

محاكاة عددية للمعادلات التفاضلية العشوائية باستخدام تقريبات دالة شرائحية

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور أحمد الوسوف**

علي سمير احسان***

(تاريخ الإيداع 17 / 5 / 2016. قُبِلَ للنشر في 17 / 11 / 2016)

□ ملخص □

نقدم في هذا العمل محاكاة عددية للمعادلات التفاضلية العشوائية باستخدام تقريبات دالة شرائحية. تمت محاكاة عملية وينر العشوائية المستمرة مع الزمن كعملية منفصلة، ثم دراسة الاستقرار العشوائي المقارب للتقريبات الشرائحية مع خمس نقاط تجميع عندما تُطبَّق مع عملية وينر لحل منظومات من المعادلات التفاضلية العشوائية. تبين الدراسة أن الطريقة تكون مستقرة ومتقاربة عندما يتم تطبيقها لحل منظومة معادلات تفاضلية عشوائية خطية وغير خطية. وقد تم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل مسألتين اختبارات الأولى خطية والثانية غير خطية، وتشير النتائج العددية إلى فعالية وكفاءة الطريقة الشرائحية المقترحة بالمقارنة مع طرائق أولر-مارياما، ميلستين، رانج-كوتا.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية، عملية وينر، كثيرة حدود شرائحية، تقارب، الاستقرار العددي.

* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** أستاذ مساعد - قسم الاحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الاحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Numerical Simulation Stochastic of Differential Equations by Using Spline Function Approximations

Dr. Suliman M. Mahmood*
Dr. Ahmad Al-Wassouf **
Ali S. Ehsan ***

(Received 17 / 5 / 2016. Accepted 17 / 11 / 2016)

□ ABSTRACT □

In this paper, spline approximations with five collocation points are used for the numerical simulation of stochastic of differential equations(SDE). First, we have modeled continuous-valued discrete wiener process, and then numerical asymptotic stochastic stability of spline method is studied when applied to SDEs. The study shows that the method when applied to linear and nonlinear SDEs are stable and convergent.

Moreover, the scheme is tested on two linear and nonlinear problems to illustrate the applicability and efficiency of the purposed method. Comparisons of our results with Euler–Maruyama method, Milstein’s method and Runge-Kutta method, it reveals that the our scheme is better than others.

Key Words: Stochastic Differential Equations, Wiener Process, Spline Collocation Polynomial, Convergence, Numerical stability.

* Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

** Assistant Prof, Depart. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Depart. of Mathematical Statistics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية منظومات هامة جداً نظراً لتطبيقاتها الواسعة في نمذجة الظواهر العشوائية، وهي تحدث في منظومة المعادلات التفاضلية التي تتأثر بالضجة العشوائية، ونجد لها استعمالات وتطبيقات واسعة، فعلى سبيل المثال، في علم الاقتصاد وتدبير الموارد المالية (معدل الفائدة، البورصة وأسعار الأسهم، الخ)، في علم البيولوجيا (نموذج السكّان، معدل الزيادة، معدل الوفيات، الأوبئة، الخ)، في علم الفيزياء (جزيئات السوائل، الضجيج الحراري، الخ)، في علم التحكم ومعالجة الإشارات (ضبط، تصفية، الخ).

إنّ المعادلات التفاضلية العادية تملك حلاً وحيداً من أجل كل تحديد لشروط ابتدائية مناسبة، في حين أن المعادلة التفاضلية العشوائية تملك حلول ذات عمليات عشوائية مستمرة مع الزمن، أي أن الحل قد يكون معلوم في اللحظة الحالية عند الزمن t ، ولكن في المستقبل (بعد لحظة) أي في الزمن $t+dt$ سيكون الحل غير معروف، وكأمثلة نموذجية على ذلك:

عدد خلايا السرطان، عدد الأشخاص المصابين بمرض وبائي، أسعار الأسهم في الشركات، سعر المواد الغذائية أثناء الحروب والأزمات، سعر الذهب أو الدولار أو النفط الخ.

فُدمت مجموعة من الطرائق العددية [8-1] لمحاكاة حلول المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية وغير الخطية نذكر منها :

قدم Higham في عام 2001 دراسة التقارب الضعيف والقوي لطريقة أولر مارياما وطريقة ميلستين بعد تطبيقها لنموذج اختبار من المعادلات التفاضلية العشوائية . درس Tocino and Ardanuy عام 2002 تقارب ضعيف لطرائق رانج كوتا الصريحة من المرتبة الثالثة. قدم Carletti في عام 2006 حلاً عددياً للمسألة المطروحة بتطبيق منشور تايلور و رانج كوتا وأولر مارياما. قدمت بعد ذلك تطويرات لطرائق رانج-كوتا ودراسة استقرارها فكانت من المرتبة الثانية في [6,9] ومن المرتبة الخامسة في [8] . وحديثاً، فُدم في [11-12] محاكاة عددية بطريقة ميلستين مع منشور تايلور وطريقة كيسلر وأوزاكي وفي [13] قدم نموذج باستخدام ضجة ليفي Levy.

قبل البدء بعرض الموضوع نقدم فيما يأتي بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بمسألة المعادلات التفاضلية العشوائية:

إن مجموعة المتغيرات العشوائية X_t بالأعداد الحقيقية $t \geq 0$ ، تدعى عملية عشوائية مستمرة مع الزمن، وكل حالة أو تحقيق للعملية العشوائية المستمرة مع الزمن هو اختيار لمتغير عشوائي X_t ، من أجل كل t ، ولهذا فهي دالة تابعة لـ t .

تعريف 1: عملة وينر (Wiener Process): [1]

إن عملية وينر القياسية فوق المجال $[0, T]$ هي متغير عشوائي $W(t)$ مستمر مع الزمن، حيث $t \in [0, T]$ تحقق الخصائص الخمس الآتية:

خاصة 1: من أجل كل t ، يكون توزيع المتغير العشوائي $W(t)$ توزيعاً طبيعياً بمتوسط Mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي t .

خاصة 2: إن $W(0) = 0$ باحتمال يساوي 1.

خاصة 3: من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ، يكون الفرق $W(t_2) - W(t_1)$ متغير عشوائي موزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ العبارة الآتية:

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \sqrt{t_2 - t_1} N(0,1)$$

حيث $N(0,1)$ يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

خاصة 4: من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقان $W(t_2) - W(t_1)$ و $W(t_4) - W(t_3)$ يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين.

خاصة 5: إن عملية وينر $W(t)$ يمكن تمثيلها بمسارات مستمرة.

لقد أخذت عملية وينر هذا الاسم نسبة لـ نوربيرت وينر Norbert Wiener، الذي قدمها في عام 1923 وهي تعد الصيغة الرياضية الدقيقة التي تمثل السلوك العشوائي لحركة براون التي كان قد وصفها عالم النبات روبرت براون Robert Brown عام 1827، والتي يطلق عليها اسم حركة براون، أو عملية وينر نسبة إليهما. كما ويمكن تعريف عملية وينر (حركة براون) بدقة كنهاية سلمية للجولات العشوائية عندما يكون طول الخطوة ومجال الزمن بين الخطوات كلاهما يسعى إلى الصفر.

إن عملية وينر تكون حاسمة في نمذجة العمليات العشوائية لأنها تمثل التكامل للضجيج المثالي المستقل عن التكرار والمسمى بالضجة البيضاء.

تعريف 2: عملية وينر متعددة الأبعاد [2]: Multi- Dimensional Wiener Process :

إن عملية وينر من البعد m هي عملية عشوائية $(W(t))_{t \geq 0}$ ، حيث $W(t) : R_+ \rightarrow R^m$ وأن $(W_i(t))_{t \geq 0}$ لأجل $i = 1, \dots, m$ ، هي عمليات عشوائية من بعد واحد، وعندئذ نكتب:

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^t$$

تشير t في أعلى القوس الأيمن للمنقول.

المعادلات التفاضلية العشوائية: Stochastic Differential Equations :

لتكن $(W(t))_{t \geq 0}$ عملية وينر من البعد m ، و X_0 شعاع عشوائي من البعد d ، وهو مستقل عن $(W(t))_{t \geq 0}$ ، يمكن صياغة المعادلة التفاضلية العشوائية في المجال $[0, T]$ كالآتي:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t) \quad (1)$$

من أجل $t \in [0, T]$.

حيث:

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))^t$$

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^t$$

$$g : [0, T] \times R^d \rightarrow R^{d \times m}$$

حيث $W(t)$ هي عملية وينر من البعد m ، $X(t)$ عملية عشوائية، تسمى الدالة f معامل الإزاحة للمعادلة التفاضلية العشوائية، وتدعى الدالة g بمعامل انتشارها، وهي مصفوفة من الشكل $d \times m$.

نلاحظ أن المنظومة التفاضلية العشوائية (1) تعطى بالشكل التفاضلي على خلاف الشكل المشتق للمعادلة التفاضلية العادية، والسبب في ذلك هو أن العديد من العمليات العشوائية تشبه عملية وينر، تكون مستمرة لكنها ليست قابلة للاشتقاق باحتمال يساوي 1، أي أن العملية $dW(t)/dt$ غير ممكنة، لهذا يمكن كتابة (1) بالشكل التكاملية الآتي:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s) , t \in [0, T] \quad (2)$$

حيث إن الشرط الابتدائي $X(0) = X_0$ هو متغير عشوائي.

تكامل إيتو : Ito integral [2]

إن التكامل الأخير $\int_0^t g(s, X(s))dW(s)$ في الطرف الأيمن من العلاقة (2) يدعى بتكامل إيتو ،

وللتعرف على هذا التكامل نعرض الآتي:

لتكن لدينا $c = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = d$ تجزئة للمجال $[c, d]$ ، يعطى تكامل ريمان كنهاية من

الشكل:

$$\int_c^d f(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ، و $t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i$

وبشكل مشابه فإن تكامل إيتو هو النهاية :

$$I = \int_c^d f(t)dW(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta W_i \quad (3)$$

حيث $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ هي خطوة عملية وينر للتكامل. والخلاف الأساسي هو أن النقطة \bar{t}_i

يمكن اختيارها كأى نقطة من المجال (t_{i-1}, t_i) ، بينما في تكامل إيتو يكون المطلوب t_{i-1} نقطة الطرف الأيسر للمجال.

بما أن f ، $W(t)$ عمليتان عشويتان ، لهذا يُعبّر عن تكامل إيتو بالشكل التفاضلي كالاتي:

$$dI = f(t)dW(t)$$

يسمى التفاضل $dW(t)$ لعملية وينر $W(t)$ بالضجة البيضاء White Noise.

نقدم في هذه الورقة تقنية تكرارية عددية لمحاكاة حلول المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية وغير الخطية

ودراسة الاستقرار والتقارب.

أهمية البحث وأهدافه:

يلجأ الباحثون إلى تصميم نماذج رياضية للمساعدة في فهم الظواهر الطبيعية المختلفة، وهذه النماذج تتوّل في كثير من الأحيان إلى معادلات تفاضلية عشوائية، وهي تلعب دوراً بارزاً في كثير من التطبيقات العلمية نشاهدها كثيراً كمسائل في الاقتصاد، المالية، وعلم الإحياء، الفيزياء، والكيمياء، وفروع مختلفة. ولكن المشكلة التي تواجه هؤلاء الباحثين هي عدم وجود حلول دقيقة لمثل هذه النماذج، ومن هنا تكمن أهمية محاكاة الحل عددياً. أما هدفنا فهو دراسة طريقة عددية لتقريب الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية ومحاكاتها بالحلول العددية.

طرائق البحث ومواده:

نناقش في هذه الورقة طريقة عددية لمحاكاة مسارات الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية، ودراسة التقارب والاستقرار العددي لهذه الطريقة عندما تطبق لنموذج اختبار من المعادلات المطروحة. تستخدم التقنية

المطروحة كثيرات حدود شرانجية مع خمس نقاط تجميع تحقق المسألة المطروحة. ستختبر الطريقة بحل بعض مسائل الاختبار و ستقارن النتائج مع طرائق أخرى.

Results and discussions: النتائج والمناقشة:

محاكاة المسار لعملية وينر العشوائية حاسوبيا:

Simulation of Discrete Wiener Process Path by Computer

نجد أنه من المفيد جداً في التطبيقات الحاسوبية التعبير عن عملية وينر كعملية منفصلة، حيث تكون $W(t)$ محددة عند قيم منفصلة لـ t . لهذا نأخذ تجزئة منتظمة للمجال $[0, T]$ باستخدام خطوة $dt = \frac{T}{N}$ ، لأجل عدد صحيح موجب N ، حيث سنرمز بـ W_j لتشير إلى $W(t_j)$ عند $t_j = j dt$ ، $j = 0, 1, \dots, N$. وهكذا يتحقق لدينا من خصائص عملية وينر الآتي:

نجد أولاً أن $W_0 = 0$ باحتمال 1.

كذلك نجد أن:

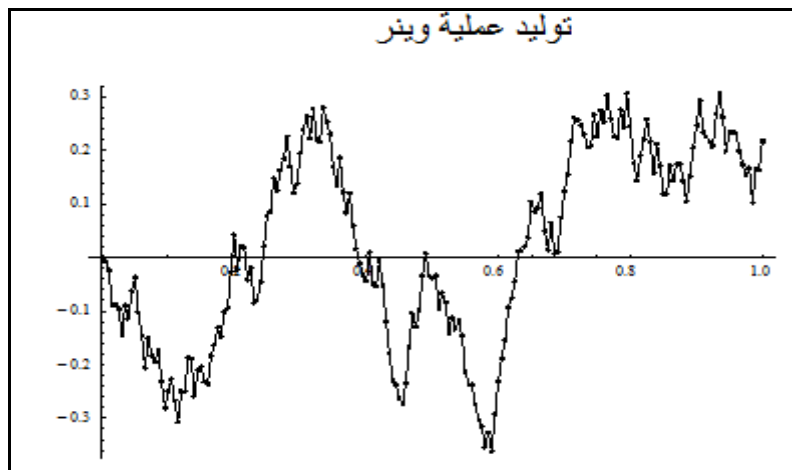
$$W_j = W_{j-1} + dW_j, \quad j = 1, \dots, N$$

إذ إن كل dW_j هو متغير عشوائي مستقل له التوزيع $dW_j \sim \sqrt{dt} N(0, 1)$ ، وبالتالي فإن $dW_j = \sqrt{dt} \text{ran}$ ، حيث ran متغير عشوائي له التوزيع $N(0, 1)$.

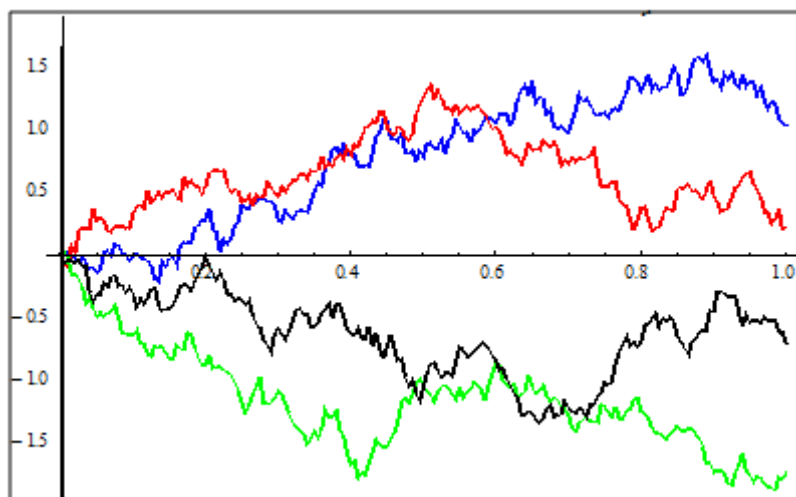
نقدم برنامجاً باستخدام لغة Mathematica9 يحاكي عملية وينر العشوائية المنفصلة في المجال $[0, T]$ ، بخطوة $N=200$ ، $dt=1/200$. نطبق البرنامج لرسم مسار التحاكي في الشكل (1.a)، ونطبقه أيضاً لرسم أربع مسارات مختلفة كما في الشكل (1.b)، ثم نحسب المتوسط والوسط والتباين لقيم وينر العشوائية ونضع النتائج في الجدول (1).

المدخلات: $N=200$ ، $T=1.0$ ، $dt=1/200$

```
Clear[W,dW,dt,N,T];
N=200;
T=1.0;
dt=(T)/(N);
W[0]=0;
dW[1]=Sqrt[dt]*RandomReal[{-1,1}];
W[1]=W[0]+dW[1];
For[i=2,i<=N,
dW[i]=Sqrt[dt]*RandomReal[{-1,1}];
W[i]=W[i-1]+dW[i];
i++]
ListPlot[Table[{i dt,W[i]},{i,0,N}],Joined->True,Mesh->All,PlotLabel->"Wiener
procc"]
Wien = Table[W[i], {i, 0, n}]
{Mean[Wien], Variance[Wien]}
Median[Wien]
```



الشكل(1.a): توليد عملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,1].



الشكل(1.b): تنفيذ أربعة مسارات لعملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,1].

جدول(1): قيم وسطاء عملية وينر الممثلة في الشكل(1.a) باستخدام $N=200$ ، وخطوة زمنية $dt=1/200$

متوسط القيم العشوائية Mean[W]	وسيط القيم العشوائية Median [W]	تشتت القيم العشوائية Variance[W]
0.0232568	0.0191358	0.0327034

صياغة طريقة تجميع شرائحية للمعادلات التفاضلية العشوائية:

نوضح الطريقة المقترحة بتطبيقها للمعادلة التفاضلية العشوائية المعطاة وفق صيغة ستراتونوفيتش

(Stratonovich) [6] كالآتي:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t)) \circ dW(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

مع الشرط الابتدائي $X(0) = X_0$.

يبين المرجع [6] أن صيغة ستراتونوفيتش (Stratonovich) تعطى بالشكل:

$$g(t, X(t)) \circ dW(t) = \frac{1}{2} g'_X(t, X(t))g(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

لحل المسألة (4) نستخدم تجزئة منتظمة: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ للمجال $[0, T]$ ،

حيث $t_i = i dt$ ، $i = 0, 1, \dots, N$ ، و $dt = \frac{T}{N}$ طول الخطوة، و N عدد صحيح موجب.

تستخدم التقنية الشرانحية النقاط التجميعية الخمس الآتية:

$$t_{k+z_j} = t_k + z_j dt, \quad j = 1, \dots, 5 \quad (5)$$

في كل مجال جزئي $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ ، $k = 0, 1, \dots, N-1$ ، مع خمس وسطاء:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \quad (6)$$

نعرف كثيرة حدود شرانحية من الدرجة الخامسة في كل مجال جزئي I_k كالاتي:

$$S_k(t) = S_k + \sum_{j=1}^5 \frac{(t-t_k)^j}{j!} C_{k,j}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (7)$$

حيث $S_0(t_0) = S_0 = X_0$ قيمة ابتدائية لدالة التكامل $X(t)$ وهي معلومة من شروط البدء للمسألة، و

$C_{k,j}$ ، $j = 1, \dots, 5$ هي مجاهيل يطلب تعيينها عند كل تكرار.

وباشتقاق كثيرة الحدود (7) بالنسبة لـ t نحصل على:

$$S'_k(t) = \sum_{j=1}^5 \frac{(t-t_k)^{j-1}}{(j-1)!} C_{k,j}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (8)$$

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد N شريحة $S_k(t)$ ، $k = 0, 1, \dots, N-1$ ، نسميها كثيرة حدود شرانحية تعطى

بالشكل:

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t), & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ S_k(t), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \vdots \\ S_{N-1}(t), & t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases}$$

الآن بتطبيق كثيرات الحدود الشرانحية (7)-(8) مع نقاط التجميع (5)-(6) إلى منظومة المعادلات

التفاضلية العشوائية (4)، ينتج لدينا:

$$S'(t_{k+z_j}) dt = f(t_{k+z_j}, S(t_{k+z_j})) dt + g(t_{k+z_j}, S(t_{k+z_j})) \circ dW(\tau_k), \quad (9)$$

$$j = 1, \dots, 5, \quad k = 0, \dots, N-1$$

وهي خاضعة للشروط الابتدائية:

$$S^{(0)}(t_0 = 0) = S_0 = X_0 \quad (10)$$

حيث $t_{k+z_j} \in [t_k, t_{k+1}]$ ، $j = 1, \dots, 5$.

تكتب المنظومة (9) بالشكل:

$$(1 + h z_j C_{k,1} + \frac{(h z_j)^2}{2} C_{k,2} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,3} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,4} + \frac{(h z_j)^5}{5!} C_{k,5}) dt = f(t_{k+z_j}, S(t_{k+z_j})) dt + g(t_{k+z_j}, S(t_{k+z_j})) \circ dW_k \quad (11)$$

$$j = 1, \dots, 5, \quad k = 0, \dots, N-1$$

نعيد كتابة المنظومة (11) بصيغة المصفوفات، نحصل على الصيغة التكرارية الآتية:

$$A \bar{C}_k = \bar{F}_k + \bar{G}_k, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (12)$$

حيث: $dW_k = \sqrt{dt} \text{ran}$ ، و ran متغير له التوزيع $N(0, 1)$ ، و $dt = h$ في التجزئة المستخدمة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} \\ 1 & z_2 & \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} \\ 1 & z_3 & \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} \\ 1 & z_4 & \frac{z_4^2}{2} & \frac{z_4^3}{6} & \frac{z_4^4}{24} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} h C_{k,1} \\ h^2 C_{k,2} \\ \vdots \\ h^5 C_{k,5} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_k = \begin{bmatrix} f(t_{k+z_1}, S(t_{k+z_1})) \\ f(t_{k+z_2}, S(t_{k+z_2})) \\ \vdots \\ f(t_{k+1}, S(t_{k+1})) \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_k = \begin{bmatrix} g(t_{k+z_1}, S(t_{k+z_1})) \circ dW_k \\ g(t_{k+z_2}, S(t_{k+z_2})) \circ dW_k \\ \vdots \\ g(t_{k+1}, S(t_{k+1})) \circ dW_k \end{bmatrix}$$

إن المنظومة (12) قابلة للحل دائما من أجل $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$ ويمكن تعيين المجاهيل

الخمسة \bar{C}_k في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ لأن المصفوفة A المعرفة بالعلاقة (13) غير شاذة حيث نجد أن:

$$\text{Det}(A) = \frac{1}{288} (z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1)(z_4 - 1)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4) \neq 0$$

استقرار الطريقة الشرائحية : Stability of Spine Method

لدراسة الاستقرار العددي للطريقة المقترحة نطبقها لمسألة الاختبار الخطية النموذجية الآتية [3]:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) \circ dW(t) \quad (14)$$

تخضع للشرط الابتدائي

$$X(0) = X_0$$

حيث أن λ, μ ثابتان حقيقيان.

يملك النموذج العشوائي (14) الحل التحليلي:

$$X(t) = X(0) \exp[(\lambda t + \mu W(t))] \quad \text{مع } X(0) = 1$$

و بتطبيق التقريبات (7)-(8) مع نقاط التجميع (5)-(6) إلى مسألة الاختبار (14)، ينتج لدينا:

$$S'(t_{k+z_j}) dt = \lambda S(t_{k+z_j}) dt + \frac{1}{2} \mu^2 S(t_{k+z_j}) dt + \mu S(t_{k+z_j}) dW(\tau_k), \quad (15)$$

$$j = 1, \dots, 5, \quad k = 0, \dots, N-1$$

حيث إن الشرط الابتدائي: $S(t_0 = 0) = S_0 = X_0$ ، و إن: $(j=1, \dots, 5) t_{k+z_j} = t_k + h z_j$

، $dW_k = \sqrt{dt} \text{ran}$ و ran له التوزيع $N(0, 1)$ و $dt = h$.

تؤول المنظومة (15) باستخدام التقريبات الشرانجية إلى الشكل المصفوفي الآتي:

$$[A - (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B] \bar{C}_k = (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) \bar{S}_k \quad , k=0,1,\dots,N-1$$

(16)

حيث A هي المصفوفة المعبر عنها بالعلاقة (13)، و

$$B = \begin{bmatrix} z_1 & \frac{z_1^2}{2} & \frac{z_1^3}{6} & \frac{z_1^4}{24} & \frac{z_1^5}{120} \\ z_2 & \frac{z_2^2}{2} & \frac{z_2^3}{6} & \frac{z_2^4}{24} & \frac{z_2^5}{120} \\ z_3 & \frac{z_3^2}{2} & \frac{z_3^3}{6} & \frac{z_3^4}{24} & \frac{z_3^5}{120} \\ z_4 & \frac{z_4^2}{2} & \frac{z_4^3}{6} & \frac{z_4^4}{24} & \frac{z_4^5}{120} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_k = \begin{bmatrix} h C_{k,1} \\ h^2 C_{k,2} \\ \vdots \\ h^5 C_{k,5} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_k = \begin{bmatrix} S_k \\ S_k \\ \vdots \\ S_k \end{bmatrix}, \quad (17)$$

من جهة أخرى، ينتج لدينا باستخدام التقريب (7) في نقاط التجميع (5)-(6) المنظومة الآتية:

$$\bar{S}_{k+1} = \bar{S}_k + B \bar{C}_k \quad (18)$$

وبحساب شعاع المجاهيل \bar{C}_k من العلاقة (16) وتعويضها في (18) نحصل على المنظومة التكرارية:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k+1} &= \bar{S}_k + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B D^{-1} \bar{S}_k = \\ &= [I + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B D^{-1}] \bar{S}_k \end{aligned} \quad (19)$$

حيث $D = A - (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B$ ، تكتب العلاقة التكرارية (19) بالشكل:

$$\bar{S}_{k+1} = R(h, \lambda, \mu, \text{ran}) \bar{S}_k \quad (20)$$

حيث $R(h, \lambda, \mu, \text{ran}) = [I + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B D^{-1}]$ هي مصفوفة من الشكل 5×5 .

تعد العلاقة التكرارية (20) هامة لأنها تشكل مدخلا لتعريف الاستقرار العشوائي للطريقة الشرانجية المقترحة.

تعريف (4) [3]: نقول عن طريقة عددية إنها مستقرة (Stable) لأجل h, λ, μ إذا كان

$$\|R(h, \lambda, \mu, \text{ran})\| < 1 \quad , \quad \bar{R}(h, \lambda, \mu) = \|R(h, \lambda, \mu, \text{ran})\| < 1$$

حيث $\bar{R}(h, \lambda, \mu) = \|R(h, \lambda, \mu, \text{ran})\| < 1$ تدعى دالة الاستقرار للطريقة العددية.

كما أننا سنستفيد من المبرهنة الآتية:

مبرهنة (1) [14]: إذا كانت القيم المميزة لمصفوفة مربعة ما A تقع جميعها داخل قرص الوحدة، أي أنها

$$\|A\| < 1 \quad \text{و} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0 \quad , \quad \text{حيث} \quad \|AX\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$$

فإذا أخذنا الآن، تقريب شرانجي آخر للطريقة، لكن بقيم ابتدائية مختلفة عندئذ نستطيع أن

نكتب:

$$\|E_k\| = \|\bar{S}_{k+1} - \hat{S}_{k+1}\| = \|R(h, \lambda, \mu, \text{ran})\| \cdot \|\bar{S}_k - \hat{S}_k\| = \|R^k(h, \lambda, \mu, \text{ran})\| \cdot \|\bar{S}_0 - \hat{S}_0\|$$

حيث \bar{S}_0, \hat{S}_0 شرطان ابتدائيان للتقريبين $\bar{S}_{k+1}, \hat{S}_{k+1}$.

من أجل القيم المعيارية $\mu=1, \lambda=-2, h=0.5$ والتي لا تؤثر على العمومية، نجد باستخدام لغة البرمجة

Mathematica أن القيم المميزة بالقيمة المطلقة للمصفوفة $R(h, \lambda, \mu, \text{ran})$ تعطى كالاتي:

$$\{0.837483, 0.875816, 0.875816, 0.962445, 0.962445\}$$

وهي جميعها تقع داخل قرص الوحدة.

وهكذا بحسب المبرهنة (1) سيكون $\|R(h, \lambda, \mu, ran)\| < 1$ ، وكذلك فإن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_k\| = \|\bar{S}_0 - \hat{S}_0\| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|R^k(h, \lambda, ran)\| = 0$$

نستنتج بحسب التعريف (4) أن الطريقة المقترحة مستقرة .

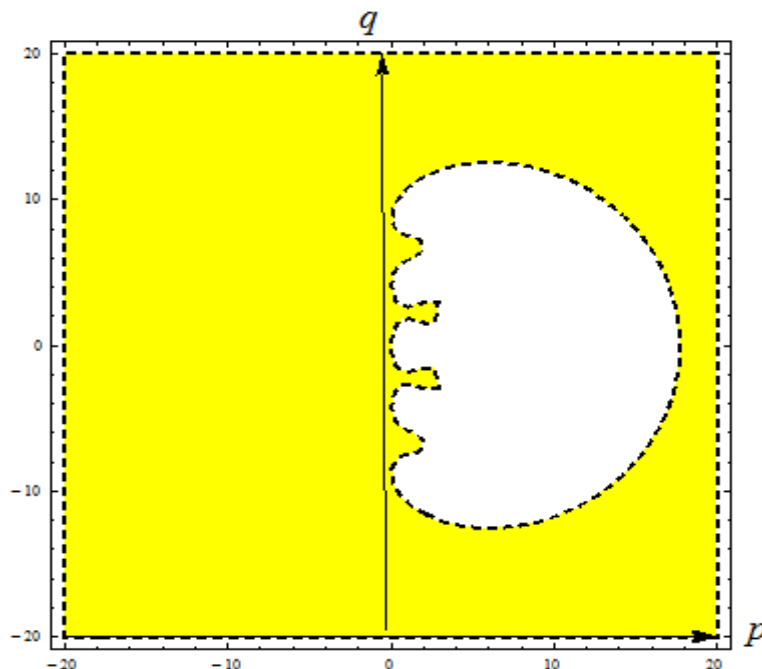
تستخدم دالة الاستقرار $\bar{R}(h, \lambda, \mu)$ في تحديد منطقة الاستقرار للطريقة الشرائحية وفق المتحولين الحقيقيين $p = h\lambda =, q = \mu\sqrt{h}$ وهي المنطقة من المستوي Opq التي ترسمها دالة الاستقرار التي تحقق المتراجحة:

$$\Omega(p, q) = \|R(h, \lambda, \mu, ran)\| < 1$$

عندما تتحول $-\infty < p < \infty, -\infty < q < \infty$.

نحدد في الشكل (3) منطقة الاستقرار للطريقة الشرائحية وهي المنطقة المظللة باللون الأصفر، وتشمل هذه

المنطقة وتغطي الجزء الأيسر من المستوي كاملاً، وهذا يدل على أن منطقة الاستقرار للطريقة كبيرة جداً.



الشكل(2): منطقة الاستقرار للطريقة الشرائحية هي المنطقة المظللة .

تقدير الخطأ للطريقة الشرائحية Error Estimation for Spilne Method

تعريف(5) [4]: نقول عن طريقة عددية إنها متسقة (Consistent) من الرتبة p إذا كان

$$\|\bar{\tau}\|_{\infty} = \max_{0 \leq k \leq N} \|\bar{\tau}_k\| = O(h^p)$$

حيث $\bar{\tau}_k$ يرمز لخطأ الاقتران الموضعي للطريقة عند t_k .

بفرض أن $X(t) \in C^6[0, T]$ وأن $S_k(t)$ هي دالة الشريحة التقريبية. وبفرض أن $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_k)$ هو شعاع ذو خمس مركبات. بتطبيق التقريب الشرائحي (7) في نقاط التجميع الخمس، بحيث أن $S_0 \cong X_0$ و $S_k(t_{k+z_j}) \cong X(t_{k+z_j})$ نحصل على صيغة الخطأ المقتطع الموضعي للطريقة مطبقة لنموذج الاختبار (14) كالآتي:

$$\bar{\tau}_k = B \bar{C}_k + \bar{\Psi}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (21)$$

حيث

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} S_k - X(t_k + z_1 h) \\ S_k - X(t_k + z_2 h) \\ S_k - X(t_k + z_3 h) \\ S_k - X(t_k + z_4 h) \\ S_k - X(t_k + h) \end{bmatrix},$$

وبحساب \bar{C}_k من العلاقة (16) وتعويضها في العلاقة (21)، نحصل على:

$$\bar{\tau}_k = (\lambda h - \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B D^{-1} \bar{S}_k + \bar{\Psi}_k \quad (22)$$

حيث: $D = A - (\lambda h - \mu \sqrt{h} \cdot \text{ran}) B$ وباستخدام منشور تايلور للدالة $X(t)$ حول t_k والتعويض في (22) ينتج لدينا:

$$, k=0, \dots, N-1 \quad (23) \quad \bar{\tau}_k = \begin{bmatrix} \frac{X^{(5)}(t_k)}{375000} h^5 \\ \frac{X^{(5)}(t_k)}{3840} h^5 \\ \frac{128 X^{(5)}(t_k)}{46875} h^5 \\ \frac{19683 X^{(5)}(t_k)}{4000000} h^5 \\ \frac{X^{(5)}(t_k)}{120} h^5 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\|\bar{\tau}_k\|_\infty = \frac{|X^{(5)}(t_k)|}{120} h^5 \equiv O(h^5)$$

حيث

$$X(t) = \sum_{i=0}^5 \frac{(t-t_k)^i}{i!} X^{(i)}(t_k) + O(h^6), \quad x \in [t_k, t_{k+1}] ,$$

لقد تم استخدام قيم لوسطاء التجميع $z_1=0.2, z_2=0.5, z_3=0.8, z_4=0.9$ لتوضيح النتائج.نلاحظ من العلاقة (23) أن الخطأ الموضعي عند الخطوة k من الرتبة الخامسة للطريقة الشرانجية المطبقةلنموذج الاختبار، وأما الخطأ الشامل عند نهاية مجال الحل $[0, T]$ يقدر من أجل N خطوة وبالتالي فان :

$$\text{Error} = N \cdot O(h^5) = \frac{T}{h} O(h^5) \equiv O(h^4)$$

نتيجة 1: نجد بحسب التعريف (5) أن الطريقة الشرانجية المطبقة تكون متناسقة من الرتبة الرابعة.

المحاكاة العددية: Numerical Simulation

يتم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بتطبيقها لحل مسألتين اختبار نموذجيتين في المعادلة التفاضلية

العشوائية، الأولى خطية والثانية غير خطية، لهما حلول تحليلية محددة، بهدف توضيح فعالية الطريقة من خلال

مقارنتها مع ثلاث طرائق مختلفة هي: طريقة أولر مارياما Euler-Maruyama، وطريقة ميلستين Milstein،

وطريقة رانج-كوتا Rung-Kutta، كما تم إعداد البرامج المطلوبة باستخدام لغة Mathematica.

المسألة 1: [1] لنأخذ في اختبارنا الأول المعادلة التفاضلية العشوائية الخطية الآتية:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) dW(t)$$

مع الشرط الابتدائي

$$X(0) = 1$$

حيث أن λ, μ ثابتان حقيقيان، تملك الحل المعادلة التحليلي الدقيق:

$$X(t) = X(0) \exp\left[\left(\lambda - \frac{1}{2} \mu^2\right)t + \mu X(t) W(t)\right]$$

تمثل هذه المعادلة نموذج لسعر الأصول (الموجودات الثمينة) في الرياضيات المالية.

بوضع $\lambda = 2, \mu = 1, X_0 = 1$ ، وبحساب مسار عملية وينر المنفصلة فوق المجال $[0,1]$ ، من أجل $N=2^8$ وبخطوة $dt=2^{-8}$.

نرسم في الشكل (3) نتائج محاكاة عملية وينر في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$ نقطة. ندرج في

الجدول (2) المتوسط والوسط والتباين لعملية وينر بـ $N=256$ ، وخطوة زمنية $dt=1/200$.

ندرج في الجدول (3) معدل الخطأ للطريقة المقترحة ولطرائق أولر مارياما، ميلستين و رانج-كوتا. في

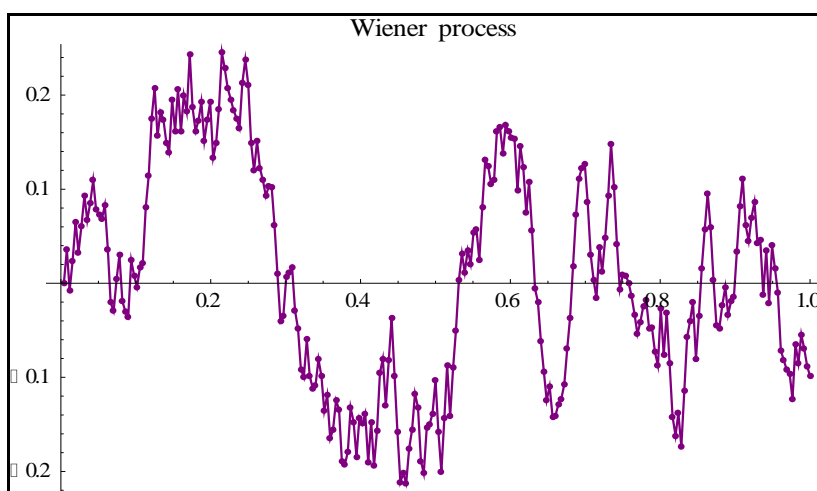
الجدول (4)

نسجل الحل الشرائحي بطريقتنا مع الخطأ المطلق. نرسم في الشكل (4) مقارنة بين الحل الشرائحي والحل

الدقيق.

نرسم في الشكل (5) الحل التقريبي بطريقة أولر مارياما مع الحل الدقيق، في الشكل (6) الحل التقريبي بطريقة

ميلستين مع الحل الدقيق، وفي الشكل (7) الحل التقريبي بطريقة رانج-كوتا مع الحل الدقيق.



الشكل (3): توليد عملية وينر العشوائية في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$ نقطة.

$Wi = \text{Table}[W[i], \{i, 0, n\}]$

$\{\text{Mean}[Wi], \text{Variance}[Wi]\}$

$\text{Median}[Wi]$

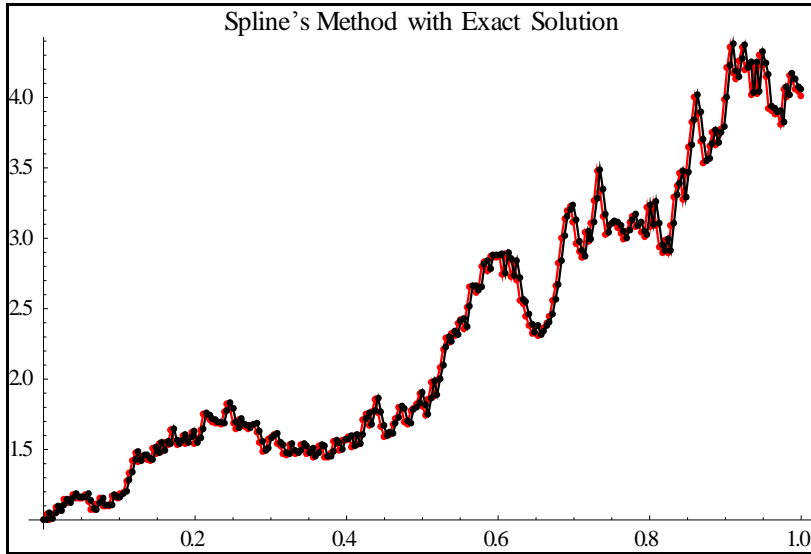
الجدول (2): قيم وسطاء عملية وينر المولدة في الشكل (3) باستخدام $N=256$ ، وخطوة زمنية $dt=1/256$

متوسط قيم وينر Mean[W_t]	الانحراف المعياري Standard Deviation [W_t]	الوسط لقيم وينر Median[W_t]	تشتت قيم وينر Variance[W_t]
0.0048848	0.1151881	0.00346404	0.0132683

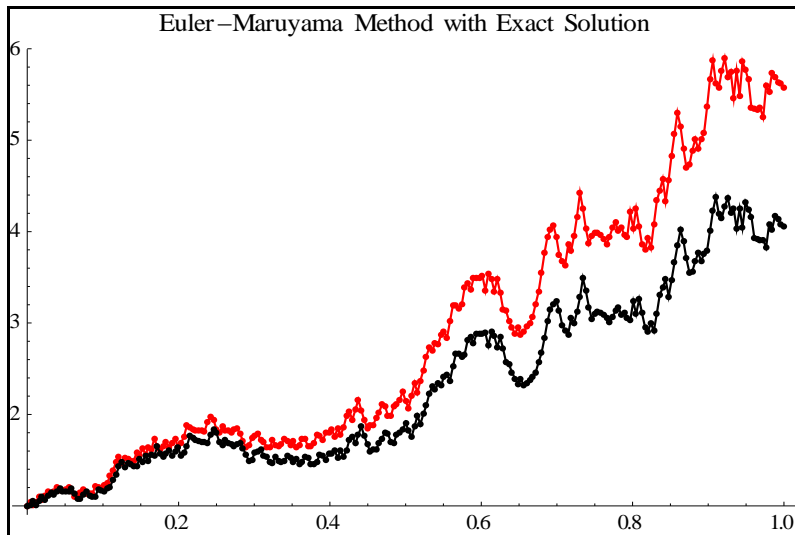
```
Sp = Table[ spl[i], {i, 0, n}];
ErrorSp = Table[ Abs[(spl[i] - X[i])], {i, 0, n}];
{Mean[Sp], Variance[Sp]}
Median[Sp]
{Mean[ErrorSp], Variance[ErrorSp]}
Median[ErrorSp]
NProbability[Err < 0.05, Err ≈ NormalDistribution[Mean[ErrorSp],
Variance[ErrorSp]]]
```

الجدول 3: مقارنة معدلات الأخطاء باستخدام الطريقة المقترحة مع طرائق أخرى .

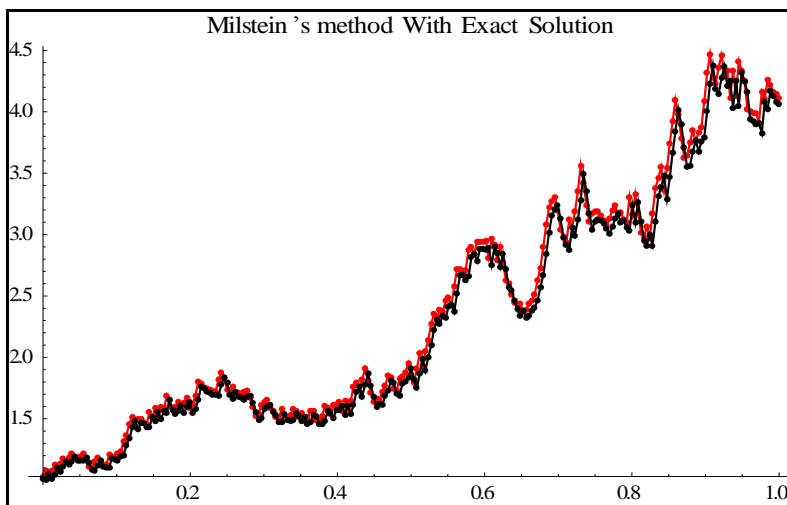
اسم الطريقة	متوسط الخطأ Mean[Error]	الانحراف المعياري للخطأ StandardDeviation[Error]	متوسط الحل Mean [X_i]	تشتت الحل Variance[X_i]	احتمال كون الخطأ أصغر من مقدار صغير
الطريقة المقترحة	0.071594	0.00315924	2.3205	0.933049	$P(Er < 0.05) = 0.999977$
طريقة أولر - مارياما [1]	0.540529	0.4864308	2.07372	2.85839	$P(Er < 1) = 0.973922$
طريقة ميلستين [7]	0.0716355	0.959574	2.3129	0.920782	$P(Er < 0.08) = 0.995965$
طريقة رانج-كوتا 2 [3]	0.0729674	0.0608434	0.951803	2.3437	$P(Er < 0.08) = 0.999996$



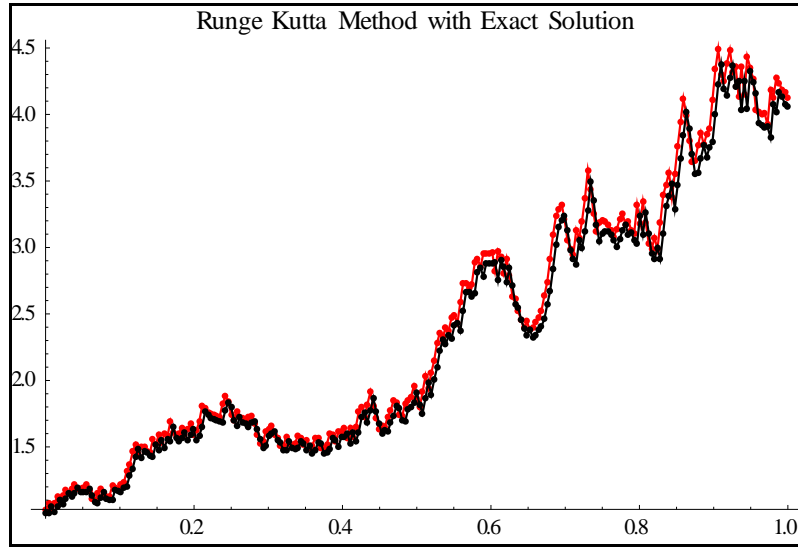
الشكل(4): الحل الشرائحي مع الحل التحليلي في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$ نقطة.



الشكل(5): الحل بطريقة أولر مارياما مع الحل الدقيق في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$.



الشكل(6): الحل بطريقة ميلستين مع الحل الدقيق في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$.



الشكل (7): الحل بطريقة رانج-كوتا مع الحل الدقيق في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=256$.

الجدول 4: مقارنة بين المحاكاة العددية بالطريقة الشرانجية وحساب الخطأ المطلق للمسألة 1.

النقاط الزمنية t_i	الخطأ في الحل الشرانجي	الحل الدقيق	الحل الشرانجي
0.0273438	0.00134861	1.14363	1.14093
0.105469	0.0046247	1.19741	1.24219
0.203125	0.00925838	1.7574	1.74481
0.25	0.0049010	1.87906	1.8839
0.300781	0.006731	1.58845	1.58172
0.359375	0.0018241	1.746731	1.74849
0.386719	0.00062	1.54141	1.54079
0.402344	0.007590	1.59182	1.59592
0.421875	0.006891	1.71207	1.71098
0.425781	0.001921	1.74794	1.74873
0.457031	0.00348	1.60854	1.60506
0.472656	0.0058725	1.78073	1.782005
0.480469	0.0077431	1.67981	1.67238
0.496094	0.003714	1.89847	1.89477
0.5	0.0016951	1.80829	1.80542
0.511719	0.0055811	1.97447	1.97028
0.621094	0.0052131	2.73813	2.76026

0.703125	0.022677	3.1302	3.290342
0.800781	0.09524	3.04129	3.1365
0.90625	0.0908847	4.22851	4.30073
1.0	0.0360333	4.06095	4.02491

المسألة 2: [6] لتكن مسألتنا الثانية غير الخطية مكتوبة وفق صيغة ستراتونوفيتش (Stratonovich) [6]

كالآتي:

$$dX(t) = -(1 - X^2(t)) dt + \beta(1 - X^2(t)) \circ dW(t) \tag{17}$$

مع الشرط الابتدائي

$$X(0) = X_0 = 0$$

حيث أن β ثابت حقيقي معلوم يدعى وسيط الانتشار.

تملك هذه المسألة الحل التحليلي الدقيق:

$$X(t) = \frac{\exp(-2t + 2\beta W(t)) - 1}{\exp(-2t + 2\beta W(t)) + 1}$$

نحل هذه المسألة بوسيط انتشار $\beta = 1$ ، ويعد كبيراً نسبياً، وشرط ابتدائي $X_0 = 0$ ، وحساب مسار عملية وينر

المنفصلة فوق المجال $[0, 1]$ ، من أجل $N = 10^2$ بخطوة $dt = 10^{-2}$ ، موضحاً في الشكل (8).

نسجل في الجدول (5) المتوسط والوسط والتباين لعملية وينر بـ $N = 100$ ، وخطوة زمنية $dt = 0.01$. ندرج في

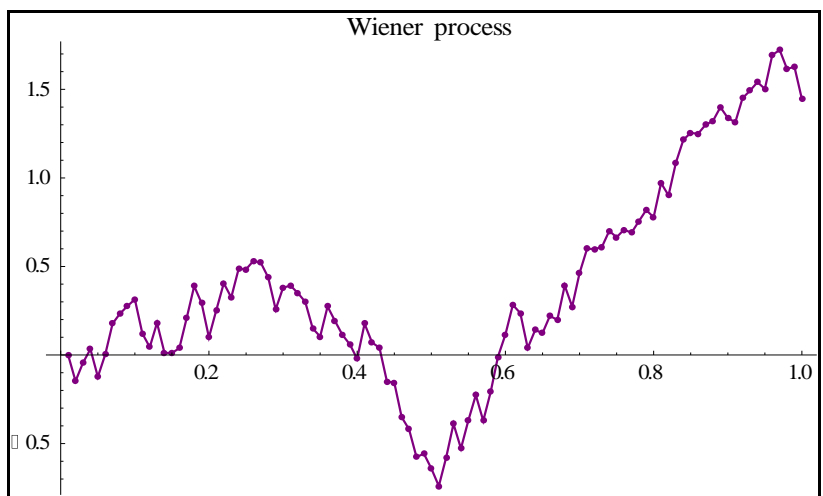
الجدول (6) معدل الأخطاء للطريقة المقترحة ولطرائق أولر مارياما، ميلستين و رانج-كوتا. كما نضع في الجدول (7)،

نتائج الحل الشرائحي مع الخطأ المطلق لطريقتنا، مع رسم الحل الشرائحي و الحل الدقيق في الشكلين (9) و (10) على

الترتيب. أما الشكل (11) يبين مدى التطابق بين الحلين الشرائحي والدقيق للطريقة. إضافة إلى ذلك، نرسم في

الشكل (12) و (13) و (13) الحل التقريبي مع الحل الدقيق بطرائق رانج-كوتا ، أولر- مارياما وطريقة ميلستين على

الترتيب.



الشكل (8): توليد عملية وينر العشوائية في المجال الزمني $[0, 1]$ لأجل $N = 100$ نقطة.

الجدول(5): قيم وسطاء عملية وينر المولدة في الشكل(8) باستخدام $N=100$ ، وخطوة زمنية $dt=1/100$

متوسط قيم وينر Mean[W_t]	الوسيط لقيم وينر Median[W_t]	الانحراف المعياري Standard Deviation [W_t]	تشتت قيم وينر Variance[W_t]
0.401099	0.272835	0.602242	0.362696

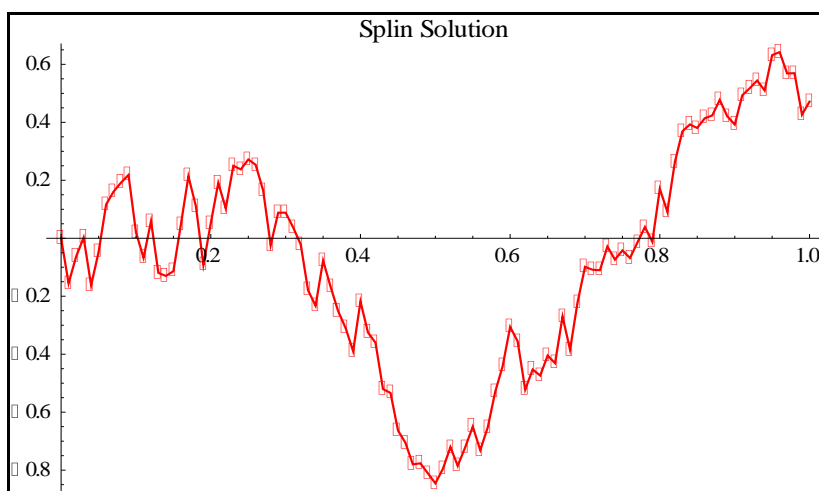
الجدول6: مقارنة معدلات الأخطاء باستخدام الطريقة المقترحة مع طرائق أخرى

اسم الطريقة	متوسط الخطأ Mean[Error]	الانحراف المعياري للخطأ SD [Error]	متوسط الحل Mean [X_t]	تشتت الحل Variance[X_t]	احتمال كون الخطأ أصغر من مقدار صغير
الطريقة المقترحة	0.0170685	0.10549502	- 0.0295841	0.152641	$P(Er<0.06)=$ 0.999943
طريقة أولر - مارياما [7]	0.097744	0.0659517	-0.13575	0.139205	$P(Er<0.15)=$ 0.99999
طريقة ميلستين [12]	0.100972	0.0709426	-0.139568	0.13938	$P(Er<0.12)=$ 0.999922
طريقة رانج - كوتا [6]	0.056972	0.0811178	- 0.0737878	0.150023	$P(Er<0.095)=$ 0.999991

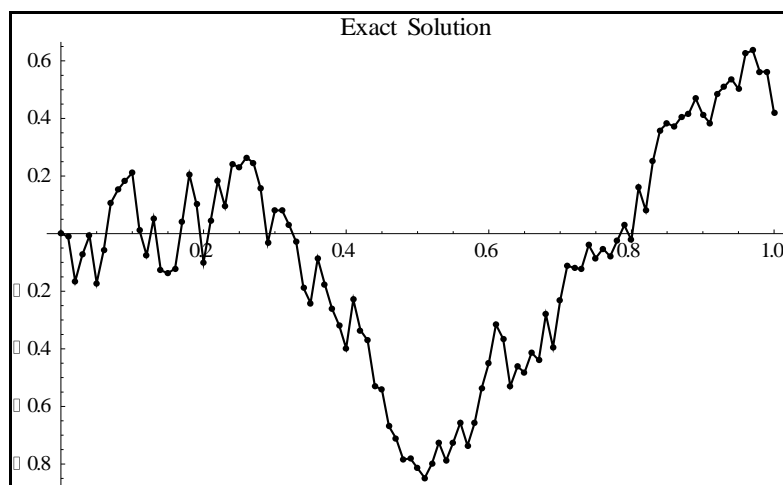
الجدول6: محاكاة عددية بالطريقة الشرانجية مع الحل التحليلي وحساب الخطأ للمسألة2.

النقاط الزمنية t	الخطأ في الحل الشرانجي	الحل الدقيق	الحل الشرانجي
0.01	0.000761459	-0.152701	-0.155936
0.03	0.00214414	0.00310109	0.00516161
0.06	0.00347794	0.117103	0.118659
0.1	0.00294778	0.0222586	0.019003
0.15	0.0000921427	-0.111115	-0.109253
0.16	0.000393088	0.0504604	0.0500428
0.2	0.00243514	0.0508759	0.0541353
0.3	0.0175249	0.0907442	0.0720521
0.37	0.00884494	-0.250916	-0.25562
0.4	0.0000381617	-0.219263	-0.21573
0.45	0.0122684	-0.664129	-0.641469
0.5	0.0177239	-0.845605	-0.814683

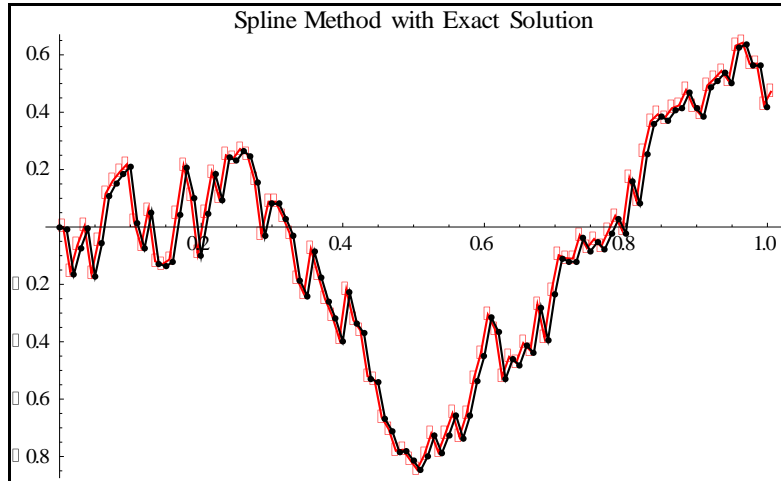
0.55	0.0582966	-0.650549	-0.582811
0.62	0.0968132	-0.523118	-0.419508
0.84	0.0967312	0.392187	0.481124
0.85	0.0942295	0.379893	0.466565
0.9	0.0735118	0.392309	0.458395
0.95	0.0356079	0.632041	0.657005
1.0	0.0249086	0.47172	0.488711



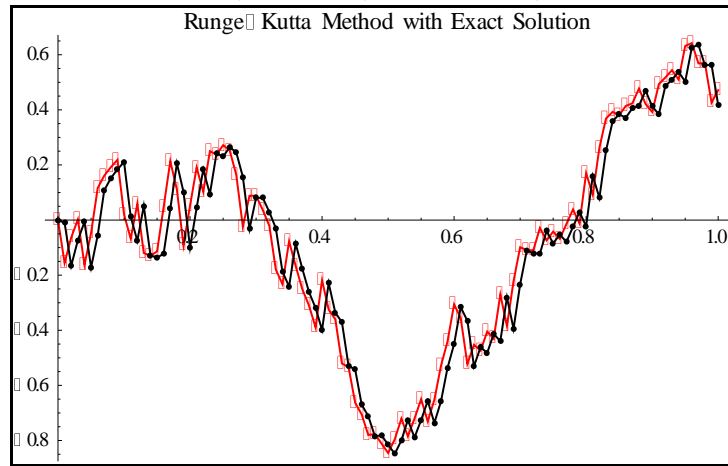
الشكل(9): الحل العددي بالطريقة الشرائحية في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=100$ نقطة.



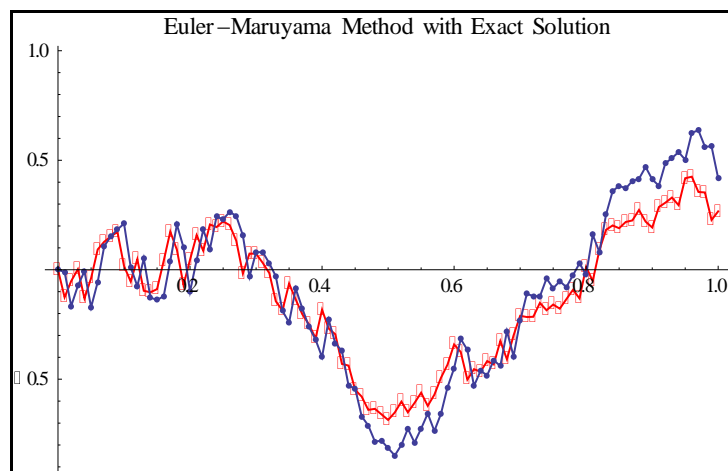
الشكل(10): الحل الدقيق في المجال الزمني $[0,1]$ لأجل $N=100$ نقطة.



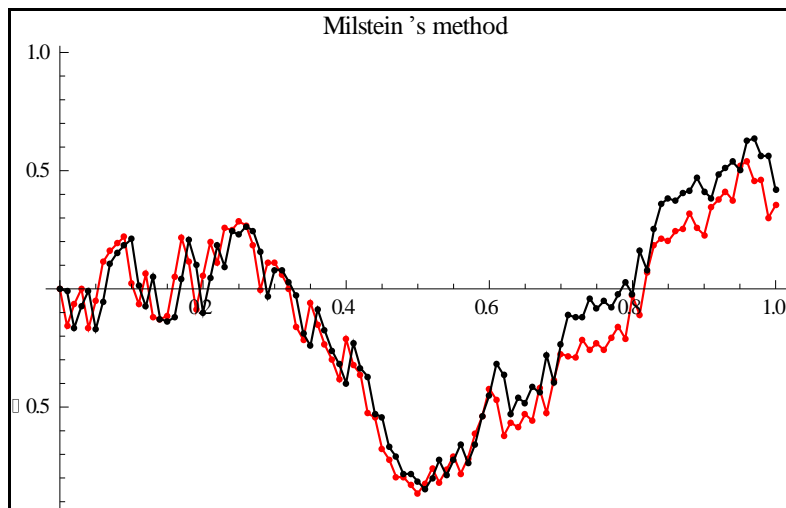
الشكل (11): الحل الشرانجي مع الحل الدقيق في المجال الزمني [0,1] لأجل $N=100$ نقطة.



الشكل (12): الحل الشرانجي مع الحل الدقيق في المجال الزمني [0,1] لأجل $N=100$ نقطة.



الشكل (13): الحل بطريقة أولر مارياما مع الحل الدقيق في المجال الزمني [0,1] لأجل $N=100$ نقطة.



الشكل (14): الحل بطريقة ميلستين مع الحل التحليلي في المجال [0,1] لأجل $N=100$ نقطة.

الاستنتاجات والتوصيات

تم تقديم محاكاة عددية لحلول المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية وغير الخطية باستخدام طريقة شرانجية تعتمد على خمس نقاط تجميع، وقد نجحت هذه التقنية في تقليد الحل التحليلي ومطابقته إلى حد كبير كما توضح الرسومات البيانية في الأشكال (1)-(13)، وكذلك تشير نتائج المقارنات لمعدلات الأخطاء في الجداول (3)-(6) إلى أن الطريقة المقترحة هي أفضل من طرائق أولر-مارياما، وميلستين و رانج-كوتا من المرتبة الثانية.

البرنامج باستخدام لغة Mathematica للطريقة الشرانجية مطبقة لحل المسألة الأولى:

```
Clear[ X,f, dW, W, c, Spl, z, a, b];
n = IntegerPart[2^8]; W[0] = 0;
dW[1] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
W[1] = W[0] + dW[1];
For[i = 2, i <= n,
  dW[i] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
  W[i] = W[i - 1] + dW[i]; i++]
T = 1.0; dt = (T)/(n);
X0 = 1.; lam = 2; mew = 1; X[0] = 1;
X[1] = X[0] Exp[(lam - 0.5 mew^2) (dt) + mew*W[1]];
For[i = 2, i <= n,
  X[i] = X[0] Exp[(lam - 0.5 mew^2) (i*dt) + mew*W[i]]; i++]
ListPlot[Table[{i dt, W[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All,
  PlotLabel -> "Wiener procc"]
Exact = ListPlot[Table[{i dt, X[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All,
  PlotStyle -> {Black}, PlotLabel -> "Exact procc"]
c1 = 0.2; c2 = 0.4; c3 = 0.6; c4 = 0.8;
z[1] = c1; z[2] = c2; z[3] = c3; z[4] = c4; z[5] = 1;
Off[LinearSolve::luc];
For [r = 1, r <= n ,
  For [i = 1, i <= 5 , i++, x = z[i]*dt; t = x + dt*(r - 1);
```

```

f[i] = dt*lam*X0 + mew*X0*(W[r] - W[r - 1]);
ja[i, 1] = dt*(1 - lam*x) - mew*x*(W[r] - W[r - 1]);
ja[i, 2] = dt*(x - lam*x^2/2) - lam*x^2/2*(W[r] - W[r - 1]);
ja[i, 3] = dt*(x^2/2 - lam*x^3/6) - mew*x^3/6*(W[r] - W[r - 1]);
ja[i, 4] = dt*(x^3/6 - lam*x^4/24) - mew*x^4/24*(W[r] - W[r - 1]);
ja[i, 5] = dt*(x^4/24 - lam*x^5/120) - mew*x^5/120*(W[r] - W[r - 1]);
];
c = LinearSolve[{
  {ja[1, 1], ja[1, 2], ja[1, 3], ja[1, 4], ja[1, 5]},
  {ja[2, 1], ja[2, 2], ja[2, 3], ja[2, 4], ja[2, 5]},
  {ja[3, 1], ja[3, 2], ja[3, 3], ja[3, 4], ja[3, 5]},
  {ja[4, 1], ja[4, 2], ja[4, 3], ja[4, 4], ja[4, 5]},
  {ja[5, 1], ja[5, 2], ja[5, 3], ja[5, 4], ja[5, 5]} },
  {f[1], f[2], f[3], f[4], f[5]} ];
x = z[5]*dt;
spl[r] = X0 + x*c[[1]] + x^2*c[[2]]/2 + x^3*c[[3]]/6 + x^4*c[[4]]/24 +
x^5*c[[5]]/120;
t = x + dt*(r - 1);
X0 = spl[r]; r++;
a1 = ListPlot[Table[{i dt, (1/(1 + 0.002 i)) spl[i]}, {i, 0, n}],
  Joined -> True, Mesh -> All, PlotStyle -> {Red}]
Exact = ListPlot[Table[{i dt, X[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All, PlotStyle
-> {Black}]
Show[a1, Exact]
For[r = 0, r < n - 100, t = dt*r; Print["t", r, "=", t, " ***Error= ", Abs[(1/(1 +
0.0025 i)) spl[r] - X[r]],
  " Sp(", t, ")=", (1/(1 + 0.0027 i)) spl[r], " Exact Xt=", X[r]],
  r++]

```

المراجع:

1. HIGHAM D. J., *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 43, No. 3, pp. 525–546 (2001).
2. TOCINO A., R. Ardanuy, Runge–Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 138 (2002) 219–241.
3. WANG P., Three-stage stochastic Runge–Kutta methods for stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 222 (2008) 324–332.
4. MAHMOUD, S. M., *Three Point Spline Collocation Method For Solving General Linear And Nonlinear Eighth-Order Boundary-Value Problems*, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (36) No (4) 2014.
5. MAO X., *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood, Chichester, 1997.

6. BASTANI A. F., Hosseini S. M. A new adaptive Runge–Kutta method for stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206 (2007) 631 – 644.
7. TIMOTHY Sauer, Computational solution of stochastic differential equations, *WIREs Comput Stat*, vol.5:362–371. doi: 10.1002/wics.1272 (2013) .
8. NINOMIYA M. , S. Ninomiya, A new higher-order weak approximation scheme for stochastic differential equations and the Runge–Kutta method, open access at Springerlink.com, *Finance Stoch* (2009) 13: 415–443.
9. Pederson S. and M. Sambaham, Numerical Solution to Hybrid Stochastic Differential Systems, *Stochastic Analysis and Applications*, 26: 338–356, 2008.
10. Carletti M., Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 185 (2006) 422–440.
11. GUIDOUM, A. C. and Boukhetala, K. (2016), Simulation of Diffusion Processes R package version 3.2. <http://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProc>.
12. MUNTARI UMAR FARUK, Approximating the Solution of an SDE Model for Cancer Cell Growth With a PDE Using the Feynman-Kac Theorem, Master Thesis, Kwame Nkrumah University of Science And Technology(2015).
13. LU C., Q. MA, X. H. DING, Persistence And Extinction for Stochastic Logistic Model With Levy Noise and Impulsive Perturbation, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2015 (2015), No. 247, pp. 1-14.
14. BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, PWS-KENT, Boston Massachusetts, (1993), 559-587.