مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

المجموعة المحدبة وفق المستويات الإحداثية في R^3

الدكتور عدنان ظريف*
الدكتورة براءه عفيصه**

(تاريخ الإيداع 4 / 8 / 2015. قُبِل للنشر في 31 / 5 /2016)

□ ملخّص □

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها محدبة وفق المستويات الإحداثية إذا كان تقاطع أيِّ مستوٍ موازٍ لأيٍّ من المستويات الإحداثية مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة.

في هذا البحث قدمنا نمطاً جديداً في التحدب وهو المجموعات المحدبة وفق المستويات الإحداثية، وحصلنا على مجموعة من النتائج والمبرهنات أهمها إثبات أن كل مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةهي مجموعة محدبة، وعرضنا العديد من الأمثلة التي توضح العلاقة بين المجموعات النجمية والمتراصة وأحادية الترابط والمحدبة إحداثياً والمحدبة وفق المستويات الإحداثية.

الكلمات المفتاحية: المجموعة المحدبة، المجموعة المحدبة إحداثياً ،المجموعة النجمية، المجموعة المتراصة، المجموعة أحادية الترابط .

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين –اللاذقية –سورية.
** مدرسة – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (3) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (3) 2016

Convex set in accordance with the coordinate planes in R^3

Dr. Adnan Zarif [*]
Dr. Brae Afisa [**]

(Received 4 / 8 / 2015. Accepted 31 / 5 /2016)

□ ABSTRACT □

Let A be a set in R^3. A is called a Convex set in accordance with the coordinate planes ,if and only if ,any parallel plane to any coordinate planes was intersected with A is convex set .

In this research we introduced a new style in the convexity is convexity in accordance with the coordinate planes ,and got a some of results and theorems, the most important : proving that every convex set in accordance with the coordinate planes is convex set, and we have offered many examples that illustrate the relationship between starshaped set, compact set , simply connected set , coordinate convex set and convex set in accordance with the coordinate planes .

Key Words: convex set, coordinate convex set, starshaped set, compact set, simply connected set.

[*]**Associate Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**
[**]**Assistant Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة :

يقال عن مجموعة A في الفضاء الاقليدي R^3 إنها محدبة وفق المستويات الإحداثيةإذا كان تقاطع أي مستوٍ موازٍ لأي من المستويات الإحداثية مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة .

ويقال عن A في نفس الفضاء بأنها مجموعة محدبة إحداثياً إذا كان تقاطع أيِّ مستقيم موازٍ لأيٍّ من المحاور الإحداثية oX, oY, oZ مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة.

يقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد إنها مجموعة نجمية إذا وفقط إذا وجدت نقطة a في هذه المجموعة بحيث تكون جميع القطع المستقيمة $[a,x]$ من أجل كل x من A واقعة في A (أي أن جميع نقاط المجموعة A تكون مرئية ضمن A من النقطة a).وعندئذ يقال عن هذه المجموعة إنها نجمية بالنسبة للنقطة a .
ويقال عن مجموعة A في الفضاء الإقليدي إنها مجموعة محدبة إذا وفقط إذا كان $[x,y]\subset A$ من أجل كل x,y من A .كما ويقال عن المجموعة A في نفس الفضاء إنها أحادية الترابط إذا كانت متممتها في R^3 تملك مركبة مترابطة واحدة . التعاريف السابقة واردة في المراجع [1] –[2] –[3] –[4] .

تمت مناقشة العلاقة بين المجموعة المحدبة أحداثيا والنجمية والمتراصة وأحادية الترابط والمحدبة في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد في المرجع [4] ، أما في هذا البحث أدخلنا مفهوم جديد وهو المجموعة المحدبة وفق المستويات الاحداثية وسنعرض العلاقة بينه وبين المفاهيم السابقة.

- الرموز التي سنستخدمها في هذا البحث:

1- الرمز $[a,b]$ يعني القطعة المستقيمة التي طرفاها a,b

2- الرمز $]a,b[$ يعني القطعة المستقيمة باستثناء طرفيها a,b .

أهمية البحث وأهدافه:

هذا البحث يدرس العلاقة بين المفاهيم الرياضية الآتية : المجموعة المحدبة وفق المستويات الإحداثية ، المجموعة المحدبة، المجموعة النجمية، المجموعة المتراصة ، المجموعة أحادية الترابط ، المجموعة المحدبة إحداثياً .

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طريقة البحث على الاستفادة من تعاريف المفاهيم الرياضية السابقة الذكر .

النتائج والمناقشة :

لقد قدمنا نمطاً جديداً للمجموعات المحدبة إحداثياً من خلال التعريف الآتي :

تعريف : نقول عن مجموعة A في الفضاء الاقليدي R^3 إنها محدبة وفق المستويات الإحداثية إذا وفقط إذا كان تقاطع أي مستوٍ موازٍ لأي من المستويات الإحداثية مع المجموعة A عبارة عن مجموعة محدبة .

مبرهنة(1) :

إن أية مجموعة محدبة في الفضاء الإقليدي R^3 هي مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .

البرهان :

لتكن A مجموعة محدبة في الفضاء الإقليدي R^3 عندئذ فإن:

$$[x,y]\subset A \quad ;\forall x,y\in A$$

إذا كان s_1 مستوياً كيفياً يمر من A ويوازي المستوي الإحداثي oxy فإن :

$$(1) \quad A\cap s_1=k_1 \quad : k_1\subset s_1 \ \& \ k_1 // oxy$$

وبما أن $k_1\subset A$ (وذلك من العلاقة (1)) و A محدبة فهذا يعني أن :

$$[x,y]\subset k_1 \quad ;\forall x,y\in k_1$$

بالتالي k_1 مجموعة محدبة وهذا يعني ان $A\cap s_1$ مجموعة محدبة .

وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ s_1 من أسرة جميع المستويات S التي توازي المستوي الاحداثي oxy وتمر من A

نجد أن: $A\cap s_1=k$ (حيث k مستو وهو مجموعة محدبة من أجل كل $s_1\in S$).

وبالطريقة نفسها نبرهن أن تقاطع A مع أي مستوٍ يوازي المستوي الاحداثي oyz وأي مستوٍ يوازي المستوي الاحداثي oxz هو مجموعة محدبة .

مما سبق نجد أن A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحد[illegible]ة .

مبرهنة(2) :

إن أية مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية في الفضاء الإقليدي R^3 هي مجموعة محدبة .

البرهان :

لتكن A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية في R^3 ولنفرض جدلاً أن A ليست محدبة فهذا يعني أن :

$$\exists \ a,b\in A \quad : \quad [a,b]\not\subset A$$

نناقش هنا الحالتين الآتيتين :

<u>الحالة الأولى</u> : كون القطعة المستقيمة $[a,b]$ موازية لأحد المستويات الإحداثية.

<u>الحالة الثانية</u> : كون القطعة المستقيمة $[a,b]$ غير موازية لأي من المستويات الإحداثية.

الحالة الأولى :

لنفرض أن $[a,b]$ توازي المستوي الإحداثي oxy

كما هو مبين بالشكل (1).

فإننا نستطيع إيجاد مستوٍ موازٍ للمستوي الإحداثي oxy

مثل s_1 بحيث أن:

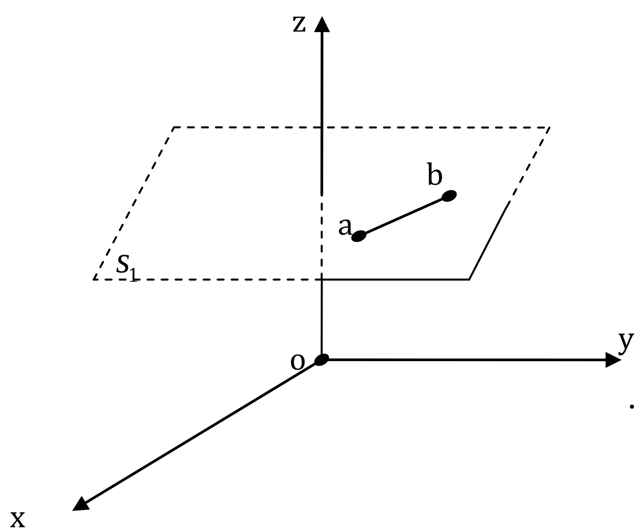
$$s_1\cap A=k \quad \& \quad k\neq\phi \quad \& \quad [a,b]\subset s_1$$

وبما أن $a,b\in A$ و $a,b\in s_1$ فإن :

$a,b\in k$ مع كون $[a,b]\not\subset k$ لأن $[a,b]\not\subset A$.

بالتالي k ليست مجموعة محدبة .

وهذا تناقض مع كون A مجموعة محدبة إحداثياً بقوة.

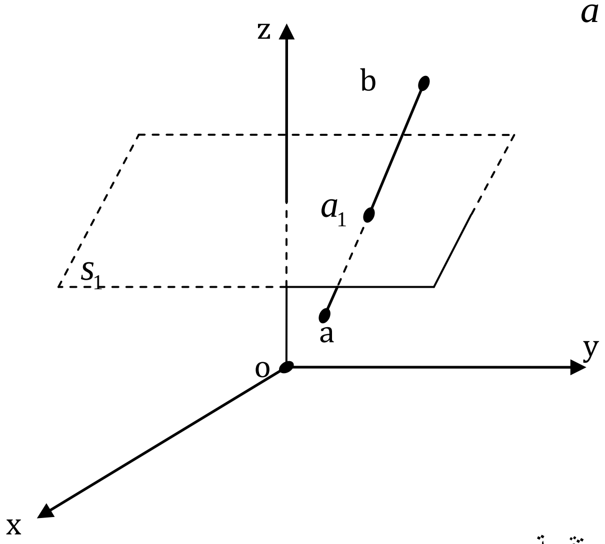


الشكل (1) يمثل المجموعة المبينة في الحالة الأولى

فضمن هذه الحالة نجد أن الفرض $[a,b]\not\subset A$ خاطئ
بالتالي الفرض بأن A ليست محدبة خاطئ والصحيح هو أن
A مجموعة محدبة.
وبنفس الطريقة تتم المناقشة عندما نأخذ $[a,b]$ موازية للمستوي الاحداثي oyz أو oxz .
الحالة الثانية :
كون القطعة المستقيمة $[a,b]$ غير موازية لأي من المستويات الإحداثية.
فإننا نستطيع إيجاد مستوٍ موازٍ للمستوي الاحداثي oxy مثل s_1 المبين بالشكل (2) . بحيث أن :

$$s_1\cap A=k \quad ; \; k\neq\phi \qquad \& \qquad a<a_1<b$$

مع $a_1\in s_1$ حيث $a_1\in[a,b]$.
بما أن $a_1\in[a,b]\not\subset A$ فإن $a_1\notin A$ وهذا
يعني أن $a_1\notin k$
بالتالي $[a_1,x]\not\subset k$ مهما تكن $x\in k$ كون
$a_1\notin k$.
فهذا يعني أن k ليست محدبة وهذا تناقض مع كون
A مجموعة محدبة إحداثياً بقوة.
وكذلك نستطيع إيجاد مستو موازٍ للمستوي الاحداثي
oyz أو oxz ومتقاطع مع $[a,b]$ بنقطة واحدة
(حالة التقاطع معها بأكثر من نقطة يعني أن القطعة المستقيمة $[a,b]$ موازية لأحد المستويات الإحداثية وتمت دراسة ذلك في الحالة الأولى).



الشكل (2)
يمثل المجموعة المبينة في الحالة الثانية

وبنفس الاسلوب نتوصل إلى تناقض مع كون A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية وسبب هذا التناقض هو الفرض الجدلي بأن A ليست محدبة
كذلك كيفما كان توضع القطعة المستقيمة $[a,b]$ في هذه الحالة نستطيع أن نجد مستوياً موازياً لأحد المستويات الاحداثية سيوصلنا إلى تناقض مع كون A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية بالتالي فرضنا خاطئ والصحيح هو أن A مجموعة محدبة .
فمن الحالتين السابقتين نجد أن الفرض A ليست محدبة خاطئ والصحيح أن A مجموعة محدبة $\square$.

مبرهنة(3) :

إن أية مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية في R^3 هي مجموعة محدبة إحداثياً في R^3 .

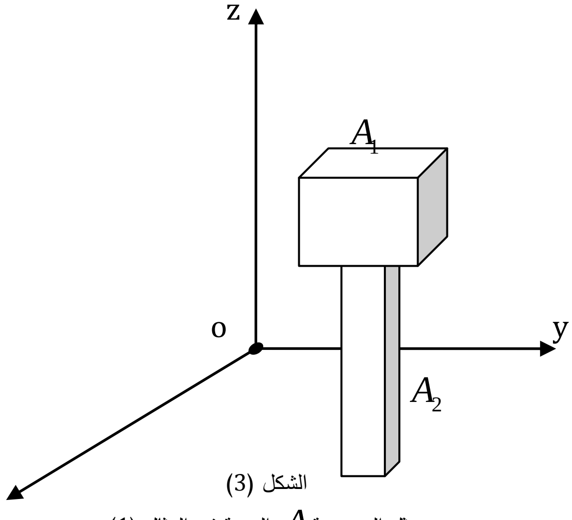
البرهان :

لتكن A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية في R^3 فحسب المبرهنة (2) تكون A مجموعة محدبة . ونعلم أن كل مجموعة محدبة في R^3 هي مجموعة محدبة احداثياً فيه (المرجع [4]) $\Leftarrow$ مجموعة محدبة إحداثياً في R^3 . □

نتيجة (1) :

إن عكس المبرهنة (3) غير صحيح بصورة عامة أي أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة إحداثياً في R^3 مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية فيه

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :



الشكل (3)

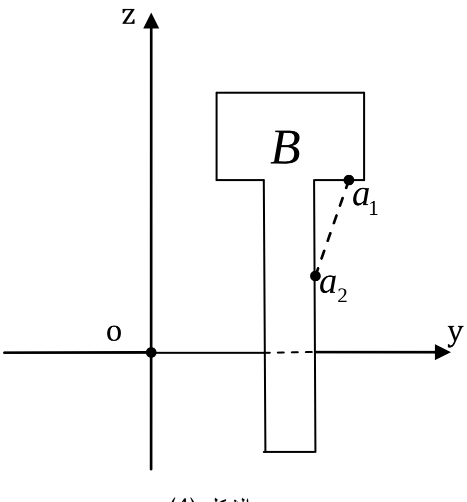
يمثل المجموعة A المبينة في المثال (1)

مثال (1): لتكن $A \subset R^3$ مجموعة مبينة بالشكل (3)

حيث $A = A_1 \cup A_2$

هذه المجموعة محدبة إحداثياً في R^3 لأن أي مستقيم يوازي أيٍّ من المحاور الاحداثية ox أو oy أو oz ومار من هذه المجموعة سوف يتقاطع معها بقطعة مستقيمة والقطعة المستقيمة هي مجموعة محدبة وهذا يعني أن A محدبة احداثياً .

ولكنها ليست مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 لأننا نستطيع إيجاد مستوٍ موازٍ للمستوي الاحداثي oyz ويتقاطع مع المجموعة A بمجموعة B المبينة بالشكل (4) .



الشكل (4)

يمثل المجموعة B المبينة في المثال (1)

وكما نلاحظ أن المجموعة B الناتجة ليست مجموعة محدبة لأننا نستطيع إيجاد النقطتين $a_1, a_2 \in B$ بحيث تكون $[a_1, a_2] \not\subset B$.

وهذا يعني أن A ليست محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .فهذا يعني أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة إحداثياً في R^3 محدبة وفق المستويات الإحداثية.

مبرهنة(4) :

إن أية مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 هي مجموعة نجمية فيه .

البرهان :

لتكن A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 فحسب المبرهنة (2) تكون A مجموعة محدبة فيه. ونعلم أن كل مجموعة محدبة في R^3 هي مجموعة نجمية فيه (المرجع [4]) $\Leftarrow$ A مجموعة نجمية في R^3.□

نتيجة (2) :

إن عكس المبرهنة (4) غير صحيح بصورة عامة أي أنه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة نجمية في R^3 مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية فيه.

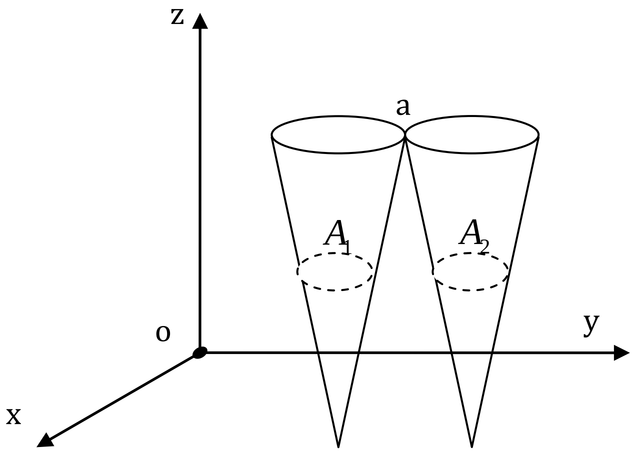
ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

<u>مثال (2)</u>:

لتكن $A \subset R^3$ مجموعة مبينة بالشكل (5)

نلاحظ أن هذه المجموعة نجمية بالنسبة لـ a

وهذا واضح من الشكل(5)ومن تعريف المجموعة النجمية .



الشكل (5)

يمثل المجموعة A المبينة في المثال (2)

ولكنها ليست محدبة وفق المستويات الإحداثيةلأننا نستطيع إيجاد مستوٍ يوازي المستوي الإحداثي oxy ويتقاطع مع A بالمجموعة C حيث $C = A_1 \cup A_2$ وكل من A_1 و A_2 دائرتين . والمجموعة C ليست محدبة لأننا نستطيع إيجاد $a_1 \in A_1 \quad \& \; a_2 \in A_2$ مع كون $[a_1, a_2] \not\subset C$.

مبرهنة(5) :

كل مجموعة متراصة و مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 هي مجموعة أحادية الترابط .

البرهان :

لتكن $A \subset R^3$ مجموعة متراصة ومحدبة وفق المستويات الإحداثيةولنفرض جدلاً أن A ليست أحادية الترابط، فهذا يعني أنه توجد مركبة محدودة واحدة على الأقل لـ $R^3 \setminus A$ مثل C .

ولنأخذ المستوي s_1 الموازي للمستوي الإحداثي oxy والذي يتقاطع مع A ومع C معاً عندئذ نجد أن:

$s_1 \cap A = k$ حيث k مستو محتوى في A ولكنه ليس مجموعة محدبة لأنه:

$[a_1, a_2] \not\subset k \quad : \; \exists a_1, a_2 \in k$ وذلك لأن $[a_1, a_2] \cap C \neq \phi$.

وهذا تناقض مع كون A محدبة وفق المستويات الإحداثية وبذلك تكون A أحادية الترابط .

نتيجة (3) :

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة متراصة في R^3 مجموعة محدبة وفق المستويات الاحداثية فيه

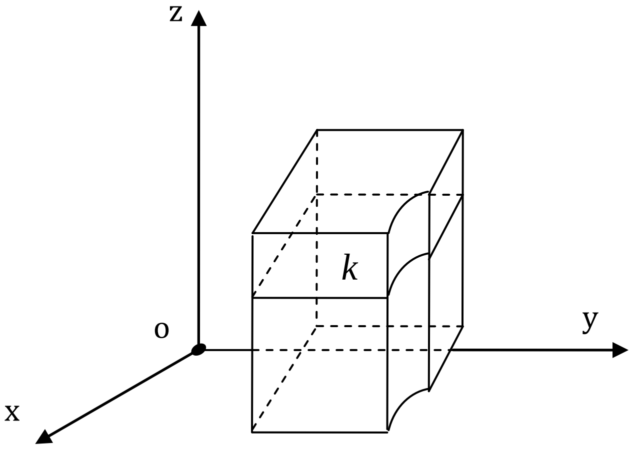
ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (3):

لتكن $A \subset R^3$ مجموعة مبينة بالشكل (6)

كما نلاحظ من الرسم ان المجموعة A مجموعة مغلقة ومحدودة فهي متراصة .

ولكن : $\exists s_1 : s_1 // oxy \ \& \ s_1 \cap A = k$



الشكل (6)

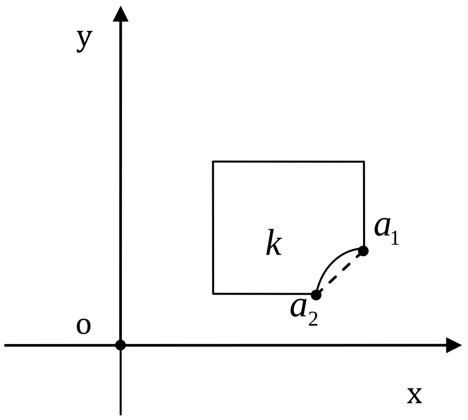
يمثل المجموعة A المبينة في المثال (3)

حيث k مستو محدود مبين بالشكل (7)

وكما نلاحظ أن k ليست محدبة لأن :

$\exists a_1, a_2 \in k \ \ : [a_1, a_2] \not\subset k$

وفي هذه الحالة وجدنا مستوياً s_1 موازياً للمستوي الإحداثي oxy وتقاطعه مع المجموعة A مجموعة غير محدبة لذا فإن المجموعة A ليست محدبة وفق المستويات الإحداثية.



الشكل (7)

يمثل المجموعة k المبينة في المثال (3)

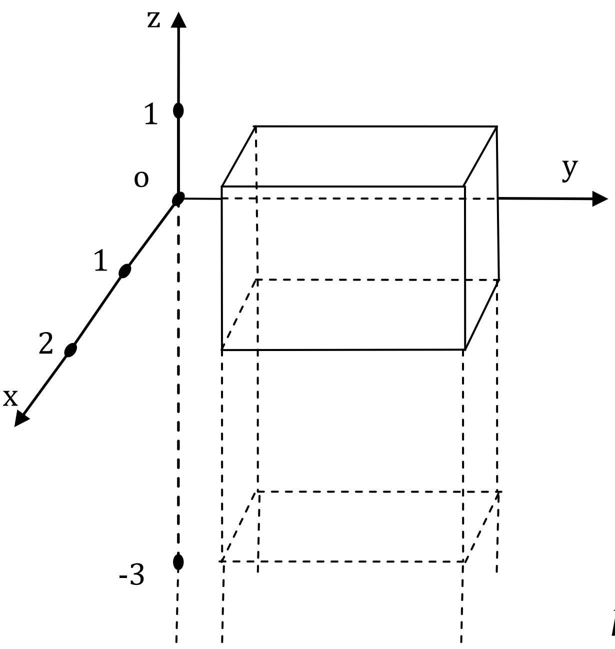
نتيجة (4) :

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية في R^3 مجموعة متراصة.

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (4): لتكن المجموعة $A \subset R^3$ الآتية :

$A = \{(x, y, z) \in R^3 : 1 \le x \le 2 \ \ \& \ 1 \le y \le 3 \ \ \& -3 < z \le 1\}$ والموضحة بالشكل (8) .



الشكل (8)

يمثل المجموعة A المبينة في المثال (4)

سنبرهن أن هذه المجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثية.

ليكن s_1 مستوٍ موازٍ للمستوي الإحداثي oxy

ومار من المجموعة A عندئذ فإن :

$$A \cap s_1 = k \quad : k // oxy \quad \&$$

$$k = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 2 \ \& 1 \le y \le 3\}$$

وهو عبارة عن مستطيل والمستطيل مجموعة محدبة .

وبمراعاة الاختيار الكيفي للمستويات التي توازي المستوي oxy والمار من A فإننا نجد أن تقاطع أي مستوٍ من هذه المستويات مع المجموعة A هو مجموعة محدبة .

وليكن s_1 مستوٍ موازٍ للمستوي الإحداثي oxz

ومار من المجموعة A عندئذ فإن :

$$A \cap s_1 = k_1 \quad : k_1 // oxz \quad \&$$

$$k_1 = \{(x,z) \in R^2 : 1 \le x \le 2 \ \& -3 < z \le 1\}$$

وهذه المجموعة هي مجموعة محدبة لأن

$$[a_1, a_2] \subset k_1 \ ; \forall a_1, a_2 \in k_1$$

وبمراعاة الاختيار الكيفي للمستويات التي توازي المستوي oxz والمار من A فإننا نجد أن تقاطع أي مستوٍ من هذه المستويات مع المجموعة A هو مجموعة محدبة.

وبالطريقة نفسها نبرهن على أن تقاطع المجموعة A مع أي مستوٍ موازٍ للمستوي الاحداثي oyz سيكون مجموعة محدبة لها نفس شكل k_1 ومما سبق نجد أن A محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .

وكما هو واضح من الرسم أن المجموعة A مجموعة غير مغلقة وهذا يعني أن A ليست متراصة .

وهذا المثال يؤكد على انه ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 مجموعة متراصة.

(وهناك أمثلة كثيرة على سبيل المثال : جميع الكرات المفتوحة في الفضاء).

نتيجة (5) :

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة متراصة وأحادية الترابط محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .

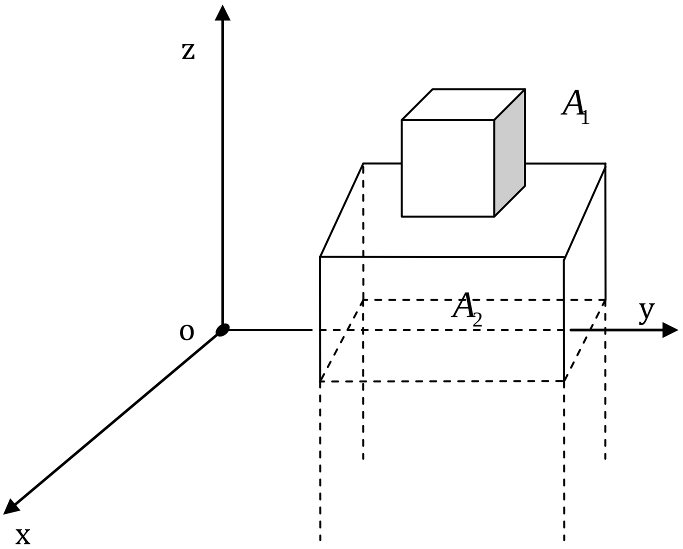
ويوضح ذلك المثال (3) الوارد في النتيجة (3) حيث A متراصة واحادية الترابط في R^3 ووجدنا أنها ليست محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .

نتيجة (6) :

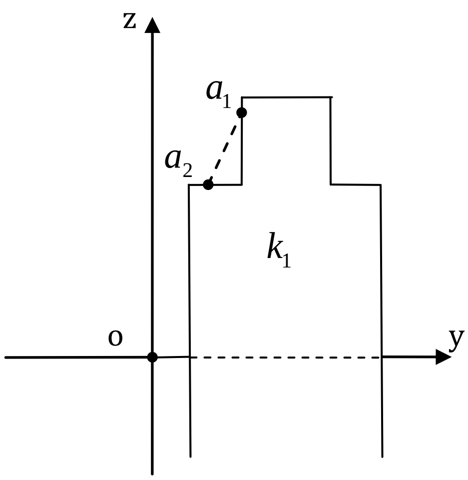
ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة أحادية الترابط مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 .

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

<u>مثال (5)</u>: لتكن $A \subset R^3$ مجموعة مبينة بالشكل (9) بحيث أن : $A = A_1 \cup A_2$ هذه المجموعة عبارة عن مجموعة أحادية الترابط لأن متممتها في R^3 تمثل مجموعة مترابطة واحدة ولكنها ليست محدبة وفق المستويات الإحداثيةلأننا نستطيع إيجاد المستوي s_1 الموازي للمستوي الإحداثي oyz والمار من المجموعة A حيث : $A \cap s_1 = k_1$ & $k_1 // oyz$ ونوضح k_1 بالشكل (10)



الشكل (9)
يمثل المجموعة A المبينة فى المثال (5)



الشكل (10)
يمثل المجموعة k_1 المبينة فى المثال (5)

وكما نلاحظ من الشكل (10) أن k_1 ليست محدبة لأن $\exists a_1, a_2 \in k \; : [a_1, a_2] \not\subset k$ وهذا يعني أن A ليست محدبة وفق المستويات الإحداثية.

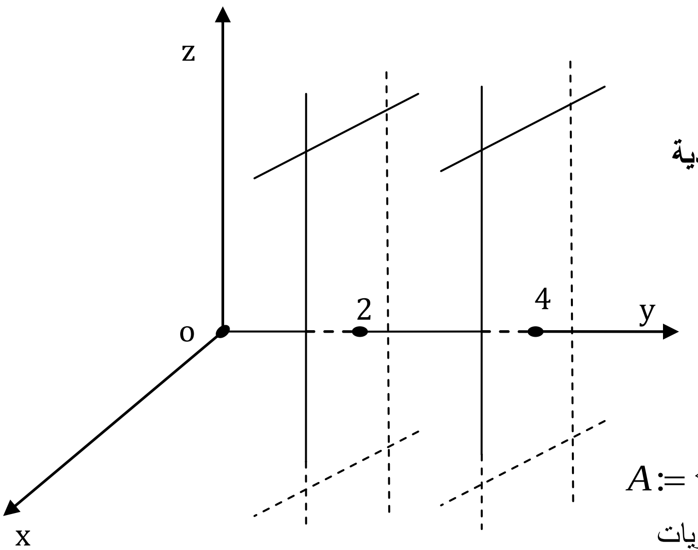
نتيجة (7) :

ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 مجموعة أحادية الترابط فيه .

ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

<u>مثال (6)</u>:

لتكن $A \subset R^3$ مجموعة مبينة بالشكل (11)



الشكل (11)
يمثل المجموعة A المبينة فى المثال (6)

$$A := \{(x, y, z) \in R^3 : 2 \le y \le 4 \;\; \& \;\; \forall x, z \in R\}$$

نلاحظ أن المجموعة A مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةويتم ذلك بشكل مشابه لما تم في النتائج السابقة .

وكما نلاحظ من الشكل (11) انها ليست أحادية الترابط لأن

متممتها في R^3 تملك مركبتين مترابطتين .

مبرهنة (6) :في حالة كانت المجموعة المدروسة A في المسالة الأساسية في العمل [4] مجموعة محدبة وفق المستويات الإحداثيةفي R^3 لأصبحت محققة من دون شروط وذلك بالاستفادة من المبرهنة (4) التي تبرهن أن A نجمية بالتالي تكتب بشكل اجتماع لنفسها n مرة .

الاستنتاجات والتوصيات :

لقد قدمنا مفهوماً جديداً في التحدب وهو مفهوم المجموعة المحدبة وفق المستويات الإحداثيةوأثبتنا أن هذا المفهوم يكافئ مفهوم التحدب واستنتجنا من ذلك العديد من العلاقات بين المجموعات النجمية والمتراصة وأحادية الترابط والمحدبة إحداثياً والمحدبة وفق المستويات الإحداثية.

ونوصي بتعميم هذا المفهوم من أجل المجموعات المحدبة مترياً بدلاً من التحدب الخطي.

(تعريف **المجموعة المحدبة مترياً** : [4]

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (R^3, d) [d تابع مسافة كيفي مولد بنظيم] ، يقال عن A إنّها مجموعة d–محدّبة (d– convex set) (محدّبة مترّياً) إذا تحقّقت، من أجل كلّ نقطتين x, y من نقاط A العلاقة الآتية:

$$<x, y> \subset A$$

حيث : $$(<x, y> := \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}$$

المراجع

1- BOLTYANSKI.V.G,SOLTAN,P.S,*Combinotorial Geometry of Classes of Convex Sets* , (in Russian) . Stinica .Kishinev. .1978-279P .

2- TABALE. A .E ., ZARIF,A–*One Theorem a Starshaped Sets* (in Russian) .Ezvistia . Akad .Nauk .MSSR.1994 N14-P .16-20.

3– ظريف، عدنان.، الوسوف،أحمد.، عفيصة، براءة. *التحدب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية في* R^2 *(أطروحة ماجستير)*–جامعة تشرين–2006 م.

4–ظريف ، عدنان .،محفوض، سهيل.،عفيصه ، براءه . *دراسة معممة في التحدب الإحداثي واجتماع المجموعات النجمية* (أطروحة دكتوراه)– جامعة تشرين – 2011م .