مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (6) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (6) 2016

الثابت الدقيق في متراجحة جاكسون بمعامل الاستمرار من الدرجة الثانية في فضاء هاردي

الدكتور إبراهيم إبراهيم*
الدكتور طالب غريبة**
ميخائيل شحود***

(تاريخ الإيداع 27 / 6 / 2016. قُبِل للنشر في 29 / 11 /2016)

□ ملخّص □

نقوم في هذا البحث بإثبات صحة المتراجحة الآتية:

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad \forall n\ge n_0,\qquad n\in\mathrm{N}\ ,f\in H_2$$

علما بأن $E\ (f)$ للدالة $f(z)$ في الفضاء H_2 ، و ω_2 معامل الاستمرار من الدرجة الثانية.

كما نقوم بإثبات صحة المتراجحة التالية :من أجل أي دالة $f(z)\in H_2\ ,\ f^{(r)}(z)\in H_2\ (f(z)\ne const)$ تتحقق المتراجحة

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F^{(r)},\theta)_{H_2}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

وتم اثبات صحة المبرهنة التالية :من أجل أي عدد طبيعي n تتحقق المساواة :

$$P_n(W_\psi^r)=\frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6}n^r\sqrt{\frac{\pi}{n}}}=\frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6\pi n^{2r-1}}}$$

حيث أن $P_n(W_\psi^r)$ أحد الأقطار المعرفة في البحث.

الكلمات المفتاحية : متراجحة جاكسون في الفضاء H_2، معاملات الاستمرار ، الثوابت الدقيقة

* أستاذ – قسم الرياضيات . كلية العلوم . جامعة البعث . حمص . سورية.
** أستاذ – قسم الرياضيات . كلية العلوم . جامعة البعث . حمص سورية.
*** طالب دكتوراه –قسم الرياضيات . كلية العلوم . جامعة البعث . حمص سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (38) العدد (6) 2016
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (38) No. (6) 2016

The exact constant in Jackson inequalities for second degree continuity modulein Hardyspace H_2

Dr. Ibrahim Ibrahim*
Dr. Taleb Kharea**
Mikhael Shahoud***

(Received 27 / 6 / 2016. Accepted 29 / 11 /2016)

□ ABSTRACT □

Will be proved the sharp inequality :

$$E_n(f) \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega_2^2(F,\theta)_{H_2} \, d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall n \geq n_0, \qquad n \in \mathrm{N}$$

Where $E_n(H)$ for function f in space ω second degree continuity module will be proved the inequality : for any $f(z) \in H_2$ and $f^{(r)}(z) \in H_2$ $(f(z) \neq const)$

$$E_n(f) \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \omega_2^2\left(F^{(r)},\theta\right)_{H_2} d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

will be proved the theory : for any natural number n we obtain :

$$P_n\left(W_\psi^r\right) = \frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6} n^r \sqrt{\frac{\pi}{n}}} = \frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6\pi n^{2r-1}}}$$

Keywords: Jackson inequality in space H_2 ; Modulus of continuity ; exact constants

* **professor- math department – faculty of sciences-baath university – Homs- Syria**
** **professor -math department – faculty of sciences-baath university – Homs- Syria**
*** **Doctorate student at math department – faculty of sciences-baath university – Homs- Syria**

مقدمة:

تبين متراجحة جاكسون[1] أن سرعة اقتراب أفضل تقريب لدالة دورية مستمرة، بواسطة كثير حدود مثلثي، ليست أصغر من سرعة اقتراب معامل استمرار هذه الدالة نحو الصفر .

أي أنه يوجد،من أجل أي دالة $f \in X[0,2\pi]$ كثير حدود مثلثي $p_{n-1}(z)$ ،لا تزيد درجته عن $n-1$وتوجد ثابت A ،بحيث يكون :

$$E_n(f)_X \leq A\omega_m\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_X \qquad ; m=1,2,...$$

وتسمى هذه المتراجحة متراجحة جاكسون،حيث يرمز $E_n(f)$ للتقريب الأفضل للدالة f بواسطة كثيرات الحدود المثلثية $p_{n-1}(z)$ و يرمز $\omega_m\left(f,\frac{\pi}{n}\right)$لمعامل الاستمرار (الملاسة) من الدرجة m للدالة f في الفضاء نفسه.

عندما طرح كولموغوروف [2] مفهوم قطر مجموعة دوال برزت الحاجة إلى ضرورة التعامل مع متراجحة جاكسون بثوابت دقيقة، وبشكل أدق إيجاد القيمة :

$$A=\sup_{f\in X}\frac{E_n(f)_X}{\omega_m\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_X}$$

تعاريف و مصطلحات:

قبل عرض نتائج البحث من المناسب التذكير ببعض التعاريف و المصطلحات المستخدمة فيه.

__تعريف 1[8]:__ يدل الرمز $H_p(0<p<\infty)$ على فضاء الدوال التحليلية ، في قرص الوحدة التي تحقق الشرط

$$\sup_{0<\rho<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta<\infty$$

ويعرّف النظيم في هذا الفضاء بالعلاقة:

$$\|f\|_{H_p}=\sup_{0<\rho<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}<\infty$$

حيث $F(\theta)=f\left(\rho e^{i\theta}\right)$ القيمة الزاوية الحدية للدالة $f(z)$ ويعرف هذا الفضاء بفضاء هاردي.

__تعريف 2:__[8]يعرف التقريب الأفضل للدالة $f(z)\in H_P$ من كثيرات الحدود $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k z^k$ ، بالعلاقة:

$$E_n(f)_{H_p}=\inf_{p_n}\|f-p_n\|_{H_p}$$

ويعرف التقريب الأفضل لصف الدوال $W\subset H_p$ بالعلاقة :

$$E_n(W)_{H_p} = \sup_{f\in W} \inf_{\varphi\in H^N} \|f-\varphi\|_{H_p}$$

حيث $H^N \subset H_p$ فضاءات جزئية من الفضاء H_p ، عدد أبعاد كل منها N .

تعريف3:[8] يتعين القطر الكولموغورفي ذو n بعد [3]، $d_n(W)_{H_p}$ للصف $W \subset H_p$ بالعلاقة

$$d_n(W)_{H_p} = \inf_{\{L_n\}} \sup_{f\in W} \inf_{\psi\in L_n} \|f-\psi\|_{H_p}$$

وبالتالي يكون $d_n(W)_{H_p} = \inf_{\{L_n\}\subset H_p} E(W)_{H_p}$

حيث الحد الأدنى الأعظمي يؤخذعلى جميع الفضاءات الجزئية L_n .

تعريف 4:[8] لتكن الدالة $F \in H_p$ عندئذ يعرف معامل استمرار الدالةمن المرتبة الثانية بالعلاقة :

$$\omega(F,\delta)_{H_p} = \sup_{|t|\le\delta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(t+2\theta)-2F(t+\theta)+F(t)|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$$

حيث $F(\theta) = f(\rho e^{i\theta})$ القيمة الحدية للدالة $f(z)$.

ويعرف معامل استمرارالدالة $f \in X$ من المرتبة m $(m=1,2,3,......)$ في الفضاء X بالعلاقة:

$$\omega_m(f,\delta)_X = \sup_{|t|\le\delta}\left\|\Delta_t^{(m)} f(x)\right\|_X$$

ويدل الرمز $\Delta_t^{(m)} f(x)$ على الفروق من المرتبة m بالخطوة t للدالة $f(x)$ أي أن:

$$\Delta_t^{(m)} f(x) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j f(x+jt)$$

(حيث δ عدد صغير موجب و كيفي).

تعريف 5:[8] تعطي متسلسلة فورييه للدالة $f(z) \in H_2$ بالعلاقة : $f(\rho e^{i\theta}) \approx \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^k e^{ik\theta}$

والمجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة: $S_{n-1}(f) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \rho^k e^{ik\theta}$

الخاصة الأصغرية:[8] تحقق المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه خاصة مهمة معروفة باسم الخاصة الأصغرية للمجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه للدالة $f(z)$.

والتي يمكن تلخيصها بالآتي :

التقريب الأفضل للدالة $f(z)$ ، بكثير حدود من الشكل :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

في الفضاء H_2 ، يتحقق بواسطة المجاميع الجزئية $S_n(f)$ أي أن:

$$E_n(f) = \inf_{P_n}\|f-P_n\| = \|f-S_{n-1}(f)\|^2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} C_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

حيث استخدمت مساواة بارسيفال عند ايجاد المساواة الأخيرة.

تعريف 6:[4]يعرف صف تايكوف [1] بالمساواة :

$$W_{\psi}^{r}=\left\{F(z)\in H_2\,;\int_0^u \omega^2\left(F^{(r)},\theta\right)d\theta\le\psi^2(u)\right\}$$

حيث $\psi(u)$دالة كيفية مستمرة ومتزايدة عندما : $u>0$ و $\lim\limits_{u\to 0}\psi(u)=\psi(0)=0$

تعريف 7:[8] تسمى القيمة:

$$\gamma_N(W)=\inf_{H^N\subset H_2}\xi_N(W)=\inf_{H^N}\inf_{A\in\ell(H_2,H^N)}\sup_{f\in W}\|f-Af\|$$

القطر المستمر للصف W .

تعريف 8:[8] ويعرّف القطر المطابق π_N بالمساواة:

$$\pi_N(W)=\inf_{H^N\subset H_2}\xi_N^{\perp}(W)=\inf_{H^N}\inf_{A\in\ell_1(H_2,H^N)}\sup_{f\in W}\|f-Af\|$$

تعريف 9:[8] لتكن B كرة الواحدة في الفضاء H_2. ولتكن K مجموعة متناظرة مركزياً. عندئذ نسمي القيمة:

$$d^N(\mathrm{K})=\inf_{H_{-N}}\inf_{\varepsilon}(\mathrm{K}\cap H_{-N}\subset\varepsilon B)$$

القطر بحسب مفهوم غيلفاند ، حيث يتم البحث عن inf على جميع الفضاءات الجزئية H_{-N}من الفضاء H_2والتي يكون عدد أبعاد مكملتها N أي $(N=\dim(H_2/H_{-N}))$.

تعريف 10:[8] نسمي القيمة: $b_N(W)=\sup\limits_{H_{N+1}}\sup\limits_{\varepsilon}(W\cap H_{N+1}\supset\varepsilon B\cap H_{N+1})$

القطر بحسب مفهوم برنشتاين.

قضية 1:[5]

ليكن P_N أحد الأقطار المذكورة أعلاه و $d_{2N-1}\le R$ عندئذ

إذا كانت الكرة التي عدد أبعادها لا يقل عن $2n+1$ ونصف قطرها Rمحتواة في الصف W ، فإنه من أجل $N=2n-1$ أو $N=2n$ يكون :

$b_N(W)\le R$ و $P_N(W)=R$ ويتحقق [4] :

$$P_N(W)\ge P_{N+1}(W)$$

$P_N(W_1)\le P_N(W_2)$ إذا كان $W_1\subset W_2$

ملاحظة 1 [6]:

من أجل أي دالة $f(x)\in H_2$ ،تكون المتسلسلة $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|C_k|^2$ متقاربة.

ولما كانت حدود هذه المتسلسلة أعداداً حقيقية غير سالبة ، فإنها لا تتزايد اعتباراً من حد ما $k=n_0$،أي أن :

$$|C_p|^2\le|C_q|^2\qquad,\forall p\quad,(p>q\ge n_0)$$

وبالتالي ،فإن :

$$\frac{|C_p|^2}{p}\le\frac{|C_q|^2}{q}\qquad,\forall p\quad,(p>q\ge n_0)$$

أهمية البحث و أهدافه :

اثبات بعض متراجحات من نوع جاكسون وايجاد الثوابت الدقيقة واقطار لصف من الدوال في الفضاء H_2 :

مواد البحث وطرائقه : بحث نظري استخدم فيه الطرائق المعروفة في التحليل الرياضي.

المناقشة و النتائج:

مبرهنة مساعدة:

من أجل أي عدد طبيعي nومن أجل الدالة $f_0(z)=z^n$ من الفضاء H_2 ،
تتحقق العلاقة الآتية:

$$\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}=4(1-\cos n\theta)^2 \quad ; \quad 0\le\theta<\frac{\pi}{n} \tag{1}$$

حيث $F(\theta)=f\left(\rho e^{i\theta}\right)$

الاثبات : بما أن:

$$f_0(z)=z^n=r^n e^{in\theta} \qquad ; \qquad n>0$$

فإن القيمة الزاوية الحدية لهذه الدالة هي : $F(\theta)=\rho^n e^{in\theta} \quad ; \quad n>0$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\left|F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)\right|^2 &=\left|\rho^n e^{in(2\theta+\varphi)}-2\rho^n e^{in(\theta+\varphi)}+\rho^n e^{in\varphi}\right|^2\\ &=\left|\rho^n e^{in\varphi}\left(e^{in2\theta}-2e^{in\theta}+1\right)\right|^2\\ &=\rho^{2n}\left|e^{in\varphi}\right|^2\left|\left(1-e^{in\theta}\right)^2\right|^2=\rho^{2n}\left(2-2\cos n\theta\right)^2\\ &=4\rho^{2n}(1-\cos n\theta)^2\end{aligned}$$

منتعريف معامل الاستمرار وبعد حساب التكامل نحصل على :

$$\omega^2(F,\delta)_{H_2}=\sup_{|\theta|<\delta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)\right|^2 d\varphi\right]$$

$$=\sup_{|\theta|<\delta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}4(1-\cos n\theta)^2 d\varphi\right]=\sup_{|\theta|<\delta}\left[\frac{4}{2\pi}(1-\cos n\theta)^2\int_0^{2\pi}d\varphi\right]$$

$$=\sup_{|\theta|<\delta}\left[\frac{4}{2\pi}(1-\cos n\theta)^2\times 2\pi\right]=\sup_{|\theta|<\delta}\left[4(1-\cos n\theta)^2\right]$$

$$=\begin{cases}4(1-\cos n\theta)^2 & ;\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{n}\\[2mm] 16 & ;\ \theta>\dfrac{\pi}{n}\end{cases}$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 1:

من أجل أي دالة $f(z)\in H_2$ $(f(z)\neq const)$ تتحقق المتراجحة

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad \forall n\ge n_0\,,\qquad n\in\mathrm{N}\qquad (2)$$

وتتحقق المساواة في هذه المتراجحة من أجل الدالة $f_0(z)=z^n\ ;\ n>0$

الإثبات:من أجل $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k z^k$ والمحققة لشروط المبرهنة لدينا :

$$E_n^2(f)_{H_2}=\sum_{k=n}^{\infty}\left|C_k\right|^2\qquad (3)$$

وبما أنّ :

$$F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{ik\varphi}(e^{ik\theta}-1)^2$$

فإن:

$$\int_0^{2\pi}\left|F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)\right|^2 d\varphi=8\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k\right|^2(1-\cos k\theta)^2$$

وبالتالي : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)\right|^2 d\varphi=4\sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k\right|^2(1-\cos k\theta)^2$

ومن تعريف معامل الاستمرار لدينا:

$$\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F(\varphi+2\theta)-2F(\varphi+\theta)+F(\varphi)\right|^2 d\varphi\ge$$

$$\ge 4\sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k\right|^2(1-\cos k\theta)^2=2\sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k\right|^2(3-4\cos k\theta+\cos 2k\theta)\ge$$

$$=6E_n^2(f)_{H_2}-8\sum_{k=n}^{\infty}\left|C_K\right|^2\cos k\theta+2\sum_{k=n}^{\infty}\left|C_K\right|^2\cos 2k\theta$$

من هذه العلاقة تنتج المتراجحة التالية:

$$E_n^2(f)_{H_2}\le\frac{1}{6}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\left|C_K\right|^2\cos k\theta-\frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\left|C_K\right|^2\cos 2k\theta$$

بالمكاملة بالنسبة θبين 0 و π/nنجد:

$$\frac{\pi}{n}E_n^2(f)_{H_2}\le\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\,d\theta+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_K\right|^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)-\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_K\right|^2}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

لنثبت أن $0\ge\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_k\right|^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$:

نقوم بتجميع حدود هذه المتسلسلة على الشكل التالي :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|C_k|^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\frac{\left|C_{(2l-1)n+j}\right|^2}{(2l-1)n+j}\sin[(2l-1)n+j]\frac{\pi}{n}+\frac{\left|C_{2nl+j}\right|^2}{2nl+j}\sin[2nl+j]\frac{\pi}{n}\right\}$$

وبما أن :

$$\sin[(2l-1)n+j]\frac{\pi}{n}=\sin\left(2l\pi-\pi+\frac{j\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{j\pi}{n}-\pi\right)=-\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right),$$
$$\sin[2nl+j]\frac{\pi}{n}=\sin\left(2l\pi+\frac{j\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

نحصل على :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|C_k|^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{\left|C_{2nl+j}\right|^2}{2nl+j}-\frac{\left|C_{(2l-1)n+j}\right|^2}{(2l-1)n+j}\right]\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) \qquad (4)$$

بما أن : $2nl+j>(2l-1)n+j \qquad \forall l\geq 1$

فإن بحسب الملاحظة (1) يكون :

$$\frac{\left|C_{2nl+j}\right|^2}{2nl+j}\leq\frac{\left|C_{(2l-1)n+j}\right|^2}{(2l-1)n+j} \qquad \forall l\geq 1 \quad , \ \forall\ j\geq 0$$

وبما أن $\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\geq 0 \quad 0\leq j\leq n-1$

فإنه من العلاقة (4) ينتج أن : $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|C_k|^2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq 0$

ولنثبت صحة العلاقة الآتية :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|C_k|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\geq 0 \qquad (5)$$

ليتم اثبات المتراجحة (2) :

لإثبات هذه المتراجحة نميز حالتين:

<u>الحالة الأولى :</u> ليكن n عدداً فردياً عندئذٍ باستخدام الرمز $\left[\frac{n}{2}\right]$ للدلالة على القسم الصحيح للعدد $\frac{n}{2}$ يمكننا أن نكتب

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|C_k|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left|C_{l\,n+j}\right|^2}{l\,n+j}\sin 2(l\,n+j)\frac{\pi}{n}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\sin 2((l+1)n-j)\frac{\pi}{n}\right\}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left|C_{ln+j}\right|^2}{ln+j}\sin\frac{2j\pi}{n}-\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\sin\frac{2j\pi}{n}\right\}$$

عندما $j=0$ يكون $\sin\frac{2j\pi}{2}=0$ ، وبذلك يكون :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_k\right|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\left|C_{ln+j}\right|^2}{ln+j}-\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\right)\sin\frac{2j\pi}{n} \tag{6}$$

و بما أن : $nl+j<(l+1)n-j$

لذلك بحسب الملاحظة (1) يكون :

$$\frac{\left|C_{nl+j}\right|^2}{nl+j}\geq\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\qquad\forall l\geq 1\quad,\ \forall\ j\geq 0$$

وبما أن $\sin\frac{2j\pi}{2}>0$ $1\leq j\leq\left[\frac{n}{2}\right]$

فإنه من العلاقة (6) ينتج أن : $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_k\right|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\geq 0$

أي أن العلاقة (5) محققة عندما يكون العدد n فردياً .

<u>الحالة الثانية :</u> ليكن n عدداً زوجياً ، عندئذٍ نكتب :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_k\right|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\left|C_{ln+j}\right|^2}{ln+j}\sin 2(ln+j)\frac{\pi}{n}+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\sin 2((l+1)n-j)\frac{\pi}{n}\right\}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\left|C_{ln+j}\right|^2}{ln+j}\sin\frac{2j\pi}{n}-\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\sin\frac{2j\pi}{n}\right\}$$

عندما $j=0$ يكون $\sin\frac{2j\pi}{2}=0$ ، عندما $j=\frac{n}{2}$ يكون $\sin\frac{2j\pi}{2}=0$

وبذلك يكون :

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left|C_k\right|^2}{k}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\left|C_{ln+j}\right|^2}{ln+j}-\frac{\left|C_{(l+1)n-j}\right|^2}{(l+1)n-j}\right)\sin\frac{2j\pi}{n}\geq 0$$

أي أن العلاقة (5) محققة ايضاً من أجل n عدد زوجي.

ولإثبات المساواة من أجل الدالة $f_0(z)=z^n\ ;\ n>0$

بما أن $f_0(z)=z^n\ ;\ n>0$ فإن القيمة الزاوية الحدية لهذه الدالة هي :

$$F(\theta)=\rho^n e^{in\theta}\,;n>0$$

وبالتالي من المبرهنة المساعدة العلاقة (1) $\qquad \omega_2^2(F,\theta)_{H_2}=4(1-\cos n\theta)^2 \quad ; \quad 0\le\theta<\dfrac{\pi}{n}$

حيث $F(\theta)=f\left(\rho e^{i\theta}\right)$

نعوض في الطرف الايمن من المتراجحة (1) ، فنجد :

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}4(1-\cos n\theta)^2\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{n}}3-4\cos n\theta+\cos 2n\theta\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}2\left[3\theta-\frac{4}{n}\sin n\theta+\frac{1}{2n}\sin 2n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{n}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\left(6\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=1$$

كما أن [8] :

$$E_n^2(f_0)_{H_2}=\sum_{k=n}^{\infty}|C_k|^2=1$$

وبذلك يتم الإثبات.

<u>نتيجة 2</u>:من أجل أي دالة $f(z)\in H_2$ بحيث $f^{(r)}(z)\in H_2$ $(f(z)\neq const)$ تتحقق المتراجحة

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2\left(F^{(r)},\theta\right)_{H_2}d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad ; r\in N \qquad (7)$$

وتتحقق المساواة في هذه المتراجحة من أجل الدالة $f_0(z)=z^n\ ;\ n>0$

<u>الإثبات</u>:بما أن (8) $\qquad E_n^2(f)\le\sum_{k=n}^{\infty}|C_k|^2\le\sum_{k=n}^{\infty}\dfrac{k^{2r}}{n^{2r}}|C_k|^2=\dfrac{1}{n^{2r}}E_n^2\left(f^{(r)}\right)$

لكن لدينا من المبرهنة 1 و الملاحظة 1

$$E_n\left(f^{(r)}\right)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2\left(F^{(r)},\theta\right)_{H_2}d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \forall n\ge n_0\,, \qquad n\in\mathrm{N}$$

نعوض في العلاقة الأخيرة

$$E_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{n^r}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2\left(F^{(r)},\theta\right)_{H_2}d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad ;r=0,1,2,....$$

وبما أن (8) تنقلب إلى مساواة فقط عندما $k=n$ فإن المتراجحة (7) تنقلب إلى مساواة من أجل الدوال $f_0(z)=z^n\ ;\ n>0$.

مبرهنة 2: من أجل أي دالة $f(z)\in H_2$ $(f(z)\neq const)$ تتحقق المتراجحة

$$E_n(f)\le \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2} \qquad (9)$$

ولا يمكن استبدال الثابت $\frac{1}{\sqrt{6}}$ بأصغر منه في هذه المتراجحة

الإثبات: باستخدام المتراجحة (2) و الاستفادة من كون الدالة $\omega_2^2(F,\theta)$ غير متناقصة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{n}\right]$ نجد أن

$$E_n(f)\le \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2^2(F,\theta)_{H_2}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\frac{n}{\pi}\omega_2^2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\omega_2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2}$$

أي أن $E_n(f)\le \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2}$ و لإثبات أن $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ثابتة دقيقة لدينا :

من المتراجحة (9) وبحسب تعريف الحد الاعلى $\dfrac{E_n(f)_{H_2}}{\omega_2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2}}\le \frac{1}{\sqrt{6}}$

لتكن $g(\delta,\theta)$ الدالة الزوجية المعرفة بالشكل[8] :

$$g(\delta,\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{\theta}{2\delta} & 0\le\theta\le 2\delta\\[2mm] 0 & 2\delta\le\theta\le\dfrac{\pi}{n}\end{cases}$$

نأخذ متسلسلة فورييه لهذه الدالة $g(\delta,\theta)=\delta+\dfrac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin nk\delta}{nk}\right)^2\cos nk\theta$

وبوضع $f_\delta(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\delta}}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin nk\delta}{nk}\cos nk\theta$

عندها يكون

$$\|f_\delta(\varphi+2\theta)-2f_\delta(\varphi+\theta)+f_\delta(\varphi)\|=2\frac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nk\delta}{nk}\right)^2\{3-4\cos(nk\theta)+\cos(2nk\theta)\}$$
$$=2\frac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nk\delta}{nk}\right)^2\{4(1-\cos(nk\theta))-(1-\cos(2nk\theta))\}$$
$$=2\{4[g(\delta,0)g((\delta,\theta))]-[g(\delta,0)g(\delta,2\theta)]\}$$
$$=F_\delta(0)-F_\delta(\theta)$$

حيث وضعنا $F_\delta(\theta)=2[4g(\delta,\theta)-g(\delta,2\theta)]$

بما أن الدالة $g(\delta,\theta)$ غير متزايدة بالمتغير θ على المجال $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$ فإنه على هذا المجال يكون $F_\delta(\theta)\geq 0$ ومن تعريف معامل الاستمرار نجد أن :

$$\omega_2^2\left(F,\frac{\pi}{n}\right)_{H_2}=\sup_{\theta\leq\frac{\pi}{2}}\left[F_\delta(0)-F_\delta(\theta)\right]=6$$

ونجد أيضاً $E_n^2(F_\delta)_{H_2}=\frac{2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(nk\delta)}{nk}\right)^2=g(\delta,0)-\delta=1-\delta$

ومنه ، باعتبار أنه يمكن اختيار δ قريباً جداً من الصفر نجد :

$$\frac{E_n^2(F_\delta)_{H_2}}{\omega_2^2\left(F_\delta,\frac{\pi}{2}\right)_{H_2}}=\frac{1}{6}(1-\delta)\xrightarrow[\delta\to 0]{}\frac{1}{6}$$

وبذلك نكون قد اثبتنا أنه من أجل أي عدد طبيعي $n>2$ وأي عدد موجب $\delta>0$ صغير بقدر كاف توجد دالة $F_\delta(\theta)\in H_2$ بحيث يكون :

$$\frac{E_n(F_\delta)_{H_2}}{\omega_2\left(F_\delta,\frac{\pi}{2}\right)_{H_2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}-\delta$$

ومن هنا تنتج المساواة :

$$\sup_{F\in H_2}\frac{E_n(F_\delta)_{H_2}}{\omega_2\left(F_\delta,\frac{\pi}{2}\right)_{H_2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

وهو المطلوب.

لحساب أقطار صفوف الدوال ، نفرض أن $\psi(u)$ دالة كيفية مستمرة و متزايدة عندما $u>0$ و $\lim_{u\to 0}\psi(u)=\psi(0)=0$

سوف نستخدم المصطلح التالي :

$$(1-\cos v)_*=\begin{cases}1-\cos v & ;v\leq\pi\\ 2 & ;v\geq\pi\end{cases}$$

نفترض وجود المشتق $F^{(r)}(z)\in H_2$ من مرتبة معينة $(r\geq 0)$ عندها نعرف الصف $W(\psi,r)$ بالمساواة:

$$W_\psi^r=\{f\in H_2:\int_0^u\omega^2(F^{(r)},\theta)\,d\theta\leq\psi^2(u)\}$$

حيث تحقق الدالة $\psi(u)$ من أجل جميع قيم $u>0$ الشرط :

$$\psi^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*\,dv\leq\frac{3}{2}\pi\ \psi^2(u)\tag{10}$$

<u>مبرهنة 3:</u>

من أجل أي عدد طبيعي n تتحقق المساواة:

$$P_n\left(W_\psi^r\right)=\frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6}n^r\sqrt{\frac{\pi}{n}}}=\frac{\psi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{6\pi n^{2r-1}}}$$

حيث p_N أحد الأقطار d_{N}, b_N , d^N , γ_N , λ_N , π_N و $N=2n$ أو $N=2n-1$

الإثبات:باستخدام[7] تعريف القطر الكولموغوروفي و المتراجحة (7) نحصل على ما يلي :

$$d_{2n-1}(W_\psi^r)\le\sup_{f\in W_\psi^r}\mathrm{E}_n(f)\le\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{n^r}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\psi(\frac{\pi}{n})=\frac{\psi(\frac{\pi}{n})}{(6\,\pi\,n^{2r-1})^{1/2}} \tag{11}$$

لنبين الآن أن الصف W_ψ^r يحتوي على الكرة التي عدد ابعادها $2n+1$:

$$S_{2n+1}=\{P_n(z):\|P_n\|_{H_2}^2\le\frac{\psi^2(\frac{\pi}{n})}{6\pi\,n^{2r-1}}\}$$

نقدر معامل الاستمرار $\omega(P_n^{(r)},\theta)$ لكثير حدود مثلثي اختياري درجته n هو:

$$P_n(z)=\sum_{k=r}^{n-1}\alpha_{kr}^{-1}C_kz^{k-r}$$

وبوضع $P_n^{(r)}(\theta)=P_n^{(r)}\left(e^{i\theta}\right)\ ;\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]$

باستخدام مساواة بارسيفال يمكننا أن نكتب :

$$\int_0^{2\pi}\left|P_n^{(r)}(\theta+t)-2P_n^{(r)}(t)+P_n^{(r)}(\theta-t)\right|^2dt=4\pi\sum_{k=1}^{n-1}K^{2r}|C_k|^2(1-\cos k\theta)^2\le4\pi n^{2r}\sum_{k=1}^{n-1}|C_k|^2(1-\cos k\theta)^2$$

بما أن $(1-\cos k\theta)^2\le(1-\cos n\theta)_*^2\quad;\forall\ t>0\ \ ,k\le n-1:$

وبما أن $\|P_n\|_{H_2}^2=\sum_{k=0}^{n-1}|C_k|^2\qquad ,\ r\le k<n:$

فإننا نحصل ومن تعريف معامل الاستمرار على المساواة :

$$\omega_2^2(P,t)=\sup_{|\theta|<\delta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P_n^{(r)}(\theta-t)-2P_n^{(r)}(t)+P_n^{(r)}(\theta+t)\right|\right]$$

وبذلك نحصل على $\omega_2^2(P_W^{(r)},\theta)\le4n^{2r}\left\|P_n^r\right\|^2(1-\cos n\theta)_*^2$

ليكن الآن $P_n(\theta)\in S_{2n+1}$ عندئذٍ يكون :

$$\omega_2^2(P_n^{(r)},\theta)\le4n^{2r}\frac{\psi^2(\frac{\pi}{n})}{6\pi\,n^{2r-1}}(1-\cos n\theta)_*^2=\frac{2n\psi^2(\frac{\pi}{n})}{3\pi}(1-\cos n\theta)_*{}^2$$

و بمكاملة الطرفين بالنسبة لـ θ على المجال $[0,u]$

$$\int_0^u\omega_2^2(P_n^{(r)},\theta)\,d\theta\le\frac{2n\psi^2(\frac{\pi}{n})}{3\pi}\int_0^u(1-\cos n\theta)_*^2\,d\theta$$

نستخدم التحويل $n\theta = v$ في الطرف الأيمن : $\int_0^u \omega_2^2(P_n^{(r)},\theta)d\theta \le \frac{2}{3\pi}\psi^2(\frac{\pi}{n})\int_0^u (1-\cos v)_*^{\,2}\, dv$

نرمز بـ $\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{nu}$ ونستخدم الشرط (10) نحصل على :

$$\int_0^u \omega_2^2(P_n^{(r)},\theta)\,d\theta \le \frac{2}{3\pi}\psi^2(\frac{u}{\lambda})\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*^2\,dv \le \psi^2(u)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $S_{2n+1} \subseteq W_\psi^r$

بالاستفادة من العلاقة (11) و القضية (1) نجد أن $p_N(\omega_\psi^r) = \dfrac{\psi(\frac{\pi}{n})}{(6\pi\, n^{2r-1})^{1/2}}$

مبرهنة 4: الشرط اللازم و الكافي لتحقق المتراجحة : $\int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*^{\,2}\,dv \le \frac{3}{2}\pi\lambda^\alpha \quad , \ \forall\lambda > 0$

هو أن تأخذ α القيمة $\alpha = \frac{8}{3}$.

الإثبات: لزوم الشرط: لنضع $\Phi(\lambda) = \frac{3}{2}\pi\,\lambda^\alpha - \int_0^{\pi\lambda}(1-\cos v)_*^{\,2}\,dv$

إن جميع المشتقات المتتالية للدالة $\Phi(\lambda)$ موجودة و مستمرة بالمتحول λ على المجال $(0,\infty)$، وهذه الدالة لا تغير إشارتها على هذا المجال $(\Phi(\lambda)) \ge 0\,;\ \forall\lambda > 0)$ كما أن $\Phi(1) = 0$ لذلك يجب أن تكون قيمة مشتق الدالة $\Phi(\lambda)$ في النقطة $\lambda = 1$ معدومة أي أن $\Phi'(1) = 0$ وبما أن:

$$\Phi'(\lambda) = \frac{3}{2}\pi\,\alpha\,\lambda^{\alpha-1} - (1-\cos\pi\lambda)_*^2\,\pi\lambda$$

ومنه : $\Phi'(1) = \frac{3}{2}\pi\alpha - (1+1)^2\pi = \left(\frac{3}{2}\alpha - 4\right)\pi$ ولكن : $\Phi'(1) = 0$ وبالتالي $\alpha = \frac{8}{3}$.

كفاية الشرط: في [6] تم البرهان أنه إذا كانت : $\alpha = \alpha(m,\mu) = \dfrac{\mu\,\pi\sin^{2m}(\frac{\mu\pi}{2})}{\int_0^{\mu\pi}\sin^{2m}(\frac{v}{2})\,dv}$

فإن : $\dfrac{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\lambda}\sin^{2m}(\frac{v}{2})_*\,dv}{\sin^{2m}(\frac{\mu\pi}{2})} \le \frac{\mu}{\alpha}(\frac{\lambda}{\mu})^\alpha$

وذلك من أجل $0 < \mu \le 1 \ ,\ \lambda > 0 \ ,\ m = 1,2,\dots$

لنضع $\mu = 1 \ ,\ m = 2$ نجد أنه من أجل : $\alpha = \alpha(2,1) = \dfrac{\pi}{\int_0^\pi \sin^4(\frac{v}{2})\,dv} = \frac{8}{3}$

يكون : $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi\lambda}\sin^4(\frac{v}{2})_*\,dv \le \frac{3}{8}\,\lambda^{8/3}$

والتي تكتب بالشكل : $\forall\ \lambda > 0\ ;$ $\int_0^{\pi\lambda} (1-\cos v)_*^{\ 2}\ dv \ \le \frac{3}{2}\ \ \pi\,\lambda^{8/3}$

الاستنتاجات و التوصيات:

استنتجنا أن الثابتة دقيقة في متراجحة جاكسون أي أنها أصغر ثابتة تحقق المتراجحة بمعامل الاستمرار من الدرجة الثانية في فضاء هاردي ولا يمكن أن تكون أصغر من ذلك .

التوصيات لنعمل على اثبات متراجحة جاكسون من أجل معامل الاستمرار من الدرجة الثالثة أو من الدرجة n

المراجع

1. KORNEICHUK ,N.*Exact constants in approximation theory*. first published,Cambridge university, Great Britain**,**1991 ,pp450

2. KOLMOGOROFF,A,N.*Uber die beste Annaherung von Funktioneniner gegebenen*. Funktionenklasse Annals of Math, T.37.,1936 ,pp107-111.

3. LIANHONG,Y.; Liu YONGPING. L. *Relative widths of smooth functions determined by linear differential operator* . VOL.351, Journal of Mathematical Analysis and Applications,2009, pp 734-746.

4. Yuguang .W ., Feilong .C. *The Direct and Converse Inequalities for Jackson-Type Operators on Spherical Cap*.arxiv:1409.3807v1 [math. C]12sep 2014, pp1-16

5. حسن يوسف . بعض الخواص التقريبية في الفضاء L_2، رسالة دكتوراه مترجمة عن الروسية و محفوظة في جامعة البعث,1990.

6. حسن يوسف .متراجحة جاكسون بمعامل الملاسة في الفضاء L_2 ، مجلة جامعة البعث المجلد 25 العدد 7,2003 ، pp150_136.

7. حسن يوسف . العلاقة بين أحد صفوف تايكوف والصف $Lip_{1\backslash 2}$ في الفضاء L_2، مجلة جامعة البعث المجلد 23 العدد 4,2002 ، pp.133_115

8. ميساء صافي . الأقطار لصف من الدوال التحليلية ، رسالة ماجستير ، جامعة البعث ،2010 .