

طريقة عددية لإيجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور سمير احسان**

حسن نواف ضاهر***

(تاريخ الإيداع 14 / 7 / 2016. قُبل للنشر في 27 / 10 / 2016)

□ ملخص □

تم في هذا البحث تقديم طريقة عددية تكرارية لإيجاد القيم التقريبية للتكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية. تعتمد الطريقة المقترحة على تقريب دالة التكاملات الأحادية بكثيرة حدود شرائحية من الدرجة الخامسة، ثم استخدام نقاط غوص-ليجنر بالإضافة إلى التقريبات الشرائحية لإيجاد التكاملات الثنائية والثلاثية. تبين الدراسة أن الطريقة تكون متقاربة من الرتبة السادسة عند تطبيقها لإيجاد التكاملات الأحادية، وتكون أيضاً متقاربة من الرتبة السادسة عند تطبيقها لإيجاد التكاملات الثنائية والثلاثية باستخدام ثلاث نقاط غوصية أو أكثر. تم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بتطبيقها لإيجاد بعض التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية المختلفة ثم مقارنة نتائج هذه الطريقة مع نتائج بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: تكاملات أحادية ومضاعفة، كثيرة حدود شرائحية مجمعة، نقاط غوص-ليجنر، الخطأ المققطع، مرتبة التقارب.

* أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Numerical Method for Finding Single and Multiple Integrals

Dr. Suliman M. Mahmood*

Dr. Sameer Ehssan **

Hasan N.Daher ***

(Received 14 / 7 / 2016. Accepted 27 / 10 / 2016)

□ ABSTRACT □

In this paper, an iterative numerical method for obtaining approximate values of definite single, double and triple integrals will be illustrated. This method depends on approximating the single integral function by spline polynomial of fifth degree, while Gauss Legendre points as well as spline polynomials are used for finding multiple integrals.

The study shows that when the method are applied to single integrals is convergent of order sixth, as well as when applied to triple integrals is convergent of order sixth for three Gauss Legendre points or greater.

Errors estimates of the proposed method alongside numerical examples are given to test the convergence and accuracy of the method.

Key Words: Single and Multiple Integrals, Spline Collocation Polynomial, Gauss Legendre Points, Truncation Error, Order of Convergence.

* Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria..

** Assistant Prof, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Depart. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

مقدمة:

عندما تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التداخلات بينها وتطورت بشكل كبير وبدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية، كيميائية، بيولوجية أو هندسية، كان للتكاملات بمختلف أنواعها دوراً بارزاً في تفسير هذه الظواهر وإيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليلية أو عددية. و للتكاملات أهميتها الخاصة بين فروع العلوم الرياضية المختلفة مثل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية ونظرية المؤثرات و التحليل الدالي.

ولذلك يمكن القول " إنه لا يوجد علم من العلوم المختلفة إلا وتلعب التكاملات دوراً بارزاً فيه" ولذلك نجد أن كثيراً من الباحثين استطاعوا استنباط طرائق عديدة مختلفة لإيجاد حلول تقريبية لهذه المسائل.

فُدمت عدة دراسات [1-8] لإيجاد طرائق عديدة لتقريب قيم التكاملات المحدودة الفردية والمضاعفة

والثلاثية نذكر منها :

قدم Aghigh وآخرون في عام 2006 طرائق عديدة لتقريب قيم التكاملات الأحادية المحدودة باستخدام قواعد تربيعية موزونة و أصفار كثيرات الحدود المتعامدة و درس Sidi عام 2006 طريقة لإيجاد القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية بإتباع قاعدة تغيير المتحول وقاعدة أشباه المنحرفات و قدم Rathod and Nagaraja في 2007 خوارزمية تعتمد على طريقة العناصر المنتهية وصيغ غاوص ليجندر لتقريب قيم التكاملات الثلاثية و أوجد Hashish وآخرون عام 2009 خوارزمية تعتمد على الموجات، والموجبات هي أنواع من الدوال تحقق خصائص رياضية هامة مثل التعامد، ومن هذه الدوال: موجة Haar، وموجة Daubechies . وأنشاء Siraj-ul-Islam وآخرون في عام 2010 خوارزمية تستخدم موجات Haar لإيجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية . قدم Marinov وآخرون عام 2014 دراسة سلوك الأخطاء المرتكبة في التكاملات الأحادية لثلاث طرائق مختلفة هي طريقة النقطة الوسطى Midpoint شبه المنحرف Trapezoidal وطريقة سمبسون Simpson بإعادة استخدام شبكة عقد مختلفة وحساب معدل التقارب.

قارن Ullah عام 2014 بين ثلاث طرائق مختلفة وهي طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون و طريقة ويدل Weddle لاختيار القاعدة الأفضل والحصول على القيمة الأكثر دقة من بين جميع الحالات. استخدم Chernyshenko and Fangohr عام 2015 طريقة الفروق المنتهية لحساب التكاملات الأحادية والمضاعفة وتمت المقارنات مع طرائق أخرى مختلفة.

نقدم في هذه الورقة تقنيات عديدة تكرارية لإيجاد قيم التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية من الشكل:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dy dx \quad (2)$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)dz dy dx \quad (3)$$

حيث إن $e \leq z \leq f, c \leq y \leq d, a \leq x \leq b$

أهمية البحث وأهدافه:

يلجأ الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية إلى تصميم نماذج رياضية للمساعدة في فهم الظواهر المختلفة، وهذه النماذج غالباً ما تؤدي إلى صياغة تكاملات، نشاهدها كثيراً في مسائل الفيزياء، والكيمياء والهندسة وفروع مختلفة. ولكن المشكلة التي تواجه هؤلاء هي عدم وجود حلول دقيقة لمثل هذه النماذج ومن هنا تكمن أهمية الحل العددي. لهذا نهدف هنا إلى دراسة طريقة عددية لتقريب التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية المحدودة، ثم إعداد البرمجيات اللازمة لهذه المسائل وحلها حاسوبياً.

طرائق البحث وموارده:

نناقش في هذه الورقة طريقة عددية لحساب القيم التقريبية للتكاملات الأحادية المحدودة وذلك بالاعتماد على كثيرات حدود شرائحية من الدرجة السادسة مع ثلاث نقاط تجميع، ونناقش أيضاً طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الفردية والثنائية والثلاثية بالاعتماد على كثيرات حدود شرائحية بالإضافة إلى استخدام صيغة غوص ليجندر. يتم أيضاً تقديرات للأخطاء لهذه الطرائق عندما يتم تطبيق الطريقة لكل نوع من هذه التكاملات. ستختبر الطريقة بحل عدد من مسائل الاختبار التي ستظهر فعاليتها عندما تطبق لإيجاد قيم لبعض التكاملات ومقارنة النتائج مع طرائق أخرى.

النتائج والمناقشة:

صياغة طريقة عددية لإيجاد التكاملات الأحادية:

لحل المسألة (1) نستخدم تجزئة منتظمة: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ للمجال $[a, b]$ ، حيث $x_i = a + ih$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ ، و $h = (b - a) / n$ طول الخطوة. تستخدم الطريقة الشرائحية نقاط التجميع الثلاث الآتية:

$$x_{k+z_j} = x_k + z_j h, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

في كل مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ ، $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، مع ثلاثة وسطاء:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 = 1 \quad (5)$$

نعرف كثيرة حدود شرائحية من الدرجة السادسة في كل مجال جزئي I_k كالآتي:

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{(x-x_k)^{i+1}}{(i+1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=3}^5 \frac{(x-x_k)^{j+1}}{(j+1)!} C_{k,j-2}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (6)$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

حيث $S^{(i)}(a) = S_0^{(i)} = f_0^{(i)}$ ، $(i = 0, 1, 2)$ وهي معلومة من شروط البدء، و $S_k^{(i)}$ هي قيمة تقريبية للمشتق من الدرجة i لكثيرة الحدود الشرائحية عند x_k ، و $C_{k,j-2}$ هي مجاهيل يطلب تعيينها.

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد n شريحة $S_k(x)$ ، $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، نسميها كثيرة حدود شرائحية تعطى

بالشكل:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \vdots & \\ S_k(x), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

وباشتقاق العلاقة (6) مرتين متتاليتين بالنسبة لـ x نحصل على الآتي:

$$S'_k(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{(x-x_k)^i}{(i)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=3}^5 \frac{(x-x_k)^j}{(j)!} C_{k,j-2}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (7)$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

$$S''_k(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{(x-x_k)^{i-1}}{(i-1)!} S_k^{(i)} + \sum_{j=3}^5 \frac{(x-x_k)^{j-1}}{(j-1)!} C_{k,j-2}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (8)$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

فإذا اعتبرنا أن $S'_k(x)$ تساوي تقريبا دالة التكامل الأحادي $f(x)$ فوق كل مجال جزئي، أمكن تطبيق الشرائح (7) على التكامل الأحادي (1)، فينتج لدينا:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x) dx \quad (9)$$

حيث:

$S_k(x)$ هي دالة التكامل للدالة $S'_k(x)$ في المجال الجزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1$ كما ونجد بسهولة أن العلاقة (9) تكتب بالشكل:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (10)$$

باستخدام نقاط التجميع الثلاث المعرفة في العلاقتين (4)-(5) وتطبيقها إلى العلاقة (10) بعد اشتقاقها

بالنسبة إلى x مرتين متتاليتين، نحصل على جملة المعادلات الآتية :

$$S'_k + h z_j S''_k + \frac{(h z_j)^2}{2!} C_{k,1} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,2} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,3} = f'(x_{k+z_j}), \quad (11)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad k = 0, \dots, n-1$$

وهذه الجملة يمكن إعادة كتابتها بالشكل المصفوفي:

$$A \bar{C}_k + R_1 \bar{S}_k = \bar{f}_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (12)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} \frac{z_1^2}{2!} & \frac{z_1^3}{3!} & \frac{z_1^4}{4!} \\ \frac{z_2^2}{2!} & \frac{z_2^3}{3!} & \frac{z_2^4}{4!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & h z_1 \\ 0 & 1 & h z_2 \\ 0 & 1 & h \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} h^2 C_{k,1} \\ h^3 C_{k,2} \\ h^4 C_{k,3} \end{bmatrix}, \bar{S}_k = \begin{bmatrix} S_k \\ S'_k \\ S''_k \end{bmatrix}, \bar{f}_k = \begin{bmatrix} f'(x_{k+z_1}) \\ f'(x_{k+z_2}) \\ f'(x_{k+1}) \end{bmatrix}$$

إن المنظومة (12) قابلة للحل دائماً من أجل $0 < z_1 < z_2 < z_3 = 1$ ويمكن تعيين المجاهيل الثلاثة \bar{C}_k في كل مجال جزئي $[x_k, x_{k+1}]$ لأن المصفوفة A غير شاذة حيث نجد أن:

$$\text{Det}(A) = (z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_1 z_2)^2 (z_2 - z_1) \neq 0$$

بعد حساب المجاهيل \bar{C}_k من العلاقة التكرارية (12) نعوض في كثيرة الحدود الشرائحية (6) التي تعطينا قيمة تقريبية للتكامل العددي فوق كل مجال جزئي كالتالي:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_k)$$

تحديد الخطأ للطريقة الشرائحية لأجل التكامل الأحادي:

تعريف (1) [10]: يقال عن طريقة إنها متسقة (consistent) من الرتبة p إذا كان $\|T\|_{\infty} = \max_{0 \leq k \leq N} \|\tau_k\| = O(h^p)$ حيث τ_k هو خطأ الاقتطاع الموضوعي للطريقة عند x_k .

بفرض أن $F(x) \in C^7[a, b]$ هي الدالة الأصلية لدالة التكامل الأحادي $f(x)$ وأن $S_k(x)$ هي دالة الشريحة التقريبية. وبفرض أن $T = (\bar{\tau}_k)$ هو متجه ذو ثلاث مركبات، حيث $\bar{\tau}_k$ هو الخطأ المتقطع الموضوعي. بتطبيق التقريب الشرائحي (6) في نقاط التجميع $x_{k+z_j} = x_k + z_j h$ ($j = 1, 2, 3$) وبوضع بشكل تقريبي: $S_k(x_{k+z_j}) \cong F_k(x_{k+z_j})$ و $f^{(m)}(x_k) \cong S_k^{(m)}$ ، $m=1, 2$ ، نحصل على صيغة الخطأ المتقطع الموضوعي:

$$\bar{\tau}_k = h^2 B \bar{C}_k + \bar{\Psi}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

حيث

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} h z_1 S_k + \frac{h^2 z_1^2}{2!} S_k' + \frac{h^3 z_1^3}{3!} S_k'' - F(x_k + z_1 h) \\ h z_2 S_k + \frac{h^2 z_2^2}{2!} S_k' + \frac{h^3 z_2^3}{3!} S_k'' - F(x_k + z_2 h) \\ h S_k + \frac{h^2}{2} S_k' + \frac{h^3}{3!} S_k'' - F(x_k + h) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{z_1^4}{4!} & \frac{z_1^5}{5!} & \frac{z_1^6}{6!} \\ \frac{z_2^4}{4!} & \frac{z_2^5}{5!} & \frac{z_2^6}{6!} \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{6!} \end{bmatrix}$$

وبحساب \bar{C}_k من العلاقة (12) وتعويضها في العلاقة (13)، نحصل على:

$$\bar{\tau}_k = h^2 B A^{-1} (\bar{f}_k - R_1 \bar{S}_k) + \bar{\Psi}_k \quad (14)$$

وباستخدام منشور تايلور للدالة $F(x)$ حول x_k والتعويض في (14) ينتج لدينا:

$$\bar{\tau}_k = h^2 B A^{-1} (\bar{f}_k - R_1 \bar{S}_k) + \bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \frac{1296 F^{(6)}(x_k) + 515 h F^{(7)}(x_k)}{464486400} h^7 \\ \frac{288 F^{(6)}(x_k) + 115 h F^{(7)}(x_k)}{62001450} h^7 \\ \frac{12 F^{(6)}(x_k) + 5 h F^{(7)}(x_k)}{1209600} h^7 \end{bmatrix}, k = 0, \dots, n-1 \quad (15)$$

وبالتالي:

$$\|\bar{\tau}_k\|_{\infty} = \frac{12 |F^{(6)}(x_k)| + 5 h |F^{(7)}(x_k)|}{1209600} h^7 \equiv O(h^7); \quad \|\bar{\tau}_k\|_{\infty} = \text{Max} \sum_j a_j$$

حيث

$$F(x) = \sum_{i=0}^7 \frac{(x-x_k)^i}{i!} F^{(i)}(x_k) + O(h^8), \quad x \in [x_k, x_{k+1}] ,$$

لقد تم هنا استخدام وسطاء التجميع $z_1=1/2$, $z_2=2/3$ لتوضيح النتيجة، وذلك لا يؤثر على عمومية المسألة. نلاحظ من العلاقة (15) أن الخطأ الموضوعي هو عند الخطوة k من الرتبة السابعة للطريقة الشرائحية المطبقة لإيجاد التكامل الأحادي، وأما الخطأ الشامل على طول مجال الحل $[a, b]$ سيكون من أجل n خطوة وبالتالي فان:

$$\|T\|_{\infty} = n.O(h^7) = \frac{b-a}{h} O(h^7) \equiv O(h^6)$$

نتيجة 1: نجد بحسب التعريف (1) أن الطريقة الشرائحية المطبقة لإيجاد التكامل الأحادي تكون متناسقة من الرتبة السادسة.

صياغة طريقة عددية لإيجاد التكاملات الثنائية:

إن الطريقة التي سنقدمها لإيجاد التكاملات الثنائية (2) التي تملك دالة التكامل $f(x, y)$ تعتمد على استخدام صيغة غوص-ليجنندر على المحور y وطريقة الشريحة الموصوفة في التكامل الأحادي على المحور x . ولكن قبل البدء بصياغة الطريقة سنقدم فكرة حول صيغة غوص ليجنندر للتكاملات الأحادية.

صيغة غوص - ليجنندر [9] Gauss-Legendre formula

تُطبَّق صيغة غوص-ليجنندر لإيجاد التكامل الأحادي من الشكل:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \quad (16)$$

إن مبدأ عمل صيغة غوص-ليجنندر يقول: إذا كانت الدالة $f(t)$ للتكامل (16) كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي $(2N-1)$ فإن التكامل (16) يعطى بدقة تامة (Exact) باستخدام N نقطة غوصية t_i وفق الصيغة الآتية:

$$I[t_1, t_2, \dots, t_N] = \sum_{i=1}^N w_i f(t_i) \quad (17)$$

حيث تسمى w_i أوزاناً، وتدعى t_i نقاط غوص، ولكن نحتاج لتعيين الأوزان w_i ونقاط غوص t_i . يتم تعيين نقاط غوص t_1, t_2, \dots, t_N التي عددها N لصيغة تكامل غوص - ليجنندر (17) من أصفار (جذور) كثيرة حدود ليجنندر من الدرجة N التي تعرف بالصيغة الآتية:

$$L_N(t) = \sum_{i=0}^{[N/2]} (-1)^i \frac{(2N-2i)!}{2^N i!(N-i)!(N-2i)!} t^{N-2i} \quad (18)$$

حيث $[N/2]$ هي أكبر عدد صحيح موجب أصغر أو يساوي $N/2$ ، وكثيرات حدود ليجنندر $L_N(t)$ تحقق العلاقة التراجعية الآتية:

$$L_N(t) = \frac{1}{N} [(2N-1)t L_{N-1}(t) - (N-1)L_{N-2}(t)], \quad N \geq 2 \quad (19)$$

باستخدام العلاقتين (17)-(18) يمكن تعيين بعض حدوديات ليجنندر الأولى من الحدودية:

$$N=0 \rightarrow L_0(t) = 1, \quad N=1 \rightarrow L_1(t) = t,$$

$$N=2 \rightarrow L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1], \quad N=3 \rightarrow L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t],$$

$$N=4 \rightarrow L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^4 - 30t^2 + 3], \quad N=5 \rightarrow L_5(t) = \frac{1}{8}[63t^5 - 70t^3 + 15t],$$

بعد تعيين نقاط غوص t_i ($i=1,2,\dots,N$) التي أصبحت معلومة كجذور لـ $L_N(t) = 0$ ، يمكننا بعد ذلك الحصول على الأوزان w_i ($i=1,2,\dots,N$) لصيغة تكامل غوص ليجندر ذات الـ N نقطة غوصية بحل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & \dots & t_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{m-1} & t_2^{m-1} & \dots & t_m^{m-1} & \dots & t_N^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \dots & t_m^{N-1} & \dots & t_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ [1 - (-1)^m]/m \\ \vdots \\ [1 - (-1)^N]/N \end{bmatrix} \quad (20)$$

يمكننا تعيين عناصر متجه الطرف الأيمن (RHS) ذي الدليل m للجملة (20) كتكامل لحدودية من الدرجة

: $m-1$

$$RHS(m) = \int_{-1}^1 t^{m-1} dt = \frac{1}{m} t^m \Big|_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^m}{m}$$

ملاحظة: كما هو معلوم فإن تكامل غوص - ليجندر يستخدم حدود التكامل (16) على المجال $[-1, 1]$ ، وحتى لا تنحصر تطبيقاتنا فقط في هذا المجال نستطيع إجراء تغيير للمتحول y في المجال $[c, d]$ إلى متحول t في المجال $[-1, 1]$ كما يلي:

$$y = \frac{(d-c)t + (c+d)}{2} = \frac{d-c}{2}t + \frac{c+d}{2},$$

$$.dy = \frac{d-c}{2} dt \text{ وكذلك } t \in [-1, 1], \quad y \in [c, d]$$

سنطبق أولاً صيغة غوص ليجندر للتكامل المضاعف على الدالة $f(x, y)$ بالنسبة للمتغير y في المجال $[c, d]$ بعد تغييره إلى المتحول t في المجال $[-1, 1]$ كالآتي:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx &= \int_a^b \left[\frac{(d-c)}{2} \int_{-1}^1 f(x, t) dt \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{(d-c)}{2} \sum_{i=1}^N w_i f(x, t_i) \right] dx \end{aligned} \quad (21)$$

بتطبيق صيغة غوص-ليجنر يتحول التكامل الثنائي (2) إلى أحادي كما يبين التكامل الأخير في العلاقة

$$(21), \text{ وبتطبيق طريقة الشريحة على الدالة } ff(x) = \frac{(d-c)}{2} \sum_{i=1}^N w_i f(x, t_i) \text{ بالنسبة للمتغير } x \text{ في المجال}$$

$$[a, b], \text{ فإذا اعتبرنا أن الشريحة } S'_k(x) \text{ تساوي تقريبا الدالة } ff(x) \text{ فوق كل مجال}$$

جزئي $k=0, 1, \dots, n-1$ ، $[x_k, x_{k+1}]$ ، يمكن تطبيق الشرائح (7) على التكامل (21)، فينتج لدينا:

$$\int_a^b ff(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} ff(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x)dx \quad (22)$$

حيث:

• $I_k = [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1$ هي دالة التكامل للدالة $S'_k(x)$ في المجال الجزئي I_k كما ونجد بسهولة أن العلاقة (22) تكتب بالشكل:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} ff(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x)dx, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (23)$$

باشتقاق طرفي العلاقة (23) بالنسبة إلى x مرتين متتاليتين واستخدام نقاط التجميع الثلاث المعرفة في

العلاقين (4)-(5) وتطبيقها إلى طرفي العلاقة (23)، نحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$S'_k + h z_j S''_k + \frac{(h z_j)^2}{2!} C_{k,1} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,2} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,3} = ff'(x_{k+z_j}), \quad (24)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad k = 0, \dots, n-1$$

حيث إن $ff'(x) = \frac{(d-c)}{2} \sum_{i=1}^N w_i f'(x, t_i)$ ، وبالتالي $ff'(x_{k+z_j}) = \frac{(d-c)}{2} \sum_{i=1}^N w_i f'(x_{k+z_j}, t_i)$

يمكن إعادة كتابة (24) بالشكل المصفوفي:

$$A \bar{C}_k + R_1 \bar{S}_k = \bar{\Gamma}_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (25)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} \frac{z_1^2}{2!} & \frac{z_1^3}{3!} & \frac{z_1^4}{4!} \\ \frac{z_2^2}{2!} & \frac{z_2^3}{3!} & \frac{z_2^4}{4!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_k = \begin{bmatrix} h^2 C_{k,1} \\ h^3 C_{k,2} \\ h^4 C_{k,3} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} ff'(x_{k+z_1}) \\ ff'(x_{k+z_2}) \\ ff'(t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

إن الصيغة (25) مكافئة للصيغة (12) ولا تختلف عنها سوى بمتجه الطرف الأيمن $\bar{\Gamma}_k$.

صياغة طريقة عددية لإيجاد التكاملات الثلاثية:

لإيجاد التكاملات الثلاثية من الشكل (3) سنطبق صيغة غوص-ليجنر مرتين بالنسبة للمتغيرين z

و y ثم نطبق طريقة الشريحة الموصوفة في التكامل الأحادي على المحور x .

سنطبق أولاً صيغة غوص ليجنر للتكامل الثلاثية على الدالة $f(x, y, z)$ بالنسبة للمتغير z في المجال

$[e, f]$ وبالنسبة للمتغير y في المجال $[c, d]$ بعد تغييرهما إلى متحولين T و t على الترتيب في المجال $[-1, 1]$

كالاتي:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \left[\frac{(d-c)}{2} \frac{(f-e)}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, t, T) dt dT \right] dx \quad (26)$$

$$= \int_a^b \left[\frac{(d-c)}{2} \frac{(f-e)}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N w_i w_r f(x, t_i, t_r) \right] dx$$

تم إجراء تغيير للمتحوّل z في المجال $[e, f]$ إلى متحوّل T في المجال $[-1, 1]$ كما يلي:

$$z = \frac{f-e}{2}T + \frac{e+f}{2},$$

$$. dz = \frac{f-e}{2} dT \text{ ، وكذلك } T \in [-1, 1], z \in [e, f]$$

يبين التكامل الأخير في العلاقة (26) أنه بتطبيق صيغة غوص-ليجنر مرتين متتاليتين تحوّل التكامل الثلاثي إلى تكامل أحادي، والآن يمكن تطبيق طريقة الشريحة على دالة التكامل الأخير في العلاقة (26) والتي نضعها كالاتي:

$$fff(x) = \frac{(d-c)}{2} \frac{(f-e)}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N w_i w_r f(x, t_i, T_r), \quad x \in [a, b]$$

فإذا اعتبرنا أن الشريحة $S'_k(x)$ تساوي تقريبا الدالة $fff(x)$ فوق كل مجال جزئي $k=0, 1, \dots, n-1$ ، $[x_k, x_{k+1}]$ ، يمكن تطبيق الشرائح (7) على التكامل الأخير (26)، فينتج لدينا:

$$\int_a^b fff(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} fff(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x) dx \quad (27)$$

حيث:

$S_k(x)$ هي دالة التكامل للدالة $S'_k(x)$ في المجال الجزئي $k=0, 1, \dots, n-1$ ، $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ ، كما ونجد بسهولة أن العلاقة (27) نكتب بالشكل:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} fff(x) dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} S'_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (28)$$

باشتقاق طرفي العلاقة (28) بالنسبة إلى x مرتين متتاليتين واستخدام نقاط التجميع الثلاث المعرفة في

العلاقتين (4)-(5) وتطبيقها إلى طرفي (23)، نحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$S'_k + h z_j S''_k + \frac{(h z_j)^2}{2!} C_{k,1} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,2} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,3} = fff'(x_{k+z_j}), \quad (29)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$. fff'(x) = \frac{(d-c)}{2} \frac{(f-e)}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N w_i w_r f'(x, t_i, T_r) \text{ حيث إن}$$

وبإعادة كتابة الصيغة التكرارية (29) بالشكل المصفوفي نحصل على:

$$A \bar{C}_k + R_1 \bar{S}_k = \bar{\Phi}_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (30)$$

حيث

$$\bar{\Phi}_k = \begin{bmatrix} fff'(x_{k+z_1}) \\ fff'(x_{k+z_2}) \\ fff'(t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

إن الصيغة (30) مكافئة للصيغة (12) وتختلف عنها فقط بمتجه الطرف الأيمن $\bar{\Phi}_k$.

نقدم في الجدول (1) أصفار حدوديات ليجندر $L_N(t)$ والأوزان الموافقة لها المستخدمة في حساب التكاملات الثنائية والثلاثية.

الجدول 1: أصفار حدوديات ليجندر $L_N(t)$ والأوزان الموافقة لها.

أصفار كثيرات حدود ليجندر t_i و الأوزان الموافقة لها w_i	كثيرة حدود ليجندر
$t_1 = -\sqrt{3}/3, t_2 = \sqrt{3}/3$ $w_1 = 1, w_2 = 1$	$L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1]$
$t_1 = -\sqrt{3/5}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{3/5}$ $w_1 = w_3 = 5/9, w_2 = 8/9$	$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$
$t_1 = -0.86113631159405; t_2 = -0.3399810435848;$ $t_3 = 0.3399810435848; t_4 = 0.86113631159405.$ $w_1 = w_4 = 0.34785484513745385;$ $w_2 = w_3 = 0.652145154862546.$	$L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^4 - 30t^2 + 3]$
$t_1 = -0.9061798459386641; t_2 = -0.538469310105683; t_3 = 0$ $t_4 = 0.538469310105683; t_5 = 0.9061798459386641.$ $w_1 = w_5 = 0.23692688505618922; w_3 =$ $0.5688888888888889;$ $w_2 = w_4 = 0.4786286704993663;$	$L_5(t) = \frac{1}{8}[63t^5 - 70t^3 + 15t]$

تحديد الخطأ للطريقة العددية لأجل التكاملات الثنائية والثلاثية

يقدر الخطأ الشامل للطريقة المقترحة للتكاملات الثنائية والثلاثية بحساب الخطأ الشامل في الطريقة الشرائحية المطبقة لإيجاد التكامل الأحادي يضاف إليه الخطأ الشامل الناتج عن استخدام طريقة غوص-ليجنندر المطبقة لإيجاد التكاملات الثنائية والثلاثية، نجد أولاً بحسب النتيجة 1 أن $\|T\|_{\infty} = O(h^6)$ هي رتبة الطريقة الشرائحية الأولى، ويتم تقدير رتبة طريقة غوص-ليجنندر من المبدأ الذي تعتمد عليه القائل:

"إذا كانت دالة التكامل هي كثيرة حدود من الدرجة أصغر أو تساوي $(2N-1)$ فإن التكامل يعطى بدقة تامة باستخدام N نقطة غوصية t_i وعندئذ فإن رتبته ستكون $O(h^{2N})$ ، أما الخطأ الشامل للطريقة المقترحة للتكاملات الثنائية والثلاثية فيعطى بالصيغة:

$$Error = \text{Max}\{O(h^6) + O(h^{2N})\} \quad (31)$$

حيث إن h هي أكبر خطوة للتجزئة مستخدمة في مجالات التكامل $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$. الآن، نخلص إلى النتيجة الآتية:

نتيجة 2: نجد من العلاقة (31) أن الطريقة الشرائحية المطبقة لإيجاد التكاملات الثنائية والثلاثية تكون من الرتبة الرابعة بتطبيق طريقة غوص-ليجنر بنقطتين غوصيتين $N=2$ ، وتكون من الرتبة السادسة بتطبيقها بثلاث نقاط غوصية أو أكثر، يعني $N=3,4,5$.

الاستقرار للطريقة الشرائحية : Stability of Spine Method

ندرس الاستقرار العددي للطريقة المقترحة بتطبيقها لمسألة التكامل (10) والتي توول إلى المنظومة (12) ، وبحساب شعاع المجاهيل من المنظومة (12) ينتج لدينا:

$$\bar{C}_k = A^{-1}(f_k - R_1 \bar{S}_k) \quad , \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (31)$$

من جهة أخرى، باستخدام التقريب (6) في نقاط التجميع (4)-(5) ينتج لدينا المنظومة الآتية:

$$\bar{S}_{k+1} = R_2 \bar{S}_k + h^2 B \bar{C}_k \quad (32)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} hz_1 & \frac{h^2 z_1^2}{2} & \frac{h^3 z_1^3}{6} \\ hz_2 & \frac{h^2 z_2^2}{2} & \frac{h^3 z_2^3}{6} \\ h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{6} \end{bmatrix} \quad \text{حيث}$$

أما B فهي مصفوفة المنظومة (13).

وبتعويض متجه المجاهيل \bar{C}_k من العلاقة (31) في (32) نحصل على المنظومة التكرارية :

$$\bar{S}_{k+1} = [R_2 - h^2 B A^{-1} R_1] \bar{S}_k + h^2 B A^{-1} R_1 \bar{F}_k \quad (33)$$

حيث $R(h) = (R_2 - h^2 B A^{-1} R_1)$ ، تدعى دالة الاستقرار للطريقة العددية.

نأخذ الآن، \hat{S}_{k+1} تقرب شرائحي آخر للطريقة، لكن بقيم ابتدائية مختلفة عندئذ نحصل على:

$$E_{k+1} = \bar{S}_{k+1} - \hat{S}_{k+1} = (R_2 - h^2 B A^{-1} R_1) \cdot (\bar{S}_k - \hat{S}_k) \\ = (R_2 - h^2 B A^{-1} R_1)^k \cdot (\bar{S}_0 - \hat{S}_0)$$

حيث \bar{S}_0, \hat{S}_0 شرطان ابتدائيان للتقريبين $\bar{S}_{k+1}, \hat{S}_{k+1}$.

تعريف (2) [10]: نقول عن طريقة عددية إنها مستقرة (Stable) لأجل h إذا كان

$$\|\bar{R}(h)\| = \|(R_2 - h^2 B A^{-1} R_1)\| < 1$$

حيث إن نظيم المصفوفة المستخدم معرف بالشكل $\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$ لأجل مصفوفة ما A .

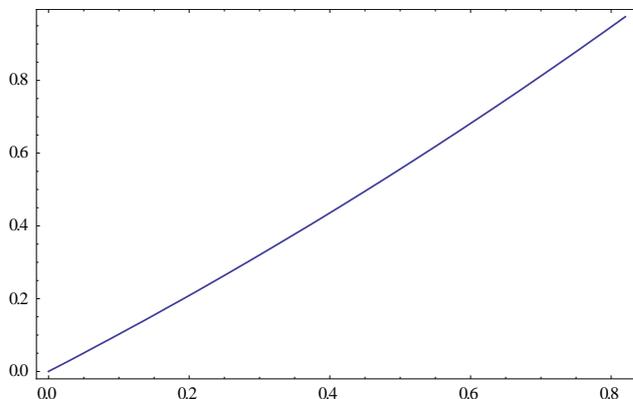
نجد باستخدام لغة البرمجة Mathematica أن المصفوفة $R(h)$ تعطى كالاتي:

$$R(h) = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} & \frac{671h^2}{7680} & \frac{23h^3}{3840} \\ \frac{2h}{3} & \frac{157h^2}{1215} & \frac{34h^3}{3645} \\ h & \frac{13h^2}{60} & \frac{h^3}{60} \end{bmatrix}$$

وأن $\bar{R}(h) = 0.974876 < 1$ لأجل $h=0.82$ ، وقيمها المميزة:

$$\{0.496784, 0.00917838, 0.000113132\}$$

جميعها أصغر من الواحد، وبالتالي تقع داخل قرص الوحدة.
 نرسم في الشكل (1) الدالة $\bar{R}(h)$ من أجل القيم $0 < h < 0.82$ فنلاحظ أن جميع قيم هذه الدالة أصغر من الواحد تماما.



الشكل(1): رسم الدالة $\bar{R}(h)$ من أجل $0 < h < 0.82$.

وهكذا نجد أنه مهما تكن الخطوة $h \leq 0.82$ فإن $\| (R_2 - h^2 BA^{-1} R_1) \| < 1$ ، ونجد عندئذ أن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| E_k \| = \| \bar{S}_0 - \hat{S}_0 \| . \lim_{k \rightarrow \infty} \| R^k(h) \| = 0$$

وبهذا نستنتج بحسب التعريف (2) أن الطريقة المقترحة ستكون مستقرة باستخدام خطوة h لا تزيد عن 0.82 وهذه الخطوة ليست صغيرة نسبيا علما بأن الخطوة المعيارية هي $h=0.1$.

النتائج العددية

يتم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل عدة أمثلة متنوعة لتكاملات أحادية وثنائية وثلاثية وجميعها محلوبة في مراجع أخرى لنتمكن من المقارنة معها، مثل طريقة المويجات [4]، وطريقة الدوال الهجينة [5].
 مثال 1: [4] ليكن التكامل الأحادي:

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx$$

نحل هذا المثال بالطريقة المقترحة ونسجل الخطأ النسبي في التكامل لطريقتنا في النصف الأيمن من الجدول (2)، ونعرض في النصف الأيسر من الجدول (2) الخطأ النسبي لطريقة مويجات Haar في المرجع [4]، ونعرض في الجدول (3) الأخطاء النسبية لطريقة غوص ليجندر وشبه المنحرف وسيمبسون. بمقارنة النتائج في الجدولين (2) و(3) تتضح دقة وأفضلية نتائج طريقتنا.

الجدول 2: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 1 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة مويجات Haar

طريقة مويجات Haar [4]			الطريقة المقترحة	
j	D=4	D=6	التجزئة n	الخطأ النسبي
7	2.6872E- 06	1.4685E- 06	n=7	1.07211E-10
9	1.6944E- 07	9.2151E- 08	n=9	2.10708E-11
11	1.1890E- 08	5.9452E - 09	n=11	5.60227E-12

الجدول 3: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 1 باستخدام عدة طرائق

طريقة غوص -ليجنر [9]		طريقة شبه المنحرف [6]	طريقة سيمبسون [7]
n=4	1.4727841E-3	9.690552 E-3	2.53969E-5
n=8	1.0630674E-4	2.4227039E-3	8.69997E-8
n=12	2.703964E-7	1.07674238 E-3	3.37471E-8
n=20	2.97732E-8	3.8762364 E-4	7.68418E-9

مثال 2: [5] التكامل الأحادي:

$$\int_0^5 \sqrt{x^2 - 5x + 31} dx$$

نحل المثال (2) بالطريقة المقترحة ونسجل الخطأ النسبي في التكامل لطريقتنا في النصف الأيمن من

- الجدول (4)، ونعرض في النصف الأيسر من الجدول (4) الخطأ النسبي لطريقة الدوال الهجينة في المرجع [5]. ونعرض في الجدول (5) الأخطاء النسبية لطريقة غوص ليجنر وشبه المنحرف وسيمبسون. بمقارنة النتائج في الجدولين (4) و(5) تتضح دقة وأفضلية نتائج الطريقة المقترحة.

الجدول 4: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 2 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة الدوال الهجينة

طريقة الدوال الهجينة [5]		الطريقة المقترحة	
$m = 3; n = 5$	3.6467E-07	$n = 5$	3.7112E-10
$m = 4; n = 8$	2.8648E-08	$n = 8$	1.71662E-11
$m = 5; n = 12$	1.3262E-12	$n = 12$	1.09983E-12
$m = 6; n = 20$	3.7148E-14	$n = 18$	5.19686E-14

الجدول 5: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 2 باستخدام عدة طرائق

طريقة غوص -ليجنر [9]		طريقة شبه المنحرف [6]	طريقة سيمبسون [7]
n=4	5.9160350E-4	4.5264608 E-3	3.792311 E-4
n=8	1.7206443E-5	1.1298906E-3	2.29943 E-6
n=12	6.16186 E-7	5.0203286 E-4	4.51225 E-7
n=20	2.45502 E-8	1.8070594E-4	5.8281 E-8

مثال 3: [4] التكامل الأحادي:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$$

نحل المثال (3) بالطريقة المقترحة، ونعرض في الجدول (6) الأخطاء النسبية في التكامل لطريقتنا المقترحة و لطريقة غوص ليجندر في المرجع [4] و طريقة موجات Haar في المرجع [4]. بمقارنة النتائج في الجدول (6) نتضح دقة وأفضلية نتائج الطريقة المقترحة.

الجدول 6: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 3 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة موجات Haar

طريقة موجات Haar [4]		طريقة غوص -ليجنندر [9]		الطريقة المقترحة		
j	$D=4$	$D=6$	نقطتين	0.1171816852	التجزئة n	الخطأ النسبي
7	2.6306E- 02	3.2441E- 02	ثلاث نقاط	0.0843372377	n=4	3.33192 E-5
9	1.3122E- 02	1.6176E- 02	أربع نقاط	0.0658121114	n=8	2.22895E-6
11	6.5581E- 03	8.0834E- 03	خمس نقاط	0.0539357940	n=11	4.52178E-7

مثال 4: [5] التكامل الثنائي:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin(x+y) dx dy$$

نطبق الطريقة المقترحة لحل المثال (4)، وندرج في الجدول (7) الأخطاء النسبية في التكامل لطريقتنا المقترحة وطريقة الدوال الهجينة في المرجع [5] و طريقة موجات Haar في المرجع [4]. وبمقارنة النتائج في الجدول (7) نتضح دقة نتائج الطريقة المقترحة.

الجدول 7: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 4 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة الدوال الهجينة

طريقة موجات Haar [4]		طريقة الدوال الهجينة [5]		الطريقة المقترحة	
$J=5$	1.2551E-04	$m = 3; n = 5$	4.3261E-07	n=10 أربع نقاط غوصية	2.2788 E-08
$J=6$	3.1375E-05	$m= 4; n= 8$	3.4122E-08	n=12 خمس نقاط غوصية	1.31354 E-10
$J=7$	7.8437E-06	$m = 5; n = 12$	2.4702E-13	n=16 ست نقاط غوصية	5.95302E-13

المثال 5: [4] التكامل الثنائي:

$$\int_1^5 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

نطبق الطريقة المقترحة لحل المثال (5) ونسجل في الجدول (8) الأخطاء النسبية في التكامل لطريقتنا المقترحة و لطريقة موجات Haar في المرجع [4]. وبمقارنة النتائج في الجدول (8) نتضح دقة نتائج الطريقة المقترحة.

الجدول 8: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 5 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة موجات Haar

طريقة موجات Haar [4]		الطريقة المقترحة		
j	$D=4$	$D=6$	التجزئة n عدد نقاط غوص	الخطأ النسبي
8	5:1654E-06	2:8514E-06	$n=6$ أربع نقاط غوصية	5.23944 E-7
9	1:29E -06	7:13E- 07	$n=6$ خمس نقاط غوصية	3.47851 E-8

مثال 6: [5] التكامل الثلاثي:

$$\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y+z} dx dy dz$$

نطبق الطريقة المقترحة لحل المثال (6) ونسجل في الجدول (9) الأخطاء النسبية في التكامل لطريقتنا المقترحة و لطريقة موجات Haar في المرجع [5]. وبمقارنة النتائج في الجدول (9) نتضح دقة نتائج الطريقة المقترحة.

الجدول 9: مقارنة الأخطاء النسبية في تقريب التكامل للمثال 6 باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة موجات Haar

طريقة موجات Haar [5]		الطريقة المقترحة	
j		n	
$j = 4$	1.2863E-05	$n=10$ ثلاث نقاط غوصية	4.06341 E-8
$j = 5$	3.2159E-06	$n=8$ أربع نقاط غوصية	3.38887 E-8
$j = 6$	8.0398E-07	$n=4$ خمس نقاط غوصية	3.29979 E-8

الاستنتاجات والتوصيات:

إن الطريقة العددية التي قدمناها ذات تقنية تكرارية نجحت إلى حد كبير في إيجاد القيم التقريبية للتكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية، حيث تشير النتائج في الجداول (1)-(9) من خلال المقارنات إلى أن الطريقة المقترحة هي أفضل من طريقة موجات Haar [4,5] و طريقة الدوال الهجينة [5] و طريقة غوص -ليجنر [9] و

طريقة شبه المنحرف [6] و طريقة سيمبسون [7]، ولهذه الأسباب نوصي بضرورة استخدامها لإيجاد قيم التكاملات الاحادية والثنائية والثلاثية نظرا للدقة العددية في حساب هذه الانواع من التكاملات، كما يمكن استخدام هذه التقنية لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية التكاملية مثل معادلات فولتيرا وفريدهولم.

المراجع:

1. HASHISH H., S.H. Behiry, N.A. El-Shamy, *Numerical integration using wavelets*, Applied Mathematics and Computation 211 (2009) 480-487.
2. SIRAJ-ul-Islam , Imran Aziz , Fazal Haq, *A comparative study of numerical integration based on Haar wavelets and hybrid functions*, Computers and Mathematics with Applications, doi:10.1016, pp.1-12, (2010).
3. RATHOD H.T., K.V. Nagaraja, B. Venkatesudu, *Numerical integration of some functions over an arbitrary linear tetrahedra in Euclidean three-dimensional space*, Applied Mathematics and Computation 191 (2007) 397-409.
4. AGHIGH K., M. Masjed-Jamei , M. Dehghan, *On numerical integration methods with the generalized Stieltjes weight function*, Applied Mathematics and Computation 182 (2006) 1184–1190.
5. SIDI A., *Numerical integration over smooth surfaces in R^3 via class φ_m variable transformations*. Part II: Singular integrands, Applied Mathematics and Computation 181 (2006) 291-309.
6. MARINOV T., J. Omojola, Q. Washington and L. Banks, *Behavior of the Numerical Integration Error*, Applied Mathematics, Vol 5, pp.1412-1426 (2014).
7. ULLAH Md. A., *Numerical Integration and a Proposed Rule*, American Journal of Engineering Research, Vol.4, No.(9), pp. 120-123(2015).
8. CHERNYSHENKO D. and H. Fangohr, *Computing the demagnetizing tensor for finite difference micromagnetic simulations via numerical integration*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol 381, pp. 440–445(2015).
9. BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, PWS-KENT, Boston Massachusetts, (1993), 559-587.
10. MAHMOUD, S. M., *Three Point Spline Collocation Method For Solving General Linear And Nonlinear Eighth-Order Boundary-Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (36) No (4) 2014.