مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (2) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (2) 2017

مجموعات تحول قيم بعض الداليات العقدية في فضاء كاراتيودوري المعمم

الدكتور حسن بدور*
هناء سكاف**

(تاريخ الإيداع 5 / 2 / 2017. قُبِل للنشر في 19 / 3 /2017)

□ ملخّص □

يقدم هذا البحث طريقة معينة لتحديد مجموعات تحول قيم بعض الداليات الخطية في فضاء كاراتيودوري المعمم وهو فضاء التوابع التحليلية f في قرص الواحدة $|z|<1$ التي تقبل التمثيل التكاملي الآتي:

$$f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha\, e^{it}z}\,d\mu(t)\ ,\qquad |z|<1\ ,\ 0<\alpha,\beta\le 1$$

حيث μ دالة غير متناقصة ضمن المجال $[-\pi,\pi]$ وتحقق الشرط $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$. و قد تم ، في هذا الفضاء، البرهان على أن مجموعة قيم الدالي:

$$F(f)=A(z_0)f(z_0)$$

عندما تكون $A(z)$ كثيرة حدود في القرص $(|z|<1)$، هي قرص مغلق $|W-W_0|\le R$ تم تحديد مركزه W_0 ونصف قطره R. وقد تم أيضاً تحديد مستقرات بعض الداليات الأخرى في هذا الفضاء.

الكلمات المفتاحية:

مجموعة تحول
المسائل القصوى
الدالي

* أستاذ –قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية
** أستاذ –قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (2) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (2) 2017

The Range of Variability of some Complex Functionals in The Generalized Caratheodory Class

Dr. Hassan Baddour*
Hanaa Skaf**

(Received 5 / 2 / 2017. Accepted 19 / 3 /2017)

□ ABSTRACT □

This paper presents a certain method to determine the range of variability of some functionals defined in Generalized Caratheodory Class (i.e the class of analytic functions in the unit disk $(|z|<1)$ of the form:

$$f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t),\quad |z|<1,\ 0<\alpha,\beta\leq 1,$$

where $\mu(t)$ is a nondecreasing function on the interval $[-\pi,\pi]$ such that $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$). It has been proved that the range of variability of functional
$F(f)=A(z_0)f(z_0)$
where $A(z)$ is a polynomial in $(|z|<1)$, is the closed disc $|W-W_0|\leq R$ with W_0 and R precisely determined . Also the range of variability of some other functionals determined.

Key Words:
Range of variability
Extremal problem
Functional

* **Professor , Department of Mathematics at University of Tishreen , Lattaki - Syria**
** **Academic Assistant , Department of Mathematics at University of Tishreen, Lattaki – Syria.**

مقدمة:

تطرح عادة المسألة القصوى على الساحة العقدية بالنسبة لدراسة الداليات العقدية كما يلي: ليكن الدالي :

$$J(f)=J\left(f(z_0),f'(z_0),\dots,f^{(n)}(z_0)\right) \qquad (1)$$

معرفاً في فضاء ما ، E من التوابع العقدية، حيث z_0 نقطة من الساحة العقدية التي عرفت عليها توابع الفضاء E (وهي عادة قرص الواحدة $D:|z|<1$) والمطلوب: تحديد مجموعة قيم الدالي في هذا الفضاء (يقصد بمجموعة قيم الدالي مجموعة تحولات قيمه أو باختصار مستقره).

وقد ظهرت سلسلة من الطرائق لمعالجة هذه المسألة و تم الحصول على نتائج كثيرة في هذا المجال من خلال دراسة الحالات الخاصة للدالي العام السابق ([9] ,[8] ,[7] ,[6] ,[2]).

من الفضاءات الهامة التي تمت عليها دراسة المسألة القصوى هو الفضاء E_q ، وهو فضاء التوابع f التحليلية في قرص الواحدة التي تقبل التمثيل التكاملي الآتي [1] :

$$f(z)=\int_a^b q(z,t)\,d\mu(t) \qquad (2)$$

حيث μ دالة غير متناقصة ضمن المجال $[a,b]$ وتحقق الشرط $\mu(b)-\mu(a)=1$. نرمز لمجموعة الدوال $\mu(t)$ المحققة لهذه الشروط بالرمز $U[a,b]$. يعرف E_q بفضاء (أو أسرة) التوابع التحليلية ذات التمثيل التكاملي في قرص الواحدة وتعرف العلاقة (2) بالتمثيل التكاملي (أوبالصيغة البنيوية) للتوابع في هذا الفضاء.

من الخواص التوبولوجية المعروفة في هذا الفضاء نذكر ما يلي[1] :

خاصة1: الفضاء E_q مترابط ومتراص في توبولوجيا التقارب المنتظم .

خاصة2: إذا كان $f\in E_q$ وB مجموعة قيم الدالي :

$$J(f)=f(z_0)=\int_a^b q(z_0,t)\,d\mu(t)\ ,\quad \mu\in U[a,b] \qquad (3)$$

في النقطة $z_0\in D$ ، فإن المجموعة B مغلقة ومترابطة ومحدبة ومنحني محيطها يحدد بالمعادلة:

$$\Gamma:\ w(t)=q(z_0,t),\ \ a\le t\le b$$

وكتعميم لهذه الخاصة نحصل على النظرية الآتية [4]:

نظرية1: إذا كانت التوابع $a_k(z),k=0,1,\dots n$ مستمرة في قرص الواحدة و z_0 نقطة كيفية من هذا القرص وB مجموعة قيم الدالي الخطي:

$$J(f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z_0)\ f^{(k)}(z_0)\ ,\quad f\in E_q \qquad (4)$$

فإن المجموعة B مغلقة ومترابطة ومحدبة ومنحني محيطها Γ يحدد بواسطة المعادلة:

$$\Gamma:\ W(t)=W(z_0,t)\ ,\quad a\le t\le b \qquad (5)$$

مع العلم أن:

$$W(z_0,t)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z_0)q_z^{(k)}(z_0,t) \qquad (6)$$

و $q(z_0,t)$ معطاة بالعلاقة (2).

في هذا البحث سوف نستفيد من هذه النظرية لتحديد مستقر بعض الداليات الخطية في الفضاءات الجزئية من الفضاء E_q وخصوصاً الفضاء C_α^β الذي سنأتي على تعريفه فيما بعد.

أهمية البحث وأهدافه

تنبع أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة في المسائل القصوى المتعلقة بالداليات العقدية وتحديداً تلك التي تملك تمثيلاً تكاملياً من نوع ريمان – ستلجس حيث يتم التوصل إلى إيجاد حلول لمسائل مطروحة سابقاً وإلى حلول مسائل جديدة متعلقة بتحديد مستقرات بعض الداليات ومشتقاتها . إضافة لذلك لهذه الدراسة أهمية أيضاً من ناحية تضمنها للكثير من المسائل المفتوحة على مستوى البحث العلمي والدراسات العليا.

طرائق البحث ومواده:

طريقة البحث المتبعة هي استخدام النظريات الأساسية المتعلقة بتحديد مستقرات الداليات وانعكاس ذلك على أسر التوابع التي تملك تمثيلاً تكاملياً مثل فضاء كاراتيودوري المعمم والأسر المرتبطة به ، حيث يمكن في هذه الحالة استخدام خواص تكامل ريمان – ستلجس للحصول على بعض النتائج بسهولة.

النتائج و المناقشة

يعد فضاء كاراتيودوري (الذي يرمز له بالرمز C) من الفضاءات الجزئية الهامة للفضاء E_q وهذا الفضاء هو فضاء التوابع f التحليلية في قرص الواحدة الذي يحقق الشرطين:

$$f(0)=1,\ Re\, f(z)\geq 0$$

وكما هو معروف [3] فإن الشرط اللازم والكافي لانتماء f إلى C هو قبول f التمثيل التكاملي الآتي:

$$f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t),\ \ z\in D\ \ \mu\in U[-\pi,\pi] \tag{7}$$

وبذلك يكون فضاء كاراتيودوري C جزءاً من الفضاء E_q ويتطابق معه بوضع:

$$q(z,t)=\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\quad,\quad a=-\pi\,,\ \ b=\pi\,.$$

ومن الأمثلة الأخرى للفضاء E_q التي سنهتم بها هو فضاء التوابع التحليلية التي تقبل عناصرها التمثيل التكاملي الآتي:

$$f(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\beta\, e^{it}z}{1-\alpha\, e^{it}z}\,d\mu(t),\quad z\in D\,,\ \mu\in U[-\pi,\pi] \tag{8}$$

حيث $0<\alpha,\beta\leq 1$. يدعى هذا الفضاء بفضاء كاراتيودوري المعمم ويرمز له بالرمز C_α^β. لنلاحظ أن C_α^β يتطابق مع C عندما يكون $\alpha=\beta=1$.

في المرجع [5] تم البرهان على صحة النظرية الآتية:

نظرية2: مجموعة قيم الدالي

$$J(f)=f(z_0),\ f\in C_\alpha^\beta\ ,z_0\in D$$

هي القرص المغلق $|w-u_0|\le R_0$ المحدد بالدائرة::

$$(u-u_0)^2+v^2=R_0^2 \qquad (9)$$

حيث $w=u+iv$ و:

$$u_0=\frac{1+\alpha\beta r^2}{1-\alpha^2r^2},\ R_0=\frac{(\beta+\alpha)r}{1-\alpha^2 r^2}\quad ,\ |z_0|=r\ ,\ 0<r<1 \qquad (10)$$

وكنتيجة لهذه النظرية وبعد وضع $\alpha=\beta=1$ نجد أن مجموعة تحول قيم الدالي :

$$J(f)=f(z_0),\ f\in C\ ,z_0\in D$$

في فضاء كاراتيودوري C ، تتألف من القرص المغلق $|w-u_0|\le R_0$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين :[3]

$$u_0=\frac{1+r^2}{1-r^2},\quad R_0=\frac{2r}{1-r^2}\quad ,\ |z_0|=r\ ,\ 0<r<1 \qquad (11)$$

إضافة إلى ما تقدم يمكن صياغة النظرية1 في الفضاء C_α^β بشكل منا سب للتطبيقات . فإذا لاحظنا أن:

$$f^{(0)}(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t) \qquad (12)$$

$$f'(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(\beta+\alpha)e^{it}}{\left(1-\alpha e^{it}z\right)^2}\ d\mu(t),\quad ...., \qquad (13)$$

$$f^{(n)}(z)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{n!(\beta+\alpha)\alpha^{n-1}e^{int}}{\left(1-\alpha e^{it}z\right)^{n+1}}\ d\mu(t), \qquad (14)$$

استنتجنا أن للدالي الخطي (4) الشكل:

$$J(f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z_0)\ f^{(k)}(z_0)=$$

$$=a_0(z_0)\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}\,d\mu(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k(z_0)\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{k!(\beta+\alpha)\alpha^{k-1}e^{ikt}}{\left(1-\alpha e^{it}z\right)^{k+1}}\ d\mu(t)$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\left[a_0(z_0)\frac{1+\beta e^{it}z}{1-\alpha e^{it}z}+\sum_{k=1}^{n}a_k(z_0)\frac{k!(\beta+\alpha)\alpha^{k-1}e^{ikt}}{\left(1-\alpha e^{it}z\right)^{k+1}}\right]d\mu(t)\ .$$

وعندئذ انسجاماً مع النظرية 1 ستكون صحيحة النظرية الآتية:

نظرية3: إذا كانت الدوال $a_k(z),k=0,1,...n$ مستمرة في قرص الواحدة و B مجموعة قيم الدالي الخطي (4) في الفضاء C_α^β فإن هذه المجموعة مغلقة ومترابطة ومحدبة ومنحني محيطها Γ معطى بالمعادلة :

$$W(z_0,t)=a_0(z_0)\frac{1+\beta e^{it}z_0}{1-\alpha e^{it}z_0}+\sum_{k=1}^{n}a_k(z_0)\frac{n!(\beta+\alpha)\alpha^{k-1}e^{ikt}}{\left(1-\alpha e^{it}z_0\right)^{k+1}}\ . \qquad (15)$$

علماً أن z_0 نقطة كيفية من قرص الواحدة و $-\pi \le t \le \pi$.

في هذا البحث نتابع دراسة مستقر الداليات الخطية من الشكل (4) في الفضاء C_α^β من أجل بعض الحالات الخاصة وخصوصاً عندما تكون الأمثال $a_k(z)$ كثيرات حدود معرفة في قرص الواحدة .

سوف نبرهن على صحة النظرية الآتية:

<u>نظرية4</u> . إذا كانت $A(z)$ كثيرة حدود معرفة في قرص الواحدة فإن مجموعة قيم الدالي:

$$J(f) = A(z_0) f(z_0), \;\; z_0 \in D, \quad f \in C_\alpha^\beta \tag{16}$$

تتطابق مع القرص المغلق $|W - W_0| \le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$W_0 = \left(p\frac{1+\alpha\beta r^2}{1-\alpha^2 r^2}, q\frac{1+\alpha\beta r^2}{1-\alpha^2 r^2} \right), \quad R = |A| \frac{(\beta+\alpha)r}{1-\alpha^2 r^2} \tag{17}$$

مع العلم أن:

$$p = Re\; A(z_0), \;\; q = Im\; A(z_0), \; |A| = \sqrt{p^2+q^2} \quad , \; |z_0| = r$$

البرهان. لدينا:

$$J(f) = A(z_0) f(z_0) = \int_{-\pi}^{+\pi} A(z_0) \frac{1+\beta\, e^{it} z_0}{1-\alpha\, e^{it} z_0}\, d\mu(t)$$

لذلك و بحسب النظرية 3 ستكون مجموعة قيم هذا الدالي (التي نرمز لها بالرمز B) محددة ، في هذه الحالة ، بالمنحني Γ الذي معادلته:

$$\Gamma : W = W(t) = A(z_0) \frac{1+\beta\, e^{it} z_0}{1-\alpha\, e^{it} z_0}, \; -\pi \le t \le \pi \;\cdot \tag{18}$$

حيث يكون:

$$a_0(z_0) = A(z_0) = p + iq \;, \quad a_k(z) = 0\,, k = 1,...n$$

$$w(t) = \frac{1+\beta e^{it} z_0}{1-\alpha\, e^{it} z_0}, \; -\pi \le t \le \pi$$

مع ملاحظة أن $w(t) = u + iv$ هو المنحني الممثل بالدائرة (9) . لإيجاد الشكل الديكارتي:

$$W(t) = u_* + iv_* \tag{19}$$

للمنحني (18) في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ نلاحظ أولاً أن:

$$\begin{aligned} W(t) &= u_* + iv_* = A(z_0) w(t) = A(z_0)(u+iv) \\ &= (p+iq)(u+iv) = pu - qv + (pv+qu)i \end{aligned}$$

فنستنتج مباشرة أن:

$$u_* = pu - qv\,,$$
$$v_* = pv + qu$$

وبحل جملة هاتين المعادلتين بالنسبة ل u و v نجد أن:

$$u=\frac{1}{|A|^2}\left(pu_*+qv_*\right),$$
$$v=\frac{1}{|A|^2}\left(-qu_*+pv_*\right)$$

حيث $|A|^2=p^2+q^2$. بتعويض ذلك في معادلة الدائرة (9) نحصل على العلاقة:

$$\left(\frac{1}{|A|^2}\left(pu_*+qv_*\right)-u_0\right)^2+\left(\frac{1}{|A|^2}\left(-qu_*+pv_*\right)\right)^2=R_0^2$$

مع العلم أن u_0 و R_0 معطاة بالعلاقتين. (10). ومنه:

$$\left(pu_*+qv_*\right)^2-2u_0\left(pu_*+qv_*\right)+|A|^2u_0^2+\left(-qu_*+pv_*\right)^2=|A|^2R_0^2$$

وبعد تحويلات بسيطة نحصل على المعادلة:

$$\left(u_*-pu_0\right)^2+\left(u_*-qu_0\right)^2=|A|^2R_0^2.$$

بتعويض u_0 و R_0 بقيمتيهما في (10) نحصل أخيراً على المعادلة:

$$\left(u_*-p\frac{1+\alpha\beta r^2}{1-\alpha^2r^2}\right)^2+\left(u_*-q\frac{1+\alpha\beta r^2}{1-\alpha^2r^2}\right)^2=|A|^2\left(\frac{(\beta+\alpha)r}{1-\alpha^2r^2}\right)^2 \qquad (21)$$

وهي معادلة دائرة $|W-W_0|=R$ تتطابق عناصرها مع العناصر الواردة في (17). وبذلك تكون المجموعة B هي القرص المغلق $|W-W_0|\le R$ وهو المطلوب.

ملاحظة1: إذا كان $A(z)=1$ فإننا نحصل على تحديد مستقر الدالي $F(f)=f(z_0),$ في الفضاء المعمم C_α^β (نظرية 2 علاقة (10)). وإذا كان $A(z)=1$ و $\alpha=\beta=1$ فإننا نحصل على تحديد مستقر الدالي $F(f)=f(z_0),$ في الفضاء C (نظرية 2 علاقة (11)).

نتائج وتطبيقات

ينتج من النظرية 4 مباشرة ما يلي:

نتيجة1. إذا كان $f\in C_\alpha^\beta$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة D فإن مجموعة قيم الدالي:

$$F(f)=z_0f(z_0)$$

تتطابق مع القرص المغلق $|W-W_0|\le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$W_0=\left(x_0\frac{\beta+\alpha r^2}{1-\alpha^2r^2},y_0\frac{\beta+\alpha r^2}{1-\alpha^2r^2}\right),\quad R=r^2\frac{(\beta+\alpha)}{1-\alpha^2r^2},\ |z_0|=r\ . \qquad (22)$$

حيث $|z_0|=r$, $z_0=x_0+iy_0\neq 0$.

نتيجة2. إذا كان $f\in C_\alpha^\beta$ و z_0 نقطة من قرص الواحدة Dحيث فإن مجموعة قيم الدالي:

$$F(f)=z_0^nf(z_0),\ z_0\neq 0$$

تتطابق مع القرص المغلق $|W-W_0|\le R$ المعطى مركزه ونصف قطره بالعلاقتين:

$$W_0 = z_0^n \frac{1+\alpha\,\beta\, r^2}{1-\alpha^2 r^2}\,, \quad R = r^{n+1}\frac{(\beta+\alpha)}{1-\alpha^2 r^2}\,, \; |z_0| = r \;. \qquad (23)$$

وكتطبيق على النظرية2 نورد المسألة الآتية:

تطبيق1: أوجد مجموعة تحول قيم الدالي:

$$J(f) = 1 + f(z_0) + \frac{2^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \frac{2^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(z_0)\,, \quad f \in C_\alpha^\beta$$

في النقطة $z_0 = 0$ حيث $\alpha = \beta = 1/2$ هو الكارديئويد المعطى بالمعادلة:

$$\left(u^2 + v^2 - 4u\right)^2 = 4\left(u^2 + v^2\right) \qquad (24)$$

البرهان. لتكن B مجموعة تحول قيم الدالي $J(f)$ في النقطة $z_0 = 0$ وليكن $\alpha = \beta = 1/2$. بالاستفادة من (15) نجد أن محيط المجموعة B يحدد بالمعادلة:

$$W(t) = 1 + \frac{1+\beta\, e^{it} z_0}{1-\alpha\, e^{it} z_0} + a_n \frac{n!(\beta+\alpha)\alpha^{n-1} e^{int}}{\left(1-\alpha\, e^{it} z_0\right)^{n+1}} + a_{2n}\frac{(2n)!(\beta+\alpha)\alpha^{2n-1} e^{2int}}{\left(1-\alpha\, e^{it} z_0\right)^{2n+1}}$$

$$= 1 + 1 + \frac{2^n}{n!}\left[2n!\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{int}\right] + \frac{2^{2n}}{(2n!)}\left[2(2n!)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} e^{2int}\right]$$

$$= 2 + 2e^{nit} + 2e^{2nit} = 2\left(1 + e^{nit} + e^{2nit}\right).$$

ينتج من ذلك ، بحسب النظرية2 ، أن المجموعة B محددة بالمنحني Γ المعطى بالمعادلة:

$$: W = W(t) = 2\left(1 + e^{nit} + e^{2nit}\right), \quad -\pi \le t \le \pi \;.$$

لمعرفة شكل المنحني Γ نضع $W = u + iv$ فنجد أن:

$$u = 2\,(1 + \cos nt + \cos n2t) = 2\cos nt(1 + 2n\cos t)$$
$$v = 2\,(\sin nt + \sin n2t) = 2\sin nt(1 + 2n\cos t)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} u/2 &= \cos nt(1 + 2\cos nt) \\ v/2 &= \sin nt(1 + 2\cos nt) \end{aligned} \qquad (25)$$

وبتحويلات بسيطة نجد أن:

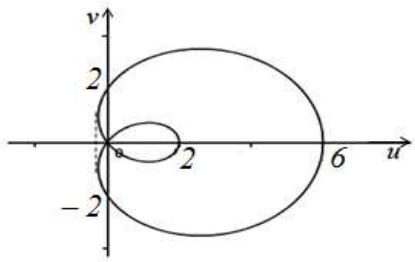
$$1 + 2\cos nt = \frac{1}{4}\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\cos nt = \frac{1}{4}\sqrt{u^2 + v^2} - \frac{1}{2}$$

وبتعويض ذلك في المعادلة الأولى من (25) نستطيع التخلص من الوسيط t ويكون:

$$u^2 + v^2 - 4u = 2\sqrt{u^2 + v^2}$$

ومنه نحصل على المعادلة (24) التي تمثل معادلة كارديوئيد (Cardioid) في المستوي كما يظهر على الشكل أدناه .



وبذلك تكون المجموعة B محددة بأصغر مجموعة محدبة تحوي هذا الكارديوئيد.

ملاحظة1: نلاحظ أن معادلة الكارديوئيد غير متعلقة بالعدد n. وهذا ناتج من دورية التابع الأسي. في هذه الحالة يحدد n عدد المرات التي تمسح فيها نقاط الكارديوئيد من خلال قيم الدالي المعطى.

الاستنتاجات والتوصيات

تم إيجاد مجموعة قيم الداليات في الفضاء C_{α}^{β} لبعض الداليات الخطية التي لها صفة كثيرات الحدود. بالإمكان متابعة هذه الدراسات في الفضاء E_q وفي فضاءاته الجزئية لإيجاد مناطق تحول الداليات الخطية الاعم وخصوصاً تلك المتعلقة بالمشتقات من درجات أعلى. فمثلاً بالإمكان البحث عن مجموعة تحول قيم الداليات من الشكل:

$$F(f) = z_0 f'(z_0),\ F(f) = z_0 f''(z_0), \ldots$$

في الفضاء C و C_{α}^{β} وغيرهما حيث نتوقع الحصول على نتائج مشابهة لتلك التي توصلنا إليها في الفقرات السابقة.

المراجع:

[1] ALEKSANDROV,I. *Boundary Values of Functional on the Class of Holomorphic Functions Univalent in a Circle*. Sibirsk, Mat. Z. 4 , (1963),17-31.

[2] BABALOLA. T, K. O. OPOOL, O. *Iterated integral Transforms of Caratheodory Functions and their Applications to Analytic and Univalent Functions*. Tamking Journal of Mathemtics Volume 37, Number 4, 355-366, Winter 2006.

[3]BADDOUR,H. *About the range of variability of linear functionals in Caratheodory Classe*. Damascus univ.journal- No.28 – 1998.

[4] BADDOUR,H. *The set of values of functional in classes of functions possessing a structural representation.* Jordan Journal of Mathematics and Statics. 2008,1(1) .

[5] BADDOUR,H.*The Boundary Propertieses of Some Functionals in Class* C_{α}^{β}.

Tichreen University Journal, Bas Sciences Series . V 36, Nr (6*) 2014.*

[6] KHAVINSON, D. STESSIN, M. *Certain linear extremal problems in Bergman spaces of analytic functions*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no. 3, 933–974.

[7] NUNOKAWA, M. YAVUZ DUMAN, E. *Properties of functions concerned with Caratheodory functions***.** ANNALES ,U M C-S **,** Lublin – Polonia Vol. LXVII, No. 2, 2013 Sectio A 33–41

[8] POMMERENKECh *Univalent Functions*. Vandehhoeck &Go`ttingen 1975.

[9] ROGOSINSKY, W. SHAPIRO, H. *On certain extremum problems for analytic functions*, Acta Math. 90 (1953), 287–318.