مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

لاستمرار والاستمرار التام للمؤثرات التكاملية الخطية باستخدام مفهوم N-تابع في فضاء أورليتش

الدكتور احمد بكداش*

(تاريخ الإيداع 5 / 6 / 2012. قُبِل للنشر في 27 / 3 /2013)

□ ملخّص □

الهدف من هذا البحث مناقشة الشروط اللازمة والكافية لاستمرارية المؤثر التكاملي الخطـــي في فضاء أورليتش على مجموعة متراصة لدوال محققة لشروط قياس لوبيغ في الفضاء الاقليدي المنتهي البعد واستخدام شروط دالة القياس المستمرة اعتماد على تعريفي N –تابع والنظيم في إثبات صحة بعض المبرهنات في فضاءي هلبرت ,باناخ. ثم تم التطرق إلى مفهوم الـ N – تابع المتتم لـ N –تابع معطى وذلك بهدف مناقشة شروط الاستمرار التام لنواة المؤثر التكاملي الخطي المدروس. وتحقيق صفات التراص على مجموعة دوال في فضاء أورليتش واختيار أفضل تقريب لذلك المؤثر التكاملي الخطي.وأخيراً تم أجراء مقارنة بين الاستمرار التام والتقارب الضعيف للمتتاليات الدالية في فضاء جزئي من فضاء أورليتش.

الكلمات المفتاحية: المؤثرات الخطية – المؤثرات التكاملية– استمرار نواة المؤثر التكاملي– فضاء أورليتش, N – تابع.

* مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

Continuity and continuing full 0f the integrations linear operators the N-function, in the W.Orlicz space

Dr. Ahmed Bakdash*

(Received 5 / 6 / 2012. Accepted 27 / 3 /2013)

□ ABSTRACT □

The aim of this paper is to discuss the necessary and sufficient conditions for the continuity of operator linear integral in Orlicz space on a compact set of functions realized with the terms of a lebegue measure of the Euclidean space ending dimension and the use of the terms continuous measurement N-function definition continued N-function some theorems in Hilbert, Banach spaces. Then the research touched on the concept of the continued complementary N-function given, in order to discuss the terms of a continuing full for Integrative operator linear kernel which is studied, and to achieve qualities compact a functions set in W. Orlicz space and choose the best approximation for linear integrative operators. Finally a comparison is carried out between continuing full and weak convergence of the functional sequences in subspace of W. Orlicz space.

Key words: linear operators, integrally operators, continuing integrative operator kernel, W.Orlicz space, N-function.

*Assistant Professor, Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University , Lattakia, Syria.

مقدمة:

من المعروف أن دراسة استمرار التوابع والمؤثرات الخطية والمؤثرات التكاملية الخطية ,تعتبر من المواضيع الأساسية في التحليل الرياضي بشكل عام والتحليل التابعي بشكل خاص وهنا في هذا البحث تم اعتماد خواص الاستمرار المطلق والنظيم .[12],[3], [1]

في هذا البحث ,تمت مناقشة الشروط اللازمة والكافية لكي يكون المؤثر التكاملي الخطي المعطى بالصيغة التالية[17]:

$$Au(x) = \int_G k(x, y)u(y)dy$$

مستمراً ومستمر تماماً في فضاء اورليتش$(space\ W.Orlicz)$ وذلك باستخدام مفهوم $N-$تابع وتحقيقه لأحد الشرطين :أولهما الشرط$-\Delta_2$,وثانيهما الشرط$-\Delta'$وتم البرهان على تكافؤ هذين الشرطين ,وباستخدام مفهوم الاستمرار المطلق والنظيم ومتباينة غولدر الشهيرة [12] وكان للمساواة التالية دورمميز:

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)v(x)dx < \infty \quad ; v(x) \in L_g \quad , \quad u(x) \in L_f^*$$

ومن الجدير ذكره هنا ,أن المجموعات المكونة لصفوف أورليتش هي مجموعات محدبة والتي تشكل مجموعات خطية إذا وفقط إذا حققت الشرط $-\Delta_2$ و من خلال تحقق الصفة التي يتمتع بها النظيم المعرًف على فضاء اورليتش يمــكن تشــكيل مجموعات تابعية مستمرة ومستمرة تماماً , وهذا ما أثبتته النتائج التي تم إثباتها من النظريات الهامة المستخدمة في هذا البحث (3.2) وأخيراً تم إجراء مقارنة بين الاستمرار التام والتقارب الضعيف للمتتاليات الدالية في فضـــاء أورليتش[12].

أهمية البحث أهدافه

في هذا البحث تم تقديم مناقشة هامة لدراسة الشروط اللازمة والكافية لاستمرار والاستمرار التام للمؤثرات التكاملية الخطية على مجمـوعة التوابع المتباينة المعرفة على المجموعات ذات القياس الصفري والتوابـع المستمرة المحققـة لمتباينات ينسينا$(Yensen)$[4] ويونغ$(Youg)$ [8]ثم تم إيجـاد الشـرط التـالي:إذا كـان التابـع $f(u)$ $N-$تابـع يحقق الشرط Δ_2 فإنً $\hat{L}_M = \hat{L}_M^*$.وأهمية البحث تكمن في دراسة أنواع مختلفة من الفضاءات بالإضافة لمواضيع عديدة في التحليل التابعي [17].

طرائق البحث ومواده

استخدمنا طريقة الاستنتاج المباشر بالإضافة إلى الاعتماد على بعض المتباينات الشهيرة في التحليل التابعي .

النتائج والمناقشة:

تعريف1.1:[1] يدعى التابع $f(x)$ بـ $N-$ تابع إذا استطعنا كتابته بالتمثيل التالي:

$$f(x) = \int_0^{|x|} p(t)dt \qquad (1,1)$$

حيث $p(t)$ تابع موجب عندما $t>0$ ومستمر من اليمين عندما $t\geq 0$. وهو غير متناقص عندما يحقق:

$$p(0)=0\ ,\ \ p(\infty)=\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty \qquad (1,2)$$

أمثلة على التوابع $N-$تابع هي التالية : $p_1(t)=f_1'(t)=t^{\alpha-1}$; $f_1(x)=\dfrac{|x|^{\alpha}}{\alpha}\ ;\alpha>1$

$$f_2(x)=e^{t^2}-1 \qquad ; \qquad p_2(t)=f_2'(t)=2te^{t^2}$$

ومن خصائصه أنه تابع محدب أي: $f(\alpha_1x+\alpha_2x)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)\,;\alpha_1+\alpha_2=1$ لأجل ذلك يكفي أن نضع: $\alpha_1=\alpha_2=1/2$ وذلك لأنه إذا كان $0\leq x_1<x_2$ ومن تزايد التابع $p(t)$ نجد:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\int_0^{\left|\frac{x_1+x_2}{2}\right|}p(t)dt\leq\int_0^{x_1}p(t)dt+\frac{1}{2}\left[\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}}p(t)dt+\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2}p(t)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{x_1}p(t)dt+\int_0^{x_2}p(t)dt\right]=\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

وهناك تعريف أخر مكافئ لـ $N-$ تابع :يدعى التابع $f(x)$ المستمروالمحدب $N-$ تابع إذا كان زوجياً ويحقق الشرطين [12] :

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad , \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

تعريف 2.1:ليكن $p(t)$ تابع غير متناقص وموجب عندما $t>0$ ومستمر من اليمين عندما $t\geq 0$ ويحقق الشرطين:

$$1)\quad p(0)=0 \qquad , \qquad 2)\ p(\infty)=\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty$$

وبتعريف التابع $q(s)$ بالمساواة : $q(s)=\sup\limits_{p(t)\leq s}t\ \ ;\ s\geq 0$ يكون له صفات التابع $p(t)$ ويحقق :

$$q[p(t)]\geq t\ \ ,\ \ p[q(s)]\geq s$$

ومن أجل $\varepsilon>0$ يكون: $q[p(t)-\varepsilon]\leq t\,,\,p[q(s)-\varepsilon]\leq s$ كل منهما تابع عكسي أيمن للأخر ونقول إنّ التابع : $f(x)=\int_0^{|x|}p(t)dt$ N - تابع النموذج المتمم للتابع $g(y)=\int_0^{|y|}q(s)ds$ $N-$ تابع وبالعكس. أيضاً يمكن صياغة شرط مكافئ لشرط النموذج المتمم لـ $N-$ تابع كما يلي:

إن التابع $g(y)=\max\limits_{x\geq0}\left[x|y|-f(x)\right]$ $N-$ تابع يدعى النموذج المتمم لـ $f(x)$ $N-$تابع.

مثال:إنّ التابع $f(x)=\dfrac{|x|^{\alpha}}{\alpha}\ ;\alpha>1$ $N-$ تابع هو النموذج المتمم لـ $g(y)=\displaystyle\int_0^{|y|}q(s)ds=\frac{|y|^{\beta}}{\beta}$ $N-$ تابع.

حيث $q(s)=s^{\beta-1}\ ;s\geq 0$ (العددان $\alpha\ ,\ \beta$ أسين مترافقين) أي أن: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$.

تعريف3.1:يقال إن التابع $f(x)$ $N-$ تابع محقق للشرط Δ_2 من أجل قيم x الكبيرة إذا وجد ثابتين:

بحيث: $x_0 \geq 0\ ,\ k > 0$ $\qquad f(2x) \leq k\ f(x)\ ; x \geq x_0$

تعريف 4.1:يقال إن التابع $f(x)$ $N-$ تابع محقق للشرط Δ' إذا وجد ثابتين : $x_0\ ,\ c$ بحـــيث:

$$f(x\,y) \leq c\ f(x)\,f(y) ; x\ ,\ y \geq x_0\ ;\ x, y \in L_M \qquad ; c = const$$

نتيجة 5.1: إذا حقق التابع $f(x)$ $N-$تابع الشرط Δ' فإنه يحـقق الشـــرط Δ_2 .

البرهان: ليكن $k = c\ f(x_0 + 2)$ عندئذ من أجل $x \geq x_0 + 2$ يكون :

$$f(2x) \leq f[(x_0 + 2)x] \leq c\ f(x_0 + 2) f(x) = k\ f(x)$$

بذلك يتم المطلوب.

تعريف 5.1:[16] يقال إن التابع $f(x)$ $N-$ تابع محقق للشرط Δ_3 إذا كان مكافئاً للتابع : $|x|\ f(x)$ $N-$تابع.

إذا كانت G مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الإقليدي المنتهي البعد والمعرف عليه قياس لوبيغ [11] ,وباستخدام القياس المستمر (الذي يعني بأنه في كل مجموعة توجد مجموعة جزئية قياسها يساوي نصف قياس المجموعة) نأخذ التابـع $f(u)$ $N-$تابع وبوضع $L_M(G) = L_M$ صف التوابع الحقيقية $u(x)$ [8] المعرفة على G بحيث[14]:

$$\rho(u, f) = \int_G f[u(x)]dx < \infty$$

بذلك تكون مجموعة التوابع المتباينة تلك ,المعرفة على المجموعات ذات القياس الصفري لا تختلف فيما بينها, علماً أن تلك الصفوف تدعى صفوف أورليتش وبمناقشة استمرارية التابع $u(x)$ نجد: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ,ولنجزئ المجموعة G إلى n من المجموعات الجزئية $(G_i\ ;\ 1 \leq i \leq n)$ بحيث: [11] $\quad \mu(G_i) = \dfrac{\mu(G)}{n}\ \ ;\ i = 1,2,\ldots,n$

عندئذ:

$$\left| \frac{\int_G f[u(x)]dx}{\mu(G)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{f[u(x_i)]}{n} \right| < \varepsilon\ \ ;\ x_i \in G_i\ \ \&\ \ \left| f\left(\int_G \frac{u(x)}{\mu(G)} dx \right) - f\left(\sum_{i=1}^{n} u(x_i) \frac{1}{n} \right) \right| < \varepsilon$$

من ذلك يكون:

$$f\left(\frac{\int_G u(x)dx}{\mu(G)} \right) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} u(x_i) \frac{1}{n} \right) + \varepsilon \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f[u(x_i)]}{n} + \varepsilon < \frac{\int_G f[u(x)]}{\mu(G)} + 2\varepsilon$$

($\mu(G)$ قياس لوبيغ للمجموعة G [18]) وهذا يعني تحقق متباينة ينسينا $(Yensen.J.W)$ التكاملية ,ومنها يمكن الانتقال إلى التوابع المستمرة . ومن الجدير ذكره هنا ,أن المجموعات المكونة لصفوف أورليتش $(W.Orlicz)$ هي مجموعات محدبة [8]وتكوّن مجموعات خطية إذا وفقط إذا حققت الشرط Δ_2 .

2 – **الفضاء** L_M^* : قبل التعرف على هذا الفضاء نتطرق إلى :

نظيم أورليتش$(W.Orlicz\ norm)$:ليكن $f(u), g(v)$ $N-$تابعين كلاً منهما متمم للآخر , و L^*_M مجموعة التوابع $u(x)$ و L_M مجموعة التوابع $v(x)$ المحققتين للشرط: $\qquad \langle u, v \rangle = \int_G u(x).v(x)dx < \infty$

فتكون كل من L_M^* و L_M مجموعة خطية ووفقاً لمتباينة يونغ $(Young.W.H)$ لأجل كل زوج من التوابع:

نجد: $u(x), v(x) \in L_M$

$$\langle u, v\rangle = \int_G u(x).v(x)dx \le \rho\langle u, M\rangle + \rho\langle v, N\rangle \qquad (1,2)$$

بذلك يكون: $L_M^* \supset L_M$.

مبرهنة 1.2: ليكن $u(x) \in L_M^*$.عندئذ:

$$\sup_{\rho(v,N)\le 1} |\langle u, v\rangle| = \sup_{\rho(v,N)\le 1} \left| \int_G u(x).v(x)dx \right| < \infty$$

البرهان: نفرض أن ذلك غير محقق عندئذ ممكن أن نبين أنه من أجل $u_0(x) \in L_M^*$ ولأجل متتالية تابعية ما: $v_n(x) \in L_N \; ; \rho(v_n; N) \le 1$ بحيث:

$$\int_G u_0(x).v_n(x)dx > 2^n \quad ; n = 1,2,\ldots \qquad (2,2)$$

وبأخذ متتالية تابعية أخرى متزايدة $(g_n(x))_n$ تعرف بالصيغة: $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} v_k(x)\,; \; n = 1,2,\ldots$ وكون $g(v)$ $N-$تابع محدب فإنَّ: $\rho(g_n, N) \le \sum_{k=1}^{n} \rho(v_k; N) < 1$ بالتالي يكون:

$$\int_G u_0(x).g_n(x)dx > n \quad ; n = 1,2,\ldots \qquad (3,2)$$

وكون $(g_n(x))_n$ مطردة ومتقاربة تقريباً في كل مكان إلى التابع : $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} v_k(x)$ تكون المتتالية التابعية $(N[g_n(x)])$ متزايدة باطراد $[6]$ وبالتالي ينتج من كون: $\int_G N[g_n(x)]dx < 1$ عند جعل $n \to \infty$ يكون:

$$\int_G N[g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \int_G N[g_n(x)]dx \le 1 \quad \Rightarrow g(x) \in L_N$$

وهذا يعني أن $(u_0(x)g_n(x))_{n\ge 1}$ متتالية تابعية مطردة جمعية متقاربة في كل مكان من التابع $(u_0(x)g(x))$ فينتج من ذلك أن $[12]$:

$$\int_G u_0(x).g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_G u_0(x)g_n(x)dx = \infty$$

وهذا تتناقض مع كون $u_0(x) \in L_M^*$.وهذا ما نريد إثباته.

تعريف 2.1: الآن يعرَّف نظيم أورليتش لتابع: $u(x) \in L_M^*$ كما يلي:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N)\le 1} \left| \int_G u(x)v(x)dx \right|$$

هذا النظيم يحقق الشروط التالية:

1) $\|u\|_M = 0 \;\Leftrightarrow u(x) = 0$

2) $\|\alpha u\|_M = |\alpha| \|u\|_M$

3) $\|u_1 + u_2\|_M \le \|u_1\|_M + \|u_2\|_M$

عندئذ تكون المجموعة L_M^* المزودة بالنظيم $\|\cdot\|_M$ فضاء خطي منظم يدعى فضاء أورليتش $(W.Orlicz\, space)$ $[5]$ وهو فضاء تام وبالتالي هو فضاء باناخ حيث أن النظيم فيه يختلف عن النظيم العادي بمضروب ثابت في الفضاء L^α .

تعريف 2.2: إذا كانت $\xi \subset G$ و كان $v(x) \in L_N \,; \rho(v;N) \le 1$: فإنه بحسب متباينة ينسينا $(Yensen.J.W)$ التكاملية يتحقق:

$$N\left(\frac{1}{\mu(\xi)}\int_{\xi} v(x)dx\right) \le \frac{1}{\mu(\xi)}\int_{\xi} N[v(x)]dx \le \frac{1}{\mu(\xi)} \Rightarrow \int_{\xi} v(x)dx \le \mu(\xi)N^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\xi)}\right)$$

حيث $N^{-1}(v)$ التابع العكسي للتابع $N(v)$.

1. شروط استمرارية المؤثرات التكاملية الخطية: تكمن المسألة في دراسة الشروط التي تجعل المؤثر التكاملي الخطي

ذو الصيغة[19] :
$$Au(x) = \int_G k(x,y)u(y)dy \qquad (4.2)$$

مستمر تماماً والذي يمكن اعتباره كمؤثر معرف من $L^*_{M_1}$ في $L^*_{M_2}$, أي يجب أن يحقق الشرط :

$$\|Au\|_{M_1} \le \|A\|\|u\|_{M_1} \quad ; \quad \|A\| = const \qquad (*)$$

لأجل ذلك كان لا بدً من دراسة المؤثرات الخطية A المعرفة على فضاءا أورليتش من $L^*_{M_1}$ في L^*_{M2} والتي يرمز لها بالعلاقة : $\{B_1 \to B_2 ; A\}$ حيث كلاً من $B_1 \,, B_2$ صفي المؤثرات في فضائي أورليتش $L^*_{M_1}$ و L^*_{M2} [8] على الترتيب,

أيضاً يرمز لمجموعة المؤثرات المستمرة بالرمز: $\{B_1 \to B_2 ; c.\}$ وإذا كانت مستمرة تماماً فيرمز لها بالرمز :

$\{B_1 \to B_2 ; c.e.\}$ وللبحث في شروط استمرارية المؤثر A أياً كانت صفات نواة المؤثر التكاملي الخطي في فضاء أورليتش نأخذ المؤثر :
$$\int_G\int_G \psi[\alpha\, k\langle x,y\rangle]dxdy \quad ; \quad \alpha = const$$

ولنضع $\hat{G} = G \times G$ الجداء التبولوجي[10] المزود بقياس طبيعي .ولنرمز بـ $\hat{E}_M \,, \hat{L}^*_M \,, \hat{L}_M$ لصفوف الفضاءات $L_M(G), L^*_M\left(\hat{G}\right), E_M\left(\hat{G}\right)$ على الترتيب.

مبرهنة 2.2 : بفرض $f(u)$ $-N-$ تابع لأجل كل $u(x) \in L^*_{f_1} \;,\; v(x) \in L^*_{f_2}$ المعرف بالعلاقة:

وبحيث: $f\langle x,y\rangle = u(x)v(x) \in L^*_f$
$$\|w\langle x,y\rangle\|_f \le l\|u\|_{f_1}.\|v\|_{g_2} \quad ; l = const$$

وإذا كانت $k(x,y) \in \hat{L}^*_g$ نواة المؤثر التكاملي:

$$Au(x) = \int_G k(x,y)u(y)dy \qquad (5.2)$$

وأن: $g(v)$ $N-$ تابع متمم لـ $f(u)$ $N-$ تابع .عندئذ المؤثر المعطى بالعلاقة (*) ينتمي إلى $\{L^*_{f_1} \to L^*_{f_2} ; c.\}$.

البرهان: باستخدام متباينة غولدر [12] والنظيم السابق لكل من $u(x) \in L^*_{f_1} \;,\; v(x) \in L^*_{f_2}$ يكون:

$$\int_G Au(x)v(x)dx = \int_G\int_G k(x,y)u(y)v(x)dxdy \le \|k(x,y)\|_{\hat{g}}\|w(x,y)\|_f \le$$
$$\le l\|k(x,y)\|_{\hat{g}}\|v\|_{g_2}\|u\|_{f_1}$$

وهذا يعني, أن المؤثر يكون بالشكل: $A: L^*_{f_1} \to L^*_{f_2}$. إذاً : $\|v\|_{f_2} \le 2$ لكل $\rho(v; f_2) \le 1$ عندئذ ينتج من المتباينات السابقة أن المؤثر: $\|Au\|_{f_2} = \sup_{\rho(v;f_2)\le 1} \left| \int_G Au(x) v(x) dx \right| \le 2l \|k(x,y)\|_{\hat{g}} \|u\|_f$ محدود , بالتالي مستمر. كما أن هذه المتباينة تعطينا معيار لنظيم المؤثر A وهو: $\|A\| = \sup_{\|u\|_{f_1} \le 1} \|Au\|_{f_2} \le 2l \|k(x,y)\|_{\hat{g}}$

وهذا المعيار للنظيم يعتبر المعيار الأفضل والأقوى من بين كثير من النظم المختلفة.

نتيجة 1.2: ليكن $f(u)$ $N-$التابع المتمم لـ $\psi(v) = f_2[f_1(v)]$ $N-$ تابع ,عندئذ الشرطان الآتيان :

$$f\langle x,y\rangle = u(y)v(x) \in L^*_f \qquad (6.2)$$

$$\|w\langle x,y\rangle\|_f \le l \|u\|_{f_1} \|v\|_{f_2} \qquad (7.2)$$

يكونا محققين.

البرهان: ليكن $u(x) \in L^*_{f_1}$, $v(x) \in L^*_{f_2}$ ولنبرهن على تحقق الشرط (6.2) ,هذا يعني انه: هل التابع $w(x,y) = u(y)v(x)$ ينتمي الى الفضاء $\hat{L}^*_f$ ؟ ليكن $g(x,y) \in \hat{L}_g$ عندئذ:

$$\left| \iint_{\hat{G}} w\langle x,y\rangle g\langle x,y\rangle dxdy \right| \le \|u\|_{f_1} \|v\|_{f_2} \iint_{\hat{G}} |g\langle x,y\rangle| \frac{|u(y)|}{\|u\|_{f_1}} \cdot \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dxdy$$

ومن متباينة يونغ $(Young.W.H)$ [8] نجد:

$$\left| \iint_{\hat{G}} w\langle x,y\rangle g\langle x,y\rangle dxdy \right| \le \|u\|_{f_1} \|v\|_{f_2} \left\{ \iint_{\hat{G}} f_1[g\langle x,y\rangle] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dxdy + \iint_{\hat{G}} f_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{f_1}}\right] \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dxdy \right\}$$

وبتكرار استخدام متباينة يونغ $(Young.W.H)$ على الحد الأول من المتباينة السابقة ,ينتج:

$$\left| \iint_{\hat{G}} w(x,y) g(x,y) dxdy \right| \le \|u\|_{f_1} \|v\|_{f_2} \left\{ \iint_{\hat{G}} f_2[f_1[g(x,y)]] dxdy + \right.$$

$$\left. + \iint_{\hat{G}} f_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{f_2}}\right] dxdy + \int_G f_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{f_1}}\right] dy \int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dx \right\} \qquad (8.2)$$

وبما أن: $\int_G f_1\left[\frac{u(y)}{\|u\|_{f_1}}\right] \le 1$, $\int_G f_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{f_2}}\right] dx \le 1$ والتابع $v(x)$ جمعي فانه من (7.2) ينتج أن :

$$\left| \iint_{\hat{G}} w\langle x,y\rangle g\langle x,y\rangle dxdy \right| \le \|u\|_f \|v\|_g \left\{ \iint_G \psi[g\langle x,y\rangle] dxdy + \mu(G) + \int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dx \right\} \qquad (9.2)$$

وهذا ما يثبت صحة العلاقة (6.2) أيضاً من متباينة يونغ $(Young.W.H)$ [8] نجد:

$$\int_G \frac{|v(x)|}{\|v\|_{f_2}} dx \le \int_G f_2\left[\frac{v(x)}{\|v\|_{f_2}} dx\right] + f_2(1)\mu(G) \le 1 + f(1)\mu(G)$$

لذلك إذا كانت $\rho(g\langle x,y\rangle, \psi) \le 1$ فانه من العلاقة (8.2) نحصل على المطلوب:

$$\left\|w\langle x,y\rangle\right\|_{\hat{\phi}} = \sup_{\rho(g,\psi)\le 1}\left|\iint_{\hat{G}} w\langle x,y\rangle g\langle x,y\rangle dxdy\right| \le l\|u\|_{f_1}\|v\|_{f_2} \quad ; l = 2+\mu(G)+f_2(1)\mu(G)$$

خاصة الـ $N-$تابع المحقق للشرط Δ': هذه الخاصة تتلخص في أنه إذا كان : $f(u)$ $N-$تابع وكان $u(x),\ v(x)\in L_M^*$ فإنً $u(x).v(x)\in L_M^*$ و $;\alpha>1$ $f(u)=k|u|^{\alpha}$.

نتيجة2.2: $[7]$ من المبرهنة 2.2 ينتج أنه إذا كان $u(x),\ v(x)\in L_M^*$فإن التابع $w\langle x,y\rangle = u(x).v(x)\in L_M^*$ ويكون $f(u)$ $N-$تابعاً محققاً للشرط Δ_2 .

البرهان: بفرض أن التابع $f(u)$ $N-$تابع لا يحقق الشرط Δ_2 عندئذ يمكن إيجاد متتالية عددية $(u_n)_{n\ge1}$ مطردة ومتزايدة وغير محدودة ,بحيث :

$$f(2u_n) > 2^{2n} f(2^n) f(u_n) \quad ; n=1,2,... \tag{10.2}$$

لنشكل أسرة مجموعات غير متقاطعة وتحقق $G_n\subset G$بحيث:

$$\mu(G_n) = \frac{f(2)\mu(G)}{2^n\mu(2^n)} \quad ; n=1,2,...$$

ولنضع أيضاً المجموعات $\xi_n\subset G$ غير متقاطعة بحيث يكون:

$$\mu(\xi_n) = \frac{f(u_1)\mu(G)}{2^n f(u_n)} \quad ; n=1,2,...$$

ولنأخذ :

$$u(x)=\begin{cases} u_n\ ; x\in\xi_n\ ; n=1,2,.. \\ 0\quad ;\ x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}\xi_n\end{cases} \quad \& \quad v(x)=\begin{cases} 2^n\ ; x\in G_n\ ; n=1,2,... \\ 0\quad ;\quad x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\end{cases}$$

عندئذ:

$$\int_G f[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} f[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(2^n)\mu(G_n) = f(2)\mu(G) < \infty$$

$$\int_G f[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\xi_n} f[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)\mu(\xi_n) = f(u_1)\mu(G) < \infty$$

ومن جهة أخرى عندما تكون kكبيرة بالقدر الكافي نجد:

$$\iint_G f\left(\frac{u(y)v(x)}{k}\right)dxdyf = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_I}\int_{\xi_J} f\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right]dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f\left(\frac{2^i u_j}{k}\right)\mu(G_i)\mu(\xi_j) \ge$$

$$\ge \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{2^n u_n}{k}\right)\mu(G_n)\mu(\xi_n) \ge \sum_{n=m}^{\infty} f(2u_n)\frac{f(2)f(u_1)[\mu(G)]^2}{2^n f(2^n)f(u_n)} \quad ;\ 2^{m-1}>k$$

من ذلك والعلاقة (10.2) نحصل على:

$$\iint_{\hat{G}} f\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right]dxdy = \infty$$

وهذا يعني أنه إذا كان : $u(x),\ v(x)\in L_M^*$ فإنً : $u(x).v(x)\in L_M^*$ بذلك يتم المطلوب.

مبرهنة 3.2: الشرط اللازم والكافي لكي يكون التابع $f(u)$ $N-$تابعاً محققاً للشرط Δ'هو أنه لا جل أي تابعـين

$u(x),\ v(x)\in L_M^*$يكون الجداء $w\langle x,y\rangle = u(y)v(x)$منتمياً إلى الفضاء $\hat{L}_M^*$.

البرهان: ليكن $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ' هذا يعني وجود ثابتين موجبين u_0, cيحققان :

$$f(u.v) \le cf(u).f(v) \quad ; u,v\ge u_0$$

عندئذ التابع $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ_2 لذلك يكون: $L_M^* = L_M$.

ليكن $u(x), v(x) \in L_M$ و لنرمز بـ G_v, G_u للمجموعتين $G\{|u(x)| \ge u_0\},\ G\{|v(x)| \ge u_0\}$ على الترتيب .

حيث $u_0 = const$ فيكون $x \in G_v\ , y \in G_u$ فيتحقق:

$$f[u(y)v(x)] \le c\, f[u(y)]\, f[v(x)]$$

من هذه المتباينة نحصل على المساواة التالية:

$$\iint_{\hat{G}} f[u(y)v(x)]dxdy = \int_{G_u}\int_{G_v} f[u(y)v(x)]dxdy + \int_{G\setminus G_u}\int_{G_v} f[u(y)v(x)]dxdy +$$
$$+\int_{G_u}\int_{G\setminus G_v} f[u(y)v(x)]dxdy \;+ \int_{G\setminus G_u}\int_{G\setminus G_v} f[u(y)v(x)]dxdy$$

من ذلك ينتج أن:

$$\iint_{\hat{G}} f[u(y)v(x)]dxdy \le c\int_G f[u(y)]dy\int_G f[v(x)]dx + \mu(G)\int_G f[u_0 v(x)]dx +$$
$$+\mu(G)\int_G f[u_0 u(y)]dy + + f(u_0^2)[\mu(G)]^2$$

وهذا يعني أنه إذا كان : $u_0 v(x), u_0 u(x) \in L_M$ فإن : $u(x)v(x) \in \hat{L}_M = \hat{L}_M^*$.

كفاية الشرط: إذا كان: $w(x,y) = u(x)v(x) \in \hat{L}_M^*$ فإن: $u(x),\ v(x) \in L_M^*$ ؟

إذا كان التابع $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ_2 فهذا يعني أن $\hat{L}_M = \hat{L}_M^*$ وإذا فرضنا أن $f(u)$ $N-$تابع لا يحقق الشرط Δ' عندئذ يمكن إيجاد متتاليتين عدديتين $(u_n)_{n\ge1}$, $(v_n)_{n\ge1}$ موجبتين و متزايدتين ومطردتين وغير محـدودتين بحيث: $f(u_n v_n) > 2^{2n} f(u_n) f(v_n)\ ; n = 1,2,...$

ولنأخذ المجموعات $G_n \subset G\ ,\ \xi_n \subset G$ التي تحقق: $G_i \cap G_j = \phi, \xi_i \cap \xi_j = \phi\ \ ; i \ne j$ [11]بحيث يكون:

$$\mu(G_n) = \frac{f(u_1)\mu(G)}{2^n f(u_n)}\ , \mu(\xi_n) = \frac{f(v_1)\mu(G)}{2^n f(v_n)}\ ; n = 1,2,...$$

ولنضع:

$$u(x) = \begin{cases} u_n & ; x \in G_n\ ; n = 1,2,.. \\ 0 & ;\ x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \end{cases} \qquad \& \qquad v(x) = \begin{cases} v_n & ; x \in \xi_n\ ; n = 1,2,... \\ 0 & ;\ x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi_n \end{cases}$$

عندئذ:

$$\int_G f[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n} f[u(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)\mu(G_n) = f(u_1)\mu(G) < \infty$$

$$\int_G f[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\xi_n} f[v(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(v_n)\mu(\xi_n) = f(v_1)\mu(G) < \infty$$

ومن جهة أخرى يكون:

$$\iint_{\hat{G}} f[u(y)v(x)]dxdy=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{G_i}\int_{\xi_j} f[u(y)v(x)]dxdy=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(u_i v_j)\mu(G_i)\mu(\xi_j)\geq$$

$$\geq\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n v_n)\frac{f(u_1)f(v_1)[\mu(G)]^2}{2^n f(u_n)f(v_n)}$$

لكن وجدنا سابقاً أن: $\iint_{\hat{G}} f\left[\frac{u(y)v(x)}{k}\right]dxdy=\infty$ وهذا يعني: $w(x,y)=u(y)v(x)\notin \hat{L}_M=\hat{L}^*_M$

وهذا يتناقض مع الفرض,إذاً التابع $f(u)$ $N-$تابع محققاً للشرط Δ' .

نتيجة3.2:$[16]$ إذا كان التابع $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ', فإنه يمكن إيجاد ثابت $a>0$ بحيث: $\|u(y)v(x)\|_f\leq a\|u\|_f\|v\|_f$ لأجل كل $u(x)\ ,v(x)\in L_f$

البرهان :وجدنا سابقاً أن: $f(uv)\leq c\,f(u)f(v);u,v\geq u_0>1$ عندئذ يكون:

$$\iint_{\hat{G}} f\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0\|u\|_f.u_0\|v\|_f}\right]dxdy\leq c\int_G f\left[\frac{u(y)}{\|u\|_f}\right]dy\int_G f\left[\frac{v(x)}{\|v\|_f}\right]dx+\mu(G)\left\{\int_G f\left[\frac{u(y)}{\|u\|_f}\right]dy+\right.$$

$$\left.+\int_G\left[\frac{v(x)}{\|v\|_f}\right]dx\right\}+f(u_0^2)[\mu(G)]^2$$

وإذا كان: $\rho\left(\frac{u}{\|u\|_f};f\right)\leq 1,\ \rho\left(\frac{v}{\|v\|_f};f\right)\leq 1$ فإنـه: $\iint_{\hat{G}} f\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2\|u\|_f\|v\|_f}\right]dxdy\leq c+2\mu(G)+f(u_0^2)[\mu(G)]^2$

أخيراً,يكون:

$$\left\|\frac{u(y)v(x)}{u_0^2.\|u\|_f\|v\|_f}\right\|_f\leq 1+\iint_{\hat{G}} f\left[\frac{u(y)v(x)}{u_0^2.\|u\|_f\|v\|_f}\right]dxdy\leq 1+c+2\mu(G)+f(u_0^2)[\mu(G)]^2\Rightarrow$$

$$\|u(y)v(x)\|_f\leq a\|u\|_f\|v\|_f\ \ ;a=u_0^2\left\{1+c+2\mu(G)+f(u_0^2)[\mu(G)]^2\right\}$$

وهذا ما نريد إثباته.

وبشكل عام, إذا كان كل من التابعين $F(u),Q(u)$ $N-$تابع فالعلاقة $Q(u)<F(u)$ تعني بأنه يوجد ثابتان $k,u_0>0$ بحيث: $Q(u)\leq F(ku);u\geq u_0$ وهي تكون دوماً محققة عندما $L^*_F\subset L^*_Q$, أيضاً من ذلك ينتج أنه يوجد ثابت $q>0$ يحقق العلاقة الآتية: $\|u\|_Q\leq q\|u\|_F\ ;\ u(x)\in L^*_F$.

مبرهنة 4.2 : ليكن $f(u)$ $N-$تابع يحقق الشرط Δ' ويحقق:

$$f(u)<g_1(u)\ ,\ f(u)<g_2(u) \qquad (11.2)$$

وذلك لأجل كل $g_1(u),\ g_2(u)$ $N-$تابع, فإنّ الشرطين التاليين محققان: 1) $f\langle x,y\rangle=u(y)v(x)\in L^*_f$

2) $\|w\langle x,y\rangle\|_f\leq l\|u\|_{g_1}\|v\|_2\ \ ;v(x)\in L^*_{g_2}$.

البرهان: بما أن: $u(x)\in L^*_{g_1}\ ,\ v(x)\in L^*_{g_2}$ فإنه يكون: $u(x)\in L_f\ ,\ v(x)\in L_f$ بالتالي يكون لدينا:

$$w(x,y)=u(y)v(x)\in \hat{L}_f \quad \& \ \|u(y)v(x)\|_f \le a\|u\|_f\|v\|_f$$

ومن(11.2)ينتج أنه يوجد ثابتان $q_1,q_2>0$ بحيث: $\|u\|_f \le q_1\|u\|_{g_1};u(x)\in L^*_{g_1}, \|v\|_f \le q_2\|v\|_{g_2};v(x)\in L^*_{g_2}$

وأخيراً نجد المطلوب: $\|u(y)v(x)\|_f \le l\|u\|_{g_1}\|v\|_{g_2} \ ;l=a.q_1.q_2$

2.الشروط الكافية لاستمرار $N-$تابع: ليكن التابعين $g(v),f(u)$ $N-$تابع كلاً منهما التابع المتمم للآخر ولتكن $k(x,y)$نواة المؤثر التكاملي الخطي:

$$Au(x)=\int_G k(x,y)u(y)dy\in \hat{L}^*_g \qquad (12.2)$$

عندئذ تكون العلاقة $Au(x)\in\{L^*_{g_1}\to L^*_{g_2};c.\}$صحيحة إذا تحقق أحد الشروط الآتية:

1) $g_2[g_1(v)]<g(v)$

2) $g_1[g_2(v)]<g(v)$

3) $g_1(v)<g(v)$, $g_2(v)<g(v)$ & التابع $f(u)$ يحقق الشرط Δ' .

3.تمديد المؤثر المستمر:ليكن Aمؤثراً خطياً موجباً مرافقاً لذاته معرفاً على الفضاء الجزئي Gمن فضاء التوابع L^2 الجمعية والتربيعية $[14]$ ويأخذ قيمه فيه والذي يعطى بالعلاقة: $A=\int_0^{+\infty}\lambda dE_\lambda$ حيث E_λ طيف المؤثر الموجب A و المؤثر A^2 يعطى بالعلاقة: $A^2=\int_0^{+\infty}\lambda^2 dE_\lambda$ عندئذ إذا كان المؤثر A مستمراً تماماً فيمكن التعبير عنه بسلسلة لانهائية لها الشكل$[6]$:

$$A\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle e_i,\varphi\rangle e_i(x) \ ;\varphi(x)\in L^2 \ \& \ \langle e,\varphi\rangle=\int_G e(x)\varphi(x)dx$$

حيث $e_i(x)$ التوابع الخاصة للمؤثر A الموافقة لقيمه الخاصة λ_i المختلفة عن الصفر.والآن إذا كان B مؤثراً ما معرفاً على فضاء باناخ E_1ويأخذ قيمه في فضاء باناخ أخر E_2 فإنّ ممدده $\bar{B}$يكون:

$$\bar{B}\in\{E\to E_2;c.\}\ \&\ \bar{B}\varphi=B\varphi \ ;\varphi\in D(\varphi) \ .$$

مبرهنة 5.2:ليكن التابعان $g(u),f(u)$ $-N-$تابع كل منهما تابعاً متمماً للآخر ,و كان ممدد المؤثر $A^2\in\{L^2\to L^2;c.\}$ المستمر هو $\bar{A}^2\in\{E_g\to L^*_f;c.\}$. عندئذ: $A\in\{L^2\to L^*_f;c.\}$.

البرهان: ليكن $\varphi(x)\in L^2$,فإنه باستخدام متباينة غولدر نجد:

$$\|A\varphi\|^2_{L^2}=\langle A^2\varphi,\varphi\rangle=\left\langle \bar{A}^2\varphi,\varphi\right\rangle\le\left\|\bar{A}^2\varphi\right\|_f\|\varphi\|_g\le\left\|\bar{A}^2\right\|\|\varphi\|^2_g \ \Rightarrow\|A\varphi\|_{L^2}\le k\|\varphi\|_g\,;\varphi(x)\in L^2$$

وبما أن الفضاء L^2 كثيف في فضاء باناخ E_g $[5]$(فضاء كل التوابع المحدودة) فيكون للمؤثر A ممدداً مستمراً على كل الفضاء E_g ولنرمز له بـA_1 ويحقق : $l(\varphi)=\langle A_1\varphi,\psi\rangle \ ;\varphi(x)\in L^2$ والذي يعرف دالي خطي مستمر على E_g . عندئذ يمكن إيجاد تابع ما $u(x)\in L^*_f$ يحقق: $l(\varphi)=\langle\varphi,u\rangle=\int_G\varphi(x)u(x)dx$

ولنعرف المؤثر A_1^* بالمساواة : $A_1^*\psi(x)=u(x)$ عندئذ يتحقق:

$$\|A_1^*\psi\|_M=\sup_{\substack{\rho(\varphi;N)\le1\\ \varphi(x)\in E_N}}\left|\left(A_1^*\psi,\varphi\right)\right|\le\sup_{\substack{\|\varphi\|\le2\\ \varphi(x)\in E_N}}\left|\langle\psi,A_1\varphi\rangle\right|\le 2k\|\psi\|_{L^2}$$

وهذا يعني بأن المؤثر $A_1^* \in \{L^2 \to L_f^*; c.\}$,ولنثبت أن : $A_1^*\psi(x) = A\psi(x)\ ;\psi(x) \in L^2$

وهذا ينتج من أنه أياً كان $\varphi(x) \in L^2$ فإن: $\left\langle A_1^*\psi, \varphi \right\rangle = \langle \psi, A_1\varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$

مبرهنة 6.2 : ليكن A مؤثراً خطياً موجباً مترافقاً ذاتياً مستمراً في L^2 , وبفرض أن ممدده $\bar{A}$ مستمر عندئذ إذا كان: $\bar{A} \in \{E_g \to L_f^*; c.\}\ ; g(u) < u^2 < f(u)$.فإنه يمكن كتابة المؤثر $\bar{A}$ بالشكل: $\bar{A} = h.h^* \quad (10,2)$

حيث $h \in \{L^2 \to L_f^*; c.\}$ و h^* المؤثر القرين للمؤثر h حيث $h^* \in \{E_g \to L_f^*; c.\}$.

البرهان: لنضع $h = A^{\frac{1}{2}}$ عندئذ حسب النظرية 5.2 يكون: $h \in \{L^2 \to L_f^*; c.\}$ فنلاحظ أن المؤثر $h.h^*$ يأخذ

القيم ذاتها التي يأخذها المؤثر A لذلك فإنه لأجل أي زوج من التوابع $\varphi(x), \psi(x) \in L^2$ يكون:

$$\left\langle h.h^*\varphi, \psi \right\rangle = \left\langle h^*\varphi, h^*\psi \right\rangle = \left\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\psi \right\rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle$$

إذاً المؤثر $h.h^*$ يعتبر المدد المستمر للمؤثر A في مؤثر من $\{E_g \to L_f^*; c.\}$ علماً أن المؤثر h^* يعرَف بالمساواة :

$$\left\langle h^*\varphi, \psi \right\rangle = \langle \varphi, h\psi \rangle \quad ;\psi(x) \in L^2 \ \ ,\varphi(x) \in E_g$$

بالتالي تثبت العلاقة $(10,2)$ بان الممدد المستمر للمؤثر A وحيد, أخيراً الفضاء L^2 كثيف في E_g بحسب النظيم في الفضاء E_g .

ملاحظة: تدعى المساواة $\bar{A} = h.h^*$ توسيع للمؤثر A .

4.شروط الاستمرار التام للمؤثرات التكاملية الخطية: ناقشنا ما يلي:

1) **حالة استمرارية النواة:** لنأخذ المؤثر التكاملي الخطي :

$$Au(x) = \int_G k\langle x, y\rangle u(y)dy \qquad (13.2)$$

المعرَف على الفضاء $L_{g_1}^*$ بحيث ينقل كرة الواحدة منه إلى مجموعة متراصة في الفضاء $L_{g_2}^*$. وإذا كانت النواة $k(x,y)$ تابعاً مستمراً على المجموعة $\hat{G}$ المتراصة أيضاً , عندئذ $Au(x) \in \{L_{g_1}^* \to L_{g_2}^*\ ; c.e.\}$ وذلك لأن المؤثر $A \in \{L_{g_1}^* \to L_{g_2}^*\ ; c.\}$,علماً أن $L_{g_1}^*$ و $L_{g_2}^*$ فضاءا أورليتش ,بالتالي يكون:

$$\int_G |u(x)|dx \le \|u\|_{g_1} \|\chi(x;G)\|_g \le \mu(G) f^{-1}\left(\frac{1}{\mu(G)}\right) \ ;u(x) \in T \ ,(x \in G \Rightarrow u(x) \in T)$$

ينتج أن: $$|Au(x)| = \left|\int_G k(x,y)u(y)dy\right| \le K\mu(G) f^{-1}\left(\frac{1}{\mu(G)}\right) \ ;K = \max|k(x,y)| \ ,(x, y \in G)$$

هذا يعني ,أن التابع $|Au(x)|;u(x) \in T$ محدود تماماً .ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ,ولنأخذ $\delta > 0$ بحيث:

$$|k\langle x_1, y\rangle - k\langle x_2, y\rangle| < \frac{\varepsilon}{\mu(G) f^{-1}\left(\frac{1}{\mu(G)}\right)} \quad ;d(x_1, x_2) < \delta \ \ , x_1, x_2 \in G$$

عندئذ لأجل: $d(x_1,x_2)<\delta$ فإنه لأجل أي: $u(x)\in T$ فإنه يكون حسب صفات نظيم التابع المميز للمجموعة G في الفضاء L_g^* يكون:

$$|Au(x_1)-Au(x_2)|\le\int_G|k\langle x_1,y\rangle-k\langle x_2,y\rangle||u(y)|dy\le\frac{\varepsilon}{\mu(G)f^{-1}\left(\frac{1}{\mu(G)}\right)}\int_G|u(y)|dy\le\varepsilon$$

وبذلك يكون التابع $Au(x)$ $(u(x)\in T)$ مستمراً تماماً. وحسب نظرية آرتسيل ($Artsel$) $[14]$ المجموعة AT متراصة ضمن مجموعة التوابع المستمرة C في الفضاء G. أخيراً تكون شروط الاستمرار التام للمؤثر التكاملي (13.4) هي:

1. أن تكون المجموعات التابعية المعرَّف عليها المؤثر متراصة ويأخذ قيمه في فضاء أورليتش.
2. عدم إمكانية التقريب الدقيق للمؤثر (13.4) لكن يمكن استخدام أفضل التقريبات لدراسة المؤثرات التكاملية الخطية ذات النواة غير المستمرة ,إلاّ أننا نستطيع القول: الاستمرار التام للمؤثر يكون محققاً إذا كانت $k(x,y)\in\hat{L}_g^*$ إلاّ أنه يوجد شرط يكافئ ذلك الشرط , وهذا ما توضحه النظرية التالية:

مبرهنة 7.2 **(الشروط الكافية للاستمرار التام):**

ليكن كل من التابعين $g(u), f(u)$ $N-$ تابعاً متمماً للأخر, ولتكن $k(x,y)$ نواة المؤثر التكاملي الخطي $Au(x)\in\hat{E}_g$, عندئذ يكون المؤثر $Au(x)$ منتمياً إلى $\{L_{f_1}^*\to E_{f_2};c.e.\}$ إذا حقق أحد الشروط التالية:

1) $f_2[g_1(v)]<g(v)$

2) $g_1[f_2(v)]<g(v)$

3) $g_1(v)<g(v),\ \ f_2(v)<g(v)$ & التابع $f(u)$ يحقق الشرط Δ' .

البرهان: إذا كانت $k(x,y)\in\hat{E}_g$ فإنه يمكننا تشكيل المتتالية $(k_n(x,y))_{n\ge1}$ من النوى المستمرة , بحيث: $\|k(x,y)-k_n(x,y)\|_g<\frac{1}{n}$ ولنرمز بـ A_n للمؤثر التكاملي الخطي: $A_nu(x)=\int_G k_n\langle x,y\rangle u(y)dy$

فيكون هذا المؤثر معرفاً من $L_{f_1}^*$ إلى E_{f_2} ومستمراً تماماً ومحققاً للشروط السابقة فيكون:

$$\|A-A_n\|\le 2l\|k\langle x,y\rangle-k_n\langle x,y\rangle\|_g<\frac{2l}{n}\ \ ;n=1,2,...$$

وبتقريب كاف ,يكون هذا المؤثر مستمراً تماماً بالنظيم في الفضاء E_{f_2}. وهذا ما نريد إثباته.

نتيجة 2.3 : نستنتج مما سبق أنه يمكن استخدام هذه المبرهنة في الحالتين الآتيتين:

1) للإجابة عن ذلك كحالة أولى نحصل عليها من خلال طرح الأسئلة الآتية:ما هي صفات التابع $g(v)$ عندما يكون المؤثر من $L_{f_1}^*$ إلى E_{f_2} مستمراً تماماً ,أو إذا انتمت النواة $k(x,y)$ إلى $\hat{E}_g$,أو إذا تحقق الشرط $(*)$: $\iint_G g[\lambda k\langle x,y\rangle]dxdy<\infty$ لأجل جميع $\lambda>0$ كافية ؟ الإجابة هي: إذا حقق التابع $g(v)$ $N-$تابع الشرط Δ_2 فهو يكافئ الشرط : $\iint_{\hat{G}} g[k\langle x,y\rangle]dxdy<\infty$ لكن إذا لم يحقق التابع $g(v)$ $N-$تابع الشرط Δ_2 فيكون الشرط $(*)$ غير كاف,لكنه يكون محققاً إذا كان :

$\iint\limits_{\hat{G}} g\{Q[k\langle x,y\rangle]\}dxdy<\infty$ حيث $Q(u)$ $N-$تابع , ويعتبر الجزء الأساسي لـ $N-$تابع مكافئ لـ $g(v)$.

2) البحث عن التابعين $f_1(u)$, $f_2(u)$ $N-$ المعرفين من $L^*_{f_1}$ إلى E_{f_2} ومحققين لمبرهنة الشروط الكافية للاستمرار التام بحيث يكون المؤثر ذو النواة $k\langle x,y\rangle$ مستمراً تماماً .

الاستنتاجات والتوصيات :

1. دراسة الاستمرار والاستمرار التام للمؤثرات التكاملية الخطية في فضاء أورليتش بالاعتماد على تعريف التابع $f(x)$ $N-$ تابع.
2. تكوين صفوف أورليتش من مجموعة التوابع المتباينة والحصول على مجموعات محدبة وخطية وتعريفها على مجموعات ذات قياس صفري واستخدام كل من قياس لوبيغ و القياس المستمر.
3. تجزئة المجموعات المحدبة المكونة من التوابع $u(x)\in L^*_f$ لدراسة استمراريتها واستخدام قياس لوبيغ لها.
4. تشكيل متتاليات من التوابع المحدبة المطردة الجمعية و المتقاربة في كل مكان إلى تابع محدب في الفضاء L^*_f .
5. شروط استمرارية المؤثرات الخطية $A:L^*_{M_1}\to L^*_{M_2}$ ($L^*_{M_1}$, $L^*_{M_2}$ فضاءا أورليتش) .والاستمرار التام للمؤثرات التكاملية الخطية أياً كانت صفات نواتها .
6. تشكيل الجداء التبولوجي للمؤثرات الخطية في صفوف الفضاءات $\hat{E}_f$, $\hat{L}^*_f$ المقابلة لصفوف الفضاءات $E_f(\hat{G})$, $L^*_f(\hat{G})$ وتزويدها بقياس لوبيغ.
7. تشكيل صفوف أورليتش من مجموعة توابع متباينة تعرَّف على مجموعات قياسها لا يساوي الصفر و دراسة خطية وتحدب تلك المجموعات .
8. أيضاً تشكيل صفوف أورليتش من مجموعات توابع تقابل تعرَّف على مجموعات ذات قيـاس صفري ثم دراسـة الاستمرار والاستمرار التام لتلك التوابع.
9. إمكانية إيجاد الجداء التبولوجي للمؤثرات الخطية التي تعطى بدلالة توابع التقابل المكونة لصفوف أورليتش.
10. إمكانية دراسة التقارب لمتتالية توابع التقابل المكونة لصفوف أورليتش ومقارنتها باستمرارية تلك التوابع.

المراجع

1. K Kuratowski, A Half Century Of Polish Mathematics (Warsaw, 1980).
2. H Steinhaus, Between Spirit And Matter Mediate Mathematics (Polish) (Warsaw-Wroclaw, 2000).
3. Wladyslaw Orlicz Collected Papers I, Ii (Warsaw, 1988).
4. Yensen J. L. W.V. Sur Les Functions Convexes Et Les Ine'Galite'S Entre Les Values Moyennes, Acla Math. 30 (1960)

5. . Takahashi T. ;On The Compactness Of The Function Set By The Convergence In Mean Of General Type ,Stud , Math . 5 (1985).
6. Young W. H. On Classes Of Summable Functions And Their Fourier Series, Prcc. Roy. Soc.(A) 87 (1984)
7. [Day, M. M. (1973),Normed Linear Spaces, 3rd Ed. Newyork. Sprin Ger].
8. A. Weil L'integration Sur Les Groups Topologiques Et Ses Applications, Paris, Hermann Et Cie. (1980).
9. [C. Caratheodory. Algebraic Theory Of Measure And Integration, Newyork, Chelsea Publishing Co., (2003)]
10. S.M.Buckley, Quasiconformal Images Of H $\ddot{o}$ Lder Domains , Preprint
11. N.Shanmugalingam,Newtonian Space: An Extension Of Sobolev Spaces To Metric Measure Spaces , Thesis, University Of Michigan(2000).
12. N.Trudinger ,On Imbedding Into Orlicz Spaces And Some Applications,J.Math.Mech.17 (1967).
13. J Albrycht, Speech Delivered At The Graduation Ceremony On Honorary.
14. Membership Of W. Orlicz (Polish), Wiadom. Mat. **18** (1974), 200-204.
15. W Jankowski, On The Scientific Activity Of Professor W. Orlicz (Polish), Wiadom. Mat. **22** (1980), 275-279.
16. L Maligranda, Wladyslaw Orlicz (1903-1990) - His Life And Contribution To Mathematics (Polish), In: Wladyslaw Orlicz (1903-1990) - Founder Of The Poznan School Of Mathematics, Poznan 2001, 33-79
17. . D.Girela And J.A.Pelaez,Integral Means Of Analytic Function,Ann.Acad.Sce.Fenn .Math.29(2004),459-469.
18. B.D.Maccluer And J.H.Shapiro ,Angular Derivatives And Compact Composition Operators On The Hardy And Bergman Spaces,National Science Foundation.J.Math.No 4 (1984) 778-867
19. L Maligranda And W Wnuk, Wladyslaw Orlicz(1903-1990) (Polish), Nauka Polska **3** (1992), 187-193.
20. K.Hoffiman ,Banach Spaces Of Analytic Function,Dover Publications,Inc, Mineola,New York 2007.