-t<x,\zeta^*>+t<\eta,y^*>\right\}$$

مبرهنة (2.2) :

إذا كانت $(L_n)_{n\in N}$ وL دوال محدبة –مقعرة ومغلقة وخاصة، عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty}H_\rho(L_n,L)=0\iff\lim_{n\to\infty}h_\rho(G_n,G)=0$$

حيث: G_n و G هي الدوال القرينة المقعرة للدوال L_n و L على الترتيب.

البرهان:

بما أن الدوال L_n و L دوال مغلقة بالتالي بحسب العلاقة (14) يكون:

$$\lim_{n\to\infty}H_\rho(L_n,L)=0\iff\lim_{n\to\infty}h_\rho(F_n,F)=0\iff\lim_{n\to\infty}h_\rho((-G_n)^*,(-G)^*)=0\iff$$

$$\lim_{n\to\infty}h_\rho(-G_n,-G)=0\iff\lim_{n\to\infty}h_\rho(G_n,G)=0$$

مبرهنة (2.3):

لتكن $(L_n)_{n\in N}$متتالية من الدوال المحدبة –المقعرة، ولتكن المتتالية $(L_n^*)_{n\in N}$ هي متتالية الدوال المرافقة لها، عندئذ الشرطان التاليان متكافئان:

a) المتتالية $(L_n)_{n\in N}$متقاربة وفق مسافة ρ− هاوسدورف من الدالة L.

b) المتتالية $(L_n^*)_{n\in N}$متقاربة وفق مسافة ρ− هاوسدورف من الدالة L^*.

حيث L^* هي الدالة المرافقة للدالة L

البرهان:

من العلاقتين (4) و(5) نجد أن:

$$-F(x,y^*)=\inf_y\left\{-L(x,y)-<y,y^*>\right\}\ ,\ -G(x^*,y)=\sup_x\left\{-L(x,y)-<x,x^*>\right\}....(18)$$

بتعويض العلاقتين السابقتين في العلاقتين (9) و (10) يكون:

$$\underline{L}^*(x^*,y^*):=\sup_x\left\{-F(x,y^*)-<x,x^*>\right\}.....(19)$$

$$\overline{L}^*(x^*,y^*):=\inf_y\left\{-G(x^*,y)-<y,y^*>\right\}....(20)$$

بمقارنة العلاقتين السابقتين مع العلاقتين (7) و(8) نستنتج أن الدالتين $-F\ ,-G$ هما الدالتين القرينتين المحدبة والمقعرة للدالة L^* على الترتيب.

بالتالي إذا كانت المتتالية $(L_n)_{n\in N}$ متقاربة وفق مسافة ρ– هاوسدورف من الدالة L ، فإن متتالية الدوال القرينة المحدبة $(F_n)_{n\in N}$ متقاربة من الدالة F (الدالة القرينة المحدبة لـ L) وينتج أن المتتالية $(-F_n)_{n\in N}$ متقاربة وفق مسافة ρ– هاوسدورف من الدالة($-F$) بالتالي بحسب المبرهنة (2.2) ينتج أن المتتالية $(L_n^*)_{n\in N}$ متقاربة وفق مسافة ρ– هاوسدورف من الدالة L^* . والعكس صحيح.وهو المطلوب

مبرهنة (2.4):

لتكن $L:X\times Y\to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة

وليكن $(x,y)\in X\times Y$ و $(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*$ عندئذ يكون :

$$(x^*,y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}F(x,-y^*)=L(x,y)+<y,-y^*>\\ G(-x^*,y)=L(x,y)+<x,-x^*>\end{cases}$$

البرهان:

من العلاقة (11)لدينا أن:

$$(x^*,y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}L(\zeta,y)\ge L(x,y)+<\zeta-x,x^*>,\ \forall\zeta\in X\\ L(x,\eta)\le L(x,y)+<y^*,\eta-y>,\ \forall\eta\in Y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}L(\zeta,y)+<\zeta,-x^*>\ \ge L(x,y)+<x,-x^*>:\forall\zeta\in X\\ L(x,\eta)+<\eta,-y^*>\le L(x,y)+<y,-y^*>:\forall\eta\in Y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}G(-x^*,y)\ge L(x,y)+<x,-x^*>\\ F(x,-y^*)\le L(x,y)+<y,-y^*>\end{cases}\quad ....\ (21)$$

من جهة أخرى بحسب تعريف الدوال القرينة المحدبة والمقعرة لدينا أن:

$$\begin{cases}G(-x^*,y)\le L(x,y)+<x,-x^*>\\ F(x,-y^*)\ge L(x,y)+<y,-y^*>\end{cases}\quad ....\ (22)$$

من العلاقتين (21) و (22)

$$(x^*,y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}F(x,-y^*)=L(x,y)+<y,-y^*>\\ G(-x^*,y)=L(x,y)+<x,-x^*>\end{cases}$$.وهو المطلوب.

مبرهنة (2.5):

لتكن $L:X\times Y\to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة وليكن $(x,y)\in X\times Y$ و $(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*$ و $L^*\in[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$ عندئذ يكون:

$$(x,y)\in\partial L^*(x^*,y^*)\Leftrightarrow\begin{cases}G(x^*,-y)=-L^*(x^*,y^*)+<y,y^*>\\ F(-x,y^*)=-L^*(x^*,y^*)+<x,x^*>\end{cases}:$$

البرهان:

لنفرض أن $(x,y)\in\partial L^*(x^*,y^*)$ ولتكن f و g الدالتين القرينتين المحدبة والمقعرة للدالة L^* على الترتيب بالتالي بحسب المبرهنة (2.4) يكون:

$$\begin{cases}f(x^*,-y)=L^*(x^*,y^*)+<y,-y^*>\\ g(-x,y^*)=L^*(x^*,y^*)+<x,-x^*>\end{cases}$$

من برهان المبرهنة (2.3) وجدنا أن $G=f-$ و $F=g-$ بالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن:

$$\begin{cases}G(x^*,-y)=-L^*(x^*,y^*)+<y,y^*>\\ F(-x,y^*)=-L^*(x^*,y^*)+<x,x^*>\end{cases}$$

نتيجة (2.6):

$(\overline{x},\overline{y})$ نقطة سرجيه للدالة L المغلقة والخاصة إذا وفقط إذا كان: $L(\overline{x},\overline{y})=F(\overline{x},0)=G(0,\overline{y})$

البرهان:

لنفرض أن $(\overline{x},\overline{y})$ نقطة سرجيه للدالة L بالتالي من العلاقة (13) هذا يكافئ أن $(0,0)\in\partial L(\overline{x},\overline{y})$: ومنه

بحسب المبرهنة (**2.4**)يكون:

$$(0,0)\in\partial L(\overline{x},\overline{y})\Leftrightarrow\begin{cases}F(\overline{x},0)=L(\overline{x},\overline{y})+<\overline{y},0>\\ G(0,\overline{y})=L(\overline{x},\overline{y})+<\overline{x},0>\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F(\overline{x},0)=L(\overline{x},\overline{y})\\ G(0,\overline{y})=L(\overline{x},\overline{y})\end{cases}$$

أي: $L(\overline{x},\overline{y})=F(\overline{x},0)=G(0,\overline{y})$ وهو المطلوب.

مبرهنة (2.7):

لتكن $L:X\times Y\to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة بحيث $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ موجود عندئذ:

$$(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)$$

البرهان:

بما أن $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ موجود بالتالي يكون $\lim_{n\to\infty}H_\rho(\phi_t,L''_{(x,y;-x^*,-y^*)})=0$ بالتالي من العلاقة (14) يكون: $\lim_{n\to\infty}h_\rho(\varphi_t,F''_{(x,y^*;-x^*,y)})=0$ حيث $F''_{(x,y^*;-x^*,y)}$ هي الدالة القرينة المحدبة للدالة $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$

و بحسب العلاقة (1)يكون:

$\forall\left((\zeta_n,\eta_n^*),F''_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta_n,\eta_n^*)\right)\in\left(epi\ F''_{(x,y^*;-x^*,y)}\right)_\rho\ ,\ \exists\left(\zeta_{n_\varepsilon},\eta^*_{n_\varepsilon}\right)\in dom\ \varphi_t$ بحيث:

$$\left\|(\zeta_n,\eta_n^*)-(\zeta_{n_\varepsilon},\eta_{n_\varepsilon}^*)\right\|\leq\varepsilon \quad .... \ (23)$$

$$F''_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta_n,\eta_n^*)\leq\varphi_t(\zeta_{n_\varepsilon},\eta_{n_\varepsilon}^*)+\varepsilon \quad ...... \ (24)$$

من العلاقة (23) وبجعل $(0,0)\xrightarrow{n\to\infty}(\zeta_n,\eta_n^*)$ يكون: $(\zeta_{n_\varepsilon},\eta_{n_\varepsilon}^*)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$

من جهة أخرى وبتعويض العلاقة (16) في (24) ينتج أن:

$$F''_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta_n,\eta_n^*)\leq\frac{1}{t^2}\left\{F(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)-\left[L(x,y)+<y,y^*>\right]+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\}+\varepsilon$$

بأخذ $(\liminf_{n\to\infty})$لطرفي العلاقة السابقة يكون: $F(x,y^*)\leq L(x,y)+<y,y^*>$ومنه تكون العلاقة:

$F(x,y^*)=L(x,y)+<y,y^*>$ ..... (25) محققة لأن الاتجاه الأخر للمتراجحة محقق دوما.

من جهة أخرى بحسب المبرهنة (2.2) لدينا أن:

$$\lim_{n\to\infty}H_\rho(L_n,L)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}h_\rho(G_n,G)=0$$

وبشكل مشابه لما سبق ينتج أن: $G(x^*,y)=L(x,y)+<x,x^*>$ ...... (26)

من العلاقتين (25) و (26) و المبرهنة (2.4) يكون : $(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)$.وهو المطلوب .

مبرهنة (2.8):

لتكن $L:X\times Y\to R$دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة، ولتكن Fو G دوالها القرينة، ولتكن L^* دالة من الصف $[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$ ، عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

a) L قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ– هاوسدورف في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$.

b) F قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ– هاوسدورف في (x,y^*) بالنسبة لـ $(-x^*,y)$.

c) G قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ– هاوسدورف في (x^*,y) بالنسبة لـ $(x,-y^*)$.

d) L^* قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ– هاوسدورف في (x^*,y^*) بالنسبة لـ (x,y).

وتكون العلاقة بين المشتقات من المرتبة الثانية التالية: $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$, $F''_{(x,y^*;-x^*,y)}$, $G''_{(x,y^*;-x^*,y)}$, $L^{*''}_{(x,y;x^*,y^*)}$ هي نفس العلاقات بين الدوال: L , F , G , L^* على الترتيب.

البرهان:

$$(b)\Leftrightarrow(a)$$

لدينا بحسب العلاقة (12)أن: $(-x^*,y)\in\partial F(x,y^*)\Leftrightarrow(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)$

إذا كانت أيا من الدالتين $(F''_{(x,y^*;-x^*,y)})$ $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ موجودة بالتالي بحسب المبرهنة (2.7) و (المبرهنة (1.3))يكون التكافؤ أعلاه محقق أي $(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)$ وبحسب المبرهنة (2.4) يكون:

$$F(x,y^*)=L(x,y)+<y,y^*>$$

بتعويض العلاقة السابقة في العلاقة (16) يكون:

$$\varphi_t(\zeta,\eta^*)=\frac{1}{t^2}\left\{F(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)-F(x,y^*)+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\}=F_t(\zeta,\eta^*)$$

بالتالي الدالة $\varphi_t(\zeta,\eta^*)=(\Delta_t^{(2)}F)_{(x,y^*,-x^*,y)}$ هي الدالة القرينة المحدبة للدالة $\phi_t=(\Delta_t^2 L)_{(x,y;-x^*,-y^*)}$

ومنه بحسب العلاقة (14) ينتج أن $(a)\Leftrightarrow(b)$

$(a)\Leftrightarrow(c)$

البرهان يتم بشكل مشابه لبرهان $(a)\Leftrightarrow(b)$

$(a)\Leftrightarrow(d)$

بما أن L قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ وبما أن ($(a)\Leftrightarrow(b)$) ينتج أن : $\lim_{n\to\infty}h_\rho(F_t,F''_{(x,y^*;-x^*,y)})=0$ ....(*) حيث $F''_{(x,y^*;-x^*,y)}$ هي الدالة القرينة المحدبة للدالة $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ و F_t هي أسرة النسب التفاضلية من المرتبة الثانية للدالة F ، ولكن من برهان المبرهنة(2.3) وجدنا أن $F(x,y^*)=g(x,y)-$ ....(**) (حيث f هي الدالة القرينة المحدبة للدالة L^*) بالتالي يكون :

$F''_{(x,y^*;-x^*,y)}=-g''_{(x,y^*;-x^*,y)}$......(27) حيث $g''_{(x,y^*;-x^*,y)}$ الدالة القرينة المقعرة للدالة $L^{*''}_{(x,y;x^*,y^*)}$

وبتعويض (**) في علاقة F_t ينتج أن:

$$F_t(\zeta,\eta^*)=\frac{1}{t^2}\left\{-g(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)+g(-x,y^*)+t<\zeta,x^*>-t<y,\eta^*>\right\}$$

$$=-\frac{1}{t^2}\left\{g(x+t\zeta,y^*+t\eta^*)-g(-x,y^*)-t<\zeta,x^*>+t<y,\eta^*>\right\}=-g_t(\zeta,\eta^*)...(28)$$

بتعويض (27) و(28) في (*) يكون $\lim_{n\to\infty}h_\rho(g_t,g''_{(x,y^*;-x^*,y)})=0$ وبما أن ($(a)\Leftrightarrow(c)$) برهانا ينتج أن: L^* قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ− هاوسدورف في (x^*,y^*) بالنسبة لـ (x,y) .

تعريف (2.9):

يقال عن الدالة L المحدبة – المقعرة والمغلقة والخاصة إنها قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية في (x,y) وفق مسافة ρ− هاوسدورف إذا حققت:

a) $\partial L(x,y)\neq\varnothing$

b) $L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}$ موجود من أجل كل $(-x^*,-y^*)$ من $\partial L(x,y)$

نتيجة (2.10):

لتكن L دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة، ولتكن F , G دوالها القرينة المحدبة والمقعرة على الترتيب. و L^* دالة من الصف $[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$ ، عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

a) L قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ – هاوسدورف

b) F قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ – هاوسدورف

c) G قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ – هاوسدورف

d) L^* قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ – هاوسدورف

البرهان:

ينتج مباشرة من التعريف (2.9) والمبرهنة (2.8)

مبرهنة (2.11):

لتكن $L : X \times Y \to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة بحيث $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}$ موجود عندئذ الشروط الآتية

محققة:

a) $(0,0) \in L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(0,0)$ (وهذا مكافئ لقولنا إن $(0,0)$ نقطة سرجيه للدالة $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}$)

b) $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(0,0) = 0$

c) $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}$ متجانسة إيجابا من المرتبة الثانية.

البرهان:

ليكن F الدالة القرينة المحدبة للدالة L وبما أن $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}$ موجودة فإنه بحسب المبرهنة (2.8) تكون الدالة

$F''_{(x,y^*,-x^*,y)}$ موجودة ومن المبرهنة (1.3) يكون:

$$(0,0) \in \partial F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(0,0) \quad و \quad F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(0,0) = 0$$

بما أن $(0,0) \in \partial F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(0,0)$ ومن العلاقة (12) يكون: $(0,0) \in \partial L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(0,0)$ وبحسب المبرهنة(2.4)يكون: $F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(0,0) = L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(0,0) + <0,0>$ أي $(0 = (0,0)L''_{(x,y,-x^*,-y^*)})$

بقي أن نبرهن أن $L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}$ متجانسة إيجابا من الدرجة الثانية أي يجب أن نبرهن صحة العلاقة :

$$L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\lambda\zeta, \lambda\eta) = \lambda^2 L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta) \quad : \forall \lambda > 0$$

من أجل أي $\lambda > 0$ لنضع:

$$\Phi^1(\zeta,\eta) = L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\lambda\zeta, \lambda\eta)$$
$$\Phi^2(\zeta,\eta) = \lambda^2 L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta)$$

ولتكن φ^1 , φ^2 الدالة القرينة المحدبة لهما على الترتيب عندئذ:

$$\varphi^1(\zeta,\eta^*) = \sup_{\eta}\left\{\Phi^1(\zeta,\eta) + <\eta,\eta^*>\right\} = \sup_{\eta}\left\{L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\lambda\zeta,\lambda\eta) + <\frac{\eta}{\lambda},\lambda\eta^*>\right\}$$
$$= F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(\lambda\zeta, \frac{\eta^*}{\lambda}) = \lambda^2 F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(\zeta, \frac{\eta^*}{\lambda^2})$$

وذلك لأن $F''_{(x,y^*,-x^*,y)}$ متجانسة إيجابا من المرتبة الثانية. ومن جهة أخرى لدينا:

$$\varphi^2(\zeta,\eta^*) = \sup_{\eta}\left\{\Phi^2(\zeta,\eta) + <\eta,\eta^*>\right\} = \lambda^2 \sup_{\eta}\left\{L''_{(x,y,-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta) + <\eta,\frac{\eta^*}{\lambda^2}>\right\} = \lambda^2 F''_{(x,y^*,-x^*,y)}(\zeta,\frac{\eta^*}{\lambda^2})$$

بالتالي $\varphi^1 = \varphi^2$ أي Φ^1 , Φ^2 لهما نفس الدوال القرينة المحدبة، وبشكل مشابه يمكن البرهان أن لهما نفس الدوال القرينة المقعرة، لذلك هما دالتان متكافئتان.

مبرهنة (2.12):

لتكن $L:X\times Y\to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة، ولتكن F و G دوالها القرينة، ولتكن L^* دالة من الصف $[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$ ، عندئذ الشروط الآتية متكافئة :

a) $(-x^*,y)\in\partial F(x,y^*)$ و ∂F بروتو قابل للاشتقاق في (x,y^*) بالنسبة لـ $(-x^*,y)$

b) $(x,-y^*)\in\partial G(x^*,y)$ و ∂G بروتو قابل للاشتقاق في (x^*,y) بالنسبة لـ $(x,-y^*)$

c) $(-x^*,-y^*)\in\partial L(x,y)$ و ∂L بروتو قابل للاشتقاق في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$

d) $(x,y)\in\partial L^*(x^*,y^*)$ و ∂L^* بروتو قابل للاشتقاق في (x^*,y^*) بالنسبة لـ (x,y)

ويكون:

$$(-\zeta^*,\eta)\in(\partial F)'_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta,\eta^*)\Leftrightarrow(\zeta,-\eta^*)\in(\partial G)'_{(x^*,y;x,-y^*)}(\zeta^*,\eta)\Leftrightarrow$$
$$(-\zeta^*,-\eta^*)\in(\partial L)'_{(x,y;-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta)\Leftrightarrow(\zeta,\eta)\in(\partial L^*)'_{(y^*,x^*;y,x)}(\zeta^*,\eta^*)\quad....(29)$$

البرهان:

من العلاقة (12) نستنتج أن بيانات المؤثرات $\partial L\ ,\ \partial F\ ,\partial G\ ,\partial L^*$ ايزومورفية لبعضها البعض. بالتالي من المبرهنة(1.7) ينتج أن الشروط من (a) إلى (d) محققة. وأيضا إن بيانات مشتقات بروتو الموافقة لها هي أيضا ايزومورفية وفق نفس الايزومورفيزم لذلك تكون العلاقة (29) محققة أيضا.

مبرهنة (2.13):

لتكن $L:X\times Y\to R$ دالة محدبة – مقعرة ومغلقة وخاصة ولتكن F و G دوالها القرينة، ولتكن L^* دالة من الصف $[\underline{L}^*,\overline{L}^*]$، عندئذ إذا كانت L قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ− هاوسدورف في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ يكون:

$$\partial(F''_{(x,y^*;-x^*,y)})=(\partial F)'_{(x,y^*;-x^*,y)}\quad......\ (30)$$
$$\partial(G''_{(x^*,y;x,-y^*)})=(\partial G)'_{(x^*,y;x,-y^*)}\quad......\ (31)$$
$$\partial(L''_{(x,y;-x^*,-y^*)})=(\partial L)'_{(x,y;-x^*,-y^*)}\quad......\ (32)$$
$$\partial(L^{*''}{}_{(x,y;x^*,y^*)})=(\partial L^*)'_{(x,y^*;-x^*,y)}\quad......\ (33)$$

البرهان:

إذا كانت L قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية وفق مسافة ρ− هاوسدورف في (x,y) بالنسبة لـ $(-x^*,-y^*)$ بالتالي بحسب المبرهنة (2.8) تكون F قابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية في (x,y^*) بالنسبة لـ $(-x^*,y)$ ومنه بحسب المبرهنة (1.7) يكون $(-x^*,y)\in\partial F(x,y^*)$ و ∂F بروتو قابل للاشتقاق في (x,y^*) بالنسبة لـ $(-x^*,y)$ وتكون العلاقة (30) محققة ومن المبرهنة (2.12) تكون الشروط ($(d),(c),(b)$) محققة .

أيضا من العلاقة (29) يكون:

$$\forall(-\zeta^*,\eta)\in(\partial F)'_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta,\eta^*)\Leftrightarrow(\zeta,-\eta^*)\in(\partial G)'_{(x^*,y;x,-y^*)}(\zeta^*,\eta)\Leftrightarrow$$
$$(-\zeta^*,-\eta^*)\in(\partial L)'_{(x,y;-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta)\Leftrightarrow(\eta,\zeta)\in(\partial L^*)'_{(y^*,x^*;y,x)}(\eta^*,\zeta^*)\quad....(34)$$

من الاستنتاج الأخير في المبرهنة (2.7) وبتطبيق العلاقة (12) على الدوال ($L^{*''},L'',G'',F''$) يكون:

$$\forall(-\zeta^*,\eta)\in\partial F''_{(x,y^*;-x^*,y)}(\zeta,\eta^*)\Leftrightarrow(\zeta,-\eta^*)\in\partial G''_{(x^*,y;x,-y^*)}(\zeta^*,\eta)\Leftrightarrow$$

$$(-\zeta^*,-\eta^*)\in\partial L''_{(x,y;-x^*,-y^*)}(\zeta,\eta)\Leftrightarrow(\eta,\zeta)\in\partial L^{*\prime\prime}_{(y^*,x^*;y,x)}(\zeta^*,\eta^*) \qquad .... \quad (35)$$

من (34) و (35) وبما أن $\partial(F''_{(x,y^*;-x^*,y)})=(\partial F)'_{(x,y^*;-x^*,y)}$ تكون العلاقات (31) و (32) و(33) محققة.

وهو المطلوب.

الاستنتاجات والتوصيات:

1 حصلنا على العلاقات التي تربط المشتق من المرتبة الثانية للدوال المحدبة–المقعرة والدوال القرينة المحدبة لها والدوال القرينة المقعرة لها وأيضا الدوال المرافقة لها بالنسبة لمسافة ρ– هاوسدورف.

2 حصلنا على العلاقة التي تربط هذه المشتقات والتفاضلات الجزئية الموافقة لها.

نوصي بأن تدرس هذه النتائج في فضاءات منظمة باستخدام مفهوم سلايس للتقارب ومقارنة النتائج التي سيتم الحصول عليها مع النتائج الموجودة في هذه النشرة العلمية.

المراجع:

[1] ATTOUCH, H. WETS,R .*Quantitative stability of varational systems I*. The epigraphical distance, TranAmer, Soc, 328, 1991, 695-729.

[2] ATTOUC,H; AZE, D ;WETS, R. *Convergence of convex-concave saddle functions* . Ann.H. Poincare, Analyse non linéaire, 5, 1988, 532-572.

[3] ATTOUC,H. *Variational convergence for functions and operators*. Applicable Mathematics Series, Pitman, London, 1984.

[4] ATTOUC,H; LUCCHETTI, R; WETS, R. *The topology of ρ-Hausdorff distance.* AnnaliMat.Pura Appl ,160,1991, 303-320

[5] BEER,G. *Conjugate convex function, and the epi-distance topology*. Proc. Amer. Soc. 108, 1991, 117-126.

[6] BenTal, A; Zowe, J. *Necessary and sufficient for a class of nonsmooth minimization problems*. Math. Prog, 24, 1982,70-91.

[7] BERNAD,F; THIBAULT,F; ZLATEVA,N. *Characterizatios of Prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces*. J. Convex Anal. (3-4), 2006, 525-559.

[8] ChANEY, R, W.*Second-order sufficient conditions nondifferentiable programming problems*. SIAM.J, Control Optim, 20, 1982, 20–33.

[9] CLARKE, F. *Optimizition and nonsmooth analysis*. New-York, Wiley, 1983.

[10] DO, C, N. *Generalized second-order derivatives of convex functions in reflexive Banach spaces*. Trans. Amer. Math.Soc, 334, 1992, 281-210.

[11] EKELAND, I; TEMAM, R. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod Gauthier Villars, 1974, 340.

[12] JOURANI, A; THIBAULT,L. *Differential properties of the Moreau envelope*. Functional Analysis, 266, 2014, 1185-1237.

[13] PENOT, J, P.*The cosmic Hausdorff topology, the bounded Hausdorff topology, and continuity of polarity*. proc. Amer. Math, Soc, 113, 1991, 275-285.

[14] ROCKAFELLAR, R. *Generalized second derivatives convex functions and saddle functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 322 ,1990, 51-77.

[15] ROCKAFELLAR, R. *First and second order pseudo-differentiability in nonlinear programming.* Trans.Amer, Math. Soc, 307, 1988, 75-108

[16] ROCKAFELLAR, R. *Second-order optimality conditions in nonlinear*

programming obtained by way of epi-derivatives. Math of Oper, 14, 1989, 462-484

[17] ROCKAFELLAR, R. *A general correspondence between dual minimax problems and convex program*. Pacific J. Math, 25, 1968, 597-611.

[18] SOUEYCATT, M. *On second-order epi-derivatives in terms of ρ-Hausdorff distance*. Mu'tah Lil-Buhuth Wad-Dirasat, vol. 26, n. 1, 2011, 23-42.

[19] SOUEYCATT, M. *The Convergenc of Level Sets and the Convergence of ε-Solutions in terms of ρ-Hausdorff distance*. Mu'tah Lil-Buhuth Wad-Dirasat, 2007, 111-127.

[20] ZHANG, L; ZHANG, N; XIAO, X.*On the Second-order Directional Derivatives of Singular Values of Matrices and Symmetric Matrix-valued Functions. Set-Valued and Variational Analysis,*Volume 21, Issue 3, September 2013, 557-586.