مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

دراسة خواص وتقريب صف التوابع العقدية H_0^α

الدكتور محمد علي*

(تاريخ الإيداع 3 / 10 / 2012. قُبِل للنشر في 22 / 1 /2013)

□ ملخّص □

يهدف البحث إلى إدخال صف جديد من التوابع العقدية رمزنا له بالرمز H_0^α يعتمد في تعريفه على تعريف صف هولدر الشهير H^α, حيث قمنا بدراسة العلاقة بين الصف الجديد وصف هولدر ومن ثم اثبتنا بعض الخواص التي يتمتع بها الصف H_0^α .

وفي النهاية قمنا بتطبيق هذه الدراسة لتقريب صف التوابع H_0^α على منحنيات مغلفة تنتمي الى اسرة واسعة من المنحنيات .

الكلمات المفتاحية: صف هولدر H^α – تابع عقدي – الصف H_0^α – نظرية التقريب

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين – للاذقية– سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

On properties and approximation of class of functions H_0^α

Dr . Mohammad Ali*

(Received 3 / 10 / 2012. Accepted 22 / 1 /2013)

□ ABSTRACT □

This research aimed to define a new class of complex functions H_0^α**,** which depends in its definition on the definition of famous Holder class H^α . We studied the relation between the new and Holder classes, then we proved some properties of the class H_0^α .

We finally applied this study to approximate the class of complex functions H_0^α on closed curves , which belong to a wide class of curves.

Key words: Holder class of functions H^α , complex functions, H^α class, approximation theory

* **Associate professor, Department of math , Faculty of sciences , Tishreen university , Lattakia , Syria**

مقدمة

تنقسم أساسيات نظرية تقريب التوابع العقدية بشكل عام إلى ثلاثة أقسام رئيسية وهي

1. صف التوابع العقدية الذي يتم تقريبه
2. صف أدوات التقريب او صف التوابع التي يتم التقريب إليها واحد أهم هذه الأدوات صف كثيرات الحدود او التوابع الكسرية
3. الفروق بين التوابع المقربة وأدوات التقريب والتي تسمى بقيمة أفضل تقريب في الحالة التي تتحقق لدينا حالة أفضل تقريب

تهتم المقالة الحالية بالبند الأول من أساسيات نظرية تقريب التوابع العقدية ,فمن المعلوم أن احد أهم الصفوف التابعية التي لفتت انتباه دارسي نظرية تقريب التوابع لفترة طويلة هو صف توابع هولدر H^{α} [1]والذي يعتمد في تعريفه على خاصة معروفة للتوابع التي تنتمي إليه من هذا الصف تم اشتقاق بعض الصفوف الأخرى مثل $H_{\alpha}^{\alpha+\beta}$ [1] و $H_{\alpha p}$ [2] و $Lip_{M,W}^{\alpha}$ [3]. في هذا البحث قمنا بإضافة صف جديد من التوابع وهو H_0^{α} والذي يعتمد تعريفه على انتماء التابع $f_0(w)=f(\psi(w))$ إلى صف توابع هولدر H^{α} على دائرة الوحدة ودرسنا خواصه .

أهمية البحث و أهدافه

تنبع أهمية هذا البحث من كونه يدرس مسألة تقريب صف جديد من التوابع وعلاقة هذا الصف مع صف هولدر وهو يهدف الى الأمور التالية :

1. إعطاء تعريف صف جديد من التوابع وهو H_0^{α} .
2. دراسة العلاقة بين صف هولدر H^{α} والصف الجديد H_0^{α} بالاتجاهين .
3. إثبات بعض خواص التوابع التي تنتمي إلى الصف H_0^{α} .
4. إثبات التداخل بين H_0^{α} و H_0^{β} .
5. تقريب صف التوابع H_0^{α} الى توابع كسرية على اسرة واسعة من المنحنيات المغلقة .

طرائق البحث ومواده

تعتمد دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف الرياضية المعروفة في الرياضيات , وقد استخدمنا عدة طرق رياضية وأهمها طريقة التقريب للتوابع العقدية

تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف1 [1] يعرف صف توابع هولدر H^{α} $(0<\alpha\le 1)$ على المنحني Γ بالعلاقة:

$$H^{\alpha}(\Gamma)=\left\{f\in C(\Gamma):\left|f(z_1)-f(z_2)\right|\le c\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}\quad \forall\ z_1,z_2\in\Gamma\right\}$$

ونقول أن $f\in MH^{\alpha}$ حيث إن M ثابت ما إذا تحقق :

$$MH^{\alpha}(\Gamma)=\left\{f\in C(\Gamma):\left|f(z_1)-f(z_2)\right|\le M\left|z_1-z_2\right|^{\alpha}\quad \forall\ z_1,z_2\in\Gamma\right\}$$

من الواضح أن $MH^{\alpha}\subset H^{\alpha}$

ويعرف صف توابع هولدر أيضا من خلال معامل الاستمرار بالشكل التالي:

تعريف2 :يعرف معامل الاستمرار للتابع $f(z)$ على المنحني Γ بالشكل

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|z_1-z_2|<\delta}|f(z_1)-f(z_2)| \quad \forall z_1,z_2\in\Gamma$$

او بالشكل

$$\omega(f,\delta)=\sup_{h<\delta}|f(z+h)-f(z)| \quad \forall z\in\Gamma$$

ومنه نستطيع تعريف الصف H^{α} $(0<\alpha\le 1)$ بالشكل :

$$H^{\alpha}(\Gamma)=\{f\in C(\Gamma):\omega(f,\delta)\le c\delta^{\alpha}\}$$

نستعرض الآن بعض الرموز المستخدمة في هذه المقالة [4]

ليكن Γ منحني جوردان يملك طولا محدودا يقسم المستوي العقدي الى قسمين منفصلين نرمز لهما بالشكل $G=\operatorname{int}\Gamma$ و $G^{-}=ext\Gamma$ وسوف نرمز لدائرة الوحدة بالرمز γ ويكون :

$$D=\operatorname{int}\gamma \text{ و } D^{-}=ext\gamma$$

سوف نرمز بالرمز $w=\varphi(z)$ للتابع الذي يحول بشكل محافظ خارج المنحني Γ في المستوي z الى خارج دائرة الوحدة في المستوي w بحيث يتحقق :

$$\varphi(\infty)=\infty\ ,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$$

وسوف نرمز لتابعه العكسي بالرمز $z=\psi(w)=\varphi^{-1}(w)$ وهو يحول بشكل محافظ خارج دائرة الوحدة الى خارج المنحني Γ.

اذاكان لدينا تابع $f(z)$ معرف على المنحني Γ فأننا سنرمز للتابع $f(\psi(w))$ بالرمز $f_0(w)=f(\psi(w))$ وهو معرف على دائرة الوحدة .

تعريف 3 : نعرف صف التوابع H_0^{α} بالشكل :

$$H_0^{\alpha}(\Gamma)=\{f(z),\ f_0(w)=f(\psi(w))\in H^{\alpha}(\gamma)\}$$

وعندها يكون : $f(z)\in MH_0^{\alpha}(\Gamma)$ اذا كان $f_0(w)\in MH^{\alpha}(\Gamma)$.

تعريف 4 [1] (صفحة8)أسرة المنحنيات – K

يقال أن المنحني Γ ينتمي إلى أسرة المنحنيات –K إذا كان من اجل أية نقطتين z_1,z_2 من نقاطه يوجد ثابت موجب $k=k(\Gamma)$ بحيث يتحقق:

$$|z_1-z_2|\ge k\,\ell(z_1,z_2)$$

حيث أن $\ell(z_1,z_2)$ هو طول اقصر قوس يصل بين النقطتين z_1,z_2 أما $|z_1-z_2|$ فهو طول الوتر الذي يصل بين z_1,z_2 .

تعريف5[1](صفحة 7) يرمز لمنحني السوية للمنحني Γ بالرمز $\Gamma_{1+\sigma}$ وهو يعرف بالشكل التالي

$$\Gamma_{1+\sigma}=\{z;|\varphi(z)|=1+\sigma\ge 1\}$$

ومن الواضح أنه اذا كانت $\sigma=0$ فأن $\Gamma_{1+\sigma}=\Gamma$.

نلاحظ من هذا التعريف أنه إذا كانت دائرة الوحدة هي صورة المنحني Γ وفق التابع $w=\varphi(z)$ فأن منحني السوية $\Gamma_{1+\sigma}$ هو المنحني الذي صورته وفق التابع $w=\varphi(z)$ هي الدائرة $|w|=1+\sigma$.

سوف نرمز للبعد بين المنحني Γ ومنحني السوية $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ بالرمز $\rho_{1+\frac{1}{n}}$.

ينتج من تعريف منحني السوية لدينا النتيجة الاتية:

نتيجة1 : من الواضح أنه إذا كان المنحني Γ هو دائرة الوحدة فأن منحني السوية $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ هو الدائرة $|z|=1+\dfrac{1}{n}$ وعندها سيكون $\rho_{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}$.

النتائج والمناقشة

تبين النتائج الآتية العلاقة بين الصفين H^{α} وH_0^{α} حيث أن $(0<\alpha\le 1)$

مبرهنة 1 : إذا كان $f(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)$ وكان التابع $\psi(w)\in H^{1}(\gamma)$ فأن :

$$f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$$

الإثبات : بما أن $f(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)$ فأنه يحقق :

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le c_1|z_1-z_2|^{\alpha} \qquad \forall\ z_1,z_2\in\Gamma$$

ومن كون $\psi(w)\in H^{1}(\gamma)$ يتحقق :

$$|\psi(w_1)-\psi(w_2)|\le c_2|w_1-w_2| \qquad \forall\ w_1,w_2\in\gamma$$

وبالتالي يكون :

$$|f_0(w_1)-f_0(w_2)|=|f(\psi(w_1))-f(\psi(w_2))|\le c_1|\psi(w_1)-\psi(w_2)|^{\alpha}\le$$
$$\le c_1c_2|w_1-w_2|^{\alpha}=c|w_1-w_2|^{\alpha} \qquad ,$$

الأمر الذي يعني أن $f_0(w)\in H^{\alpha}(\gamma)$ ومنه يكون $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$.

مبرهنة 2 : إذا كان $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$ وكان التابع $\varphi(z)\in H^{1}(\Gamma)$ فأن :

$$f(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)$$

الإثبات : بما أن $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$ يكون $f_0(w)\in H^{\alpha}(\gamma)$ **أي أن**

$$|f_0(w_1)-f_0(w_2)|\le c_3|w_1-w_2|^{\alpha} \qquad \forall\ w_1,w_2\in\gamma$$

ومن كون $\varphi(z)\in H^{1}(\Gamma)$ يتحقق :

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|\le c_4|z_1-z_2| \qquad \forall\ z_1,z_2\in\Gamma$$

منه يكون :

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|f(\psi(w_1))-f(\psi(w_2))|=|f_0(w_1)-f_0(w_2)|\le c_3|w_1-w_2|^{\alpha}=$$
$$=c_3|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)|^{\alpha}\le c_3c_4|z_1-z_2|^{\alpha}=c|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

الأمر الذي يعني أن: $f(z)\in H^{\alpha}(\Gamma)$

مبرهنة 3: من اجل أي عددين α,β بحيث $0<\alpha<\beta\le 1$ يكون :

. $H_0^{\beta}(\Gamma)\subset H_0^{\alpha}(\Gamma)$

الإثبات : ليكن $f(z)\in H_0^{\beta}(\Gamma)$ عندها يكون $f_0(w)\in H^{\beta}(\gamma)$ أي أن :

$$|f_0(w_1)-f_0(w_2)|\le c|w_1-w_2|^{\beta} \qquad \forall\, w_1,w_2\in\gamma$$

ومن كون: $0<\alpha<\beta\le 1$ نجد أن $|w_1-w_2|^{\beta}<|w_1-w_2|^{\alpha}$

منه ينتج أن :

$$|f_0(w_1)-f_0(w_2)|\le c\,|w_1-w_2|^{\alpha} \qquad \forall\, w_1,w_2\in\gamma$$

الأمر الذي يعني أن $f_0(w)\in H^{\alpha}(\gamma)$ ومنه يكون $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$.

مبرهنة 4 : $f(z)\in MH_0^1(\Gamma)$ إذا وفقط إذا كان $|f_0'(w)|\le M$

الإثبات :

لزوم الشرط : بما ان $f(z)\in MH_0^1(\Gamma)$ فأن $f_0(W)\in MH^1(\gamma)$ وبالتالي يكون :

$$|f_0(w_1)-f_0(w_2)|\le M|w_1-w_2| \qquad \forall\, w_1,w_2\in\gamma$$

وبالتالي من اجل اي عدد صغير بدرجة كافية بحيث تكون $w+h\in\gamma$ نجد أن :

$$|f_0(w+h)-f_0(w)|\le M|w+h-w|=Mh$$

منه يكون

$$|f_0'(w)|=\left|\lim_{h\to 0}\frac{f_0(w+h)-f_0(w)}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{Mh}{h}\right|=M$$

أي أن: $|f_0'(w)|\le M$

كفاية الشرط : لنفرض أن $|f_0'(w)|\le M$ عندئذ من اجل اثبات أن $f(z)\in MH_0^1(\Gamma)$ نثبت أن $f_0(w)\in MH^{\alpha}(\gamma)$ من اجل ذلك لدينا:

$$|f_0(w+h)-f_0(w)|=\left|\int_w^{w+h} f_0'(t)dt\right|\le\int_w^{w+h}|f_0'(t)|dt=Mh \qquad \forall w\in\gamma$$

الأمر الذي يعني أن : $f_0(w)\in MH^1(\gamma)$ ومنه يكون $f(z)\in MH_0^1(\Gamma)$.

مبرهنة مساعدة 1[5](صفحة 23): أن قيمة أفضل تقريب للتابع f على المنطقة $\overline{G}$ اي $E_n(f,\overline{G})$ تحقق العلاقة :

$$E_n(f,\overline{G})=E_n(f,\Gamma)\le\omega\left(f.\rho_{1+\frac{1}{n}}\right) \qquad (1)$$

حيث أن : $\Gamma=\partial G$.

نتيجة2: إذا كان $f(z)\in H^{\alpha}(\overline{G})$ عندها يكون : $\omega\left(f.\rho_{1+\frac{1}{n}}\right)\le .c\rho^{\alpha}_{1+\frac{1}{n}}$

منه ومن العلاقة (1) ينتج أن قيمة أفضل تقريب للتابع f تحقق لعلاقة

$$E_n(f,\overline{G})\le c\rho^{\alpha}_{1+\frac{1}{n}} \qquad (2)$$

نتيجة 3: في الحالة التي يكون المنحني Γ دائرة الوحدة عندها من النتيجة (1) تصبح العلاقة (2) بالشكل :

$$E_n\left(f,\overline{D}\right)\le c\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \qquad (3)$$

مبرهنة مساعدة 2 [6] : ليكن Γ منحنيا مغلقا يشكل محيطا للمنطقة G ينتمي إلى أسرة المنحنيات – K إذا كان التابع f تحليلي في المنطقة G ومستمر على $\overline{G}$ فإنه توجد ثابتان A و B بحيث يتحقق :

$$\left|f-s_n(z)\right|\le\left(A\ln^2 n+B\right)E_n\left(f,\overline{G}\right) \qquad (4)$$

حيث أن $s_n(z)$ هي المجاميع الجزئية لسلسلة فابير للتابع f و $E_n\left(f,\overline{G}\right)$ هي قيمة أفضل تقريب إلى كثيرات حدود للتابع f على $\overline{G}$

مبرهنة 6 : : ليكن Γ منحنيا مغلقا يشكل محيطا للمنطقة G ينتمي إلى أسرة المنحنيات – K

إذا كان التابع f ينتمي إلى صف التوابع H_0^{α} على المنحني Γ $\left(f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)\right)$ فإنه يوجد ثابتان A و B بحيث يتحقق:

$$\left|f_0(w)-R_n(w)\right|\le\left(A\ln^2 n+B\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \qquad (5)$$

حيث ان $R_n(z)$ هي دالة كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئية لسلسلة فابير للتابع f .

البرهان : بما ان $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$ فأن $f_0(w)=f(\psi(w))\in H^{\alpha}(\gamma)$ الأمر الذي يضمن وجود تكامل كوشي الشاذ $S_\gamma f_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ للتابع $f_0(w)$ على دائرة الوحدة γ وبالتالي فأن لتكامل نوع كوشي يوجد قيمتان حدوديتان من داخل ومن خارج دائرة الوحدة نرمز لهما ب $f_0^{+}(w)$ و $f_0^{-}(w)$ تحليليان داخل وخارج دائرة الوحدة ومستمران على $\overline{D}$ و $\overline{D^-}$ على الترتيب وبحيث من أجل اي $w\in\gamma$ يكون [4]:

$$f_0^{+}(w)=s_\Gamma f_0(w)+\frac{1}{2}f_0(w)$$

$$f_0^{-}(w)=s_\Gamma f_0(w)-\frac{1}{2}f_0(w)$$

منه يكون :

$$.\ f_0(w)=f_0^{+}(w)-f_0^{-}(w) \qquad (6)$$

من العلاقة (6) تحولت مسألة تقريب التابع $f_0(w)$ الى مسألة تقريب التابعين $f_0^{+}(w)$ و $f_0^{-}(w)$ في داخل وخارج دائرة الوحدة .

لدينا $f_0^{+}(w)$ تحليلي في المنطقة D (المنطقة داخل دائرة الوحدة) ومستمر على $\overline{D}$ (إغلاق المنطقة D) منه ومن المبرهنة المساعدة 2 يتحقق :

$$\left| f_0^{+}(w)-s_n(w)\right| \le \left(A\ln^2 n+B\right)E_n\left(f_0^{+},\overline{D}\right) \qquad (7)$$

أما بالنسبة للتابع $f_0^{-}(w)$ فهو تحليلي في المنطقة الواقعة خارج دائرة الوحدة ومستمر على إغلاق هذه المنطقة نقوم بتحويل هذه المنطقة باستخدام التحويل $w \to \tilde{w}=\dfrac{1}{w}$

عندئذ تتحول دائرة الوحدة γ في المستوي w الى دائرة وحدة اخرى $\tilde{\gamma}$ في المستوي $\tilde{w}$

وتتحول المنطقة الواقعة خارج الدائرة γ الى المنطقة الواقعة داخل الدائرة $\tilde{\gamma}$.

اما التابع $f_0^{-}(w)$ فإنه سيتحول الى تابع $\tilde{f}_0^{+}(\tilde{w})$ تحليلي في المنطقة الواقعة داخل الدائرة $\tilde{\gamma}$

ومستمر على اغلاق هذه المنطقة وبالتالي من المبرهنة المساعدة 2 يتحقق :

$$\left| \tilde{f}_0^{+}(\tilde{w})-\tilde{s}_n(\tilde{w})\right| \le \left(A_2\ln^2 n+B_2\right)E_n\left(\tilde{f}_0^{+},\overline{\tilde{D}}\right) \qquad (8)$$

حيث أن : $\tilde{s}_n(\tilde{w})=\tilde{s}_n\left(\dfrac{1}{w}\right)$ وأن المنطقة $\tilde{D}$ هي المنطقة الواقعة داخل الدائرة $\tilde{\gamma}$

ولدينا $\tilde{f}_0^{+}(\tilde{w})= f_0^{-}\left(\dfrac{1}{\tilde{w}}\right)= f_0^{-}(w)$ منه يصبح الطرف الايسر من العلاقة (8) بالشكل:

$$\left| \tilde{f}_0^{+}(\tilde{w})-\tilde{s}_n(\tilde{w})\right| = \left| f_0^{-}(w)-\tilde{s}_n\left(\frac{1}{w}\right)\right| \qquad (9)$$

من العلاقات (6) و(7) و(8) و(9) يكون :

$$\left| f_0(w)-R_n(w)\right| \le \left| f_0^{+}(w)-s_n(w)\right| + \left| f_0^{-}(w)-\tilde{s}_n\left(\frac{1}{w}\right)\right| \le$$

$$\le \left(A_1\ln^2 n+B_1\right)E_n\left(f_0^{+},\overline{D}\right)+ \left(A_2\ln^2 n+B_2\right)E_n\left(f_0^{-},\overline{\tilde{D}}\right) \qquad (10)$$

حيث أن : $R_n(w)=s_n(w)+\tilde{s}_n\left(\dfrac{1}{w}\right)$

من النتيجة 2 لدينا :

$$E_n\left(f_0^{+},\overline{D}\right)\le c\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

$$E_n\left(f_0^{-},\overline{\tilde{D}}\right)\le c\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \qquad (11)$$

من العلاقة (11) تصبح العلاقة (10) بالشكل :

$$\left| f_0(w)-R_n(w)\right| \le c\,\left[A\ln^2 n++B\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

نتيجة 3: إذا رمزنا $R_n^{*}(z)=R_n(\varphi(z))=R_n(w)$ في العلاقة (5) وبما أن $f_0(w)=f(\psi(w))=f(z)$ تصبح العلاقة (5) بالشكل :

$$\left| f(z)-R_n^{*}(z)\right| \le c\left(A\ln^2 n+B\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

هذه النتيجة تعطينا علاقة تقريب التابع $f(z)\in H_0^{\alpha}(\Gamma)$.

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا بعد تعريف صف تابعي جديد إلى دراسة واثبات بعض الخواص التي يحققها هذا الصف كما أننا قمنا بتقريب توابع هذا الصف إلى توابع كسرية على منحنيات مغلقة

أما بالنسبة للتوصيات : نوصي بإدخال صفوف تابعية أخرى ومن ثم دراسة خواص و تقريب هذه الصفوف وعلاقتها بصف التوابع الجديد الذي قمنا بدراسته في هذه المقالة .

المراجع:

1. Mamedkhanov ,J.I.Approximation in complex plane and singular operetors with Cauchy’s kernel .Dr.dis, USSR-BAKU,1982
2. Israfilov .D.M Approximation in Morry – Smirnov classes.Azerbijan journal of mathematics,V1,NO1,2011,pp.99-113
3. Ali Guven ; Daniyal Israfilov On approximation in weidhted Orlicz space .math slovaca J,62,NO1,2012,PP.77-86
4. Guven,A ; Israfilov,D.M.Multiplier theorems in weighted smirnov spaces.J.Korean math soc,45,NO6,2008,PP.1535-1548
5. Dzyadyk,V.K. Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials,Nauka,Moscw,1977(book)
6. Suetin,P,K. Series of Faber polynomials, Gordon and Breach science publishers,Amesterdam,1998(book)