مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

نموذج نظري للجمل الكمومية بسويتي طاقة

الدكتور محي الدين نظام*
الدكتور محمد موسى**

(تاريخ الإيداع 8 / 7 / 2012. قُبِل للنشر في 21 / 2 /2013)

ملخّص

قدمنا في هذا العمل نموذجاً نظرياً لدراسة اهتزازات جملة كمومية بسويتي طاقة مفترضين وجود تفاعل متبادل بينهما من خلال:

أولاً: تمثيل الجملة الكمومية ذات سويتي الطاقة بحفرتي كمون كموميتين لانهائيتين متآثرتين على بعد واحد *x* ومتناظرتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات *o*، ثمّ إيجاد المتجهات الخاصة والقيم الخاصة لهما باستخدام معادلة شرودنغر المستقرّة *Stationary Schrödinger's equation*.

ثانياً: إثبات أنّ التقريب غير الاضطرابي كاف لكتابة مؤثر الهاملتوني لهذه الجملة، ولاشتقاق معادلة رابي للجملة *Rabi's equation*، وتطبيقها مباشرة على مؤثر التطور للحالة الابتدائية للجملة.

الكلمات المفتاحية: ميكانيك الكم– حفرة كمون كمومية– معادلة شرودنغر– معادلة رابي– مؤثّر التطوّر.

* أستاذ مساعد– قسم الفيزياء – كلّية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية
** أستاذ مساعد – قسم الفيزياء – كلّية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (35) العدد (1) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (35) No. (1) 2013

Theoretical Model Of The Two-Level Quantum Systems

Dr. Mohey-Aldin NIZAM*
Dr. Mohammad MOUSA**

(Received 8 / 7 / 2012. Accepted 21 / 2 /2013)

□ ABSTRACT □

We present a theoretical model for studying the oscillations among two-level quantum system when an interaction term is considered:
First, we present the two-level quantum system with a symmetric double square potential well in interaction, in one dimension *x*, then we find the eigenvectors and the eigenvalues for this system by solving the stationary Schrödinger's equation.
Second, we proved that a nonperturbative approach can be conveniently used to write the Hamiltonian operator and to derive the Rabi's equation for this system, directly applying the time evolution operator to the initial state of the system.

Keywords: Quantum Mechanics, Quantum Well Potential, stationary Schrödinger's Equation, Rabi's Equation, Time Evolution Operator.

* **Associate Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**
** **Associate Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة:

تُعدّ الدراسة الكمومية للجمل الفيزيائية بسويتي طاقة من المواضيع الهامة لما لها من تطبيقات في المجالات الفيزيائية التي تهتم بالاهتزازات بين سويتي طاقة مثل: النقط الكمومية *Quantum Dots* [1−5] والليزر [6−7] والفيزياء الذرية [8] واهتزازات نكهة النيوترينو $\nu_e - \nu_\mu$ *Flavor Neutrino Oscillations* [9] والفيزياء الجزيئية [10].

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى:

أولاً: إيجاد نموذج نظري، لوصف الجمل الكمومية بسويتي طاقة، يُساعد في الحصول على العلاقة التحليلية الدقيقة للمتجهات الخاصّة *eigenvectors* والقيم الخاصّة *eigenvalues*، باستخدام معادلة شرودنغر المستقرّة *Stationary Schrödinger's equation*.

ثانياً: استعمال النتائج التي حصلنا عليها في أولاً لاشتقاق معادلة رابي *Rabi's Equation*.

طرائق البحث وموادّه:

يصعب إيجاد الصيغة التحليلية لحل معادلة شرودنغر المستقرّة لجملة كمومية تحتوي أكثر من سويتين للطاقة [6]، لذلك يُلجأ للطرق التقريبية لإيجاد الحل مثل: استخدام الطرق العددية [11] أو طريقة ليابنوف *Lyapunov* [12].

اقتصرنا، في هذا البحث، على فراغ هيلبرت ثنائي البعد *Two-dimensional Hilbert space*، ومثّلنا الجملة الكمومية ذات سويتي الطاقة بإلكترون في حفرتي كمون كموميتين لانهائيتين على بعد واحد x، ومتناظرتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات o، وذلك بفرض كونهما متآثرتين (متفاعلتين مع بعضهما البعض) (*In Interaction*) من خلال طاقة تفاعل $A \in \mathcal{R}$ عبر حاجز كمون V_0.

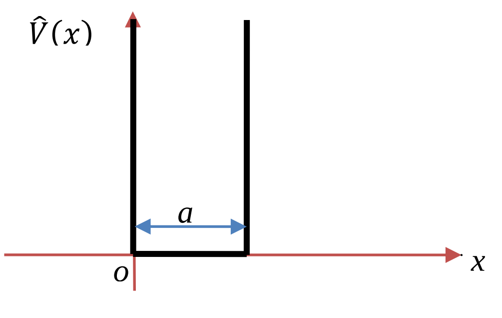
تُعطى معادلة شرودنغر المُستقرّة لجملة فيزيائية كمومية ما، بالشكل:

$$\hat{H}_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \qquad (1)$$

حيث تُمثّل $|\psi_n\rangle$ المتجهات الموجية الخاصة لمؤثّر الهاملتوني $\hat{H}_0$، الذي يُمثّل الطاقة الكلّية للجملة الفيزيائية الكمومية، على حين تُمثّل E_n القيم الخاصة المقابلة لها.

انطلقنا في توصيف النموذج النظري للجملة الفيزيائية الكمومية ذات سويتي الطاقة من شكل مُبسّط وذلك بفرض أنّه مكوّن من إلكترون واحد، طاقته E_0، موجود في حفرة كمون كمومية $\hat{V}(x)$ على بُعد واحد x وعرضها a، الشكل (1).

تُكتب العلاقة التي تصف حفرتي الكمون بالشكل التالي:



الشكل (1)

حفرة كمون كمومية $\hat{V}(x)$ على بُعد واحد x وعرضها a

$$\hat{V}(x) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \ll 0, x \gg a \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

إنّ حلّ معادلة شرودنغر المستقرّة لهذه الجملة مُعطى، في مُعظم الكتب الجامعية لمقرر ميكانيك الكم [13]، على الشكل التالي:

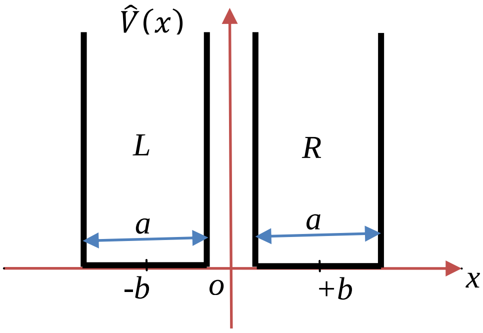
$$\begin{Bmatrix} \langle x|\psi_n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sin\frac{n\pi}{a}x: & 0 < x < a \\ \langle x|\psi_n\rangle = \psi_n(x) = 0: & eleswhere \\ E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\, n^2 = n^2E_1: & E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \end{Bmatrix} : n = 1,2,3, \dots \qquad (3)$$

تُشكلّ مجموعة المتجهات الموجية $\{|\psi_n\rangle\}$ قاعدة متوامدة (متعامدة ومنظّمة) (*Orthonormal basis*) في فراغ هيلبرت، وهذا يعني أنّ العلاقات التالية محققة:

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm} = \begin{Bmatrix} 1: & n = m \\ 0 & n \neq m \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

حيث يُمثّل δ_{nm} رمز كرونكر (*Kronecker*).

ثمّ عممنا النموذج النظري للجملة الفيزيائية الكمومية ذات سويتي الطاقة بفرض أنّها موصوفة بإلكترون واحد، طاقته $E_0>0$، موجود في إحدى حفرتي كمون كموميتين لانهائيتين ولامتآثرتين ومتناظرتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات o، وبفرض أيضاً أنهما على بعد واحد x وعرض كل منهما a ويبعدان عن مبدأ الإحداثيات مسافة مقدارها $|b|$، الشكل (2).



الشكل (2) حفرتي كمون كموميتين لانهائيتين ولامتآثرتين

وكتبنا العلاقة التي تصف حفرتي الكمون الكموميتين $\hat{V}(x)$، بالشكل التالي:

$$\hat{V}(x) = \begin{Bmatrix} 0: & -\frac{b}{2} + a \leq x \leq -\frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} \leq x \leq a + \frac{b}{2} \\ \infty: & elswhere \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

وأوجدنا حلّ معادلة شرودنغر المستقرّة لهذه الجملة، بفرض أنّ الإلكترون موجود في حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L، وهو على الشكل التالي:

$$\begin{Bmatrix} \langle x|\psi_n^L\rangle = \psi_n^L(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sin\frac{n\pi}{a}\left(a + \frac{b}{2} + x\right): & -\frac{b}{2} + a \leq x \leq -\frac{b}{2} \\ \langle x|\psi_n^L\rangle = \psi_n^L(x) = 0: & eleswhere \\ E_n^L = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\, n^2 = n^2E_1 & \end{Bmatrix} : n = 1,2,3, \dots \qquad (6)$$

بعد ذلك أوجدنا حلّ معادلة شرودنغر المستقرّة للجملة نفسها، بفرض أنّ الإلكترون موجود في حفرة الكمون الكمومية اليُمنى R، وهو على الشكل التالي:

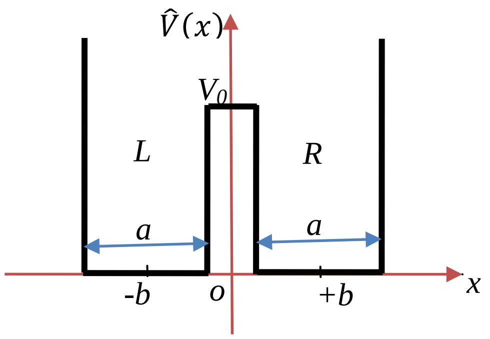
$$\left\{\begin{array}{ll} \langle x|\psi_n^R\rangle = \psi_n^R(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sin\frac{n\pi}{a}\left(a+\frac{b}{2}-x\right): & \frac{b}{2} \le x \le a+\frac{b}{2} \\ \langle x|\psi_n^R\rangle = \psi_n^R(x) = 0: & eleswhere \\ E_n^R = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2 = n^2 E_1 & \end{array}\right\} : n = 1,2,3,\ldots \quad (7)$$

نلاحظ أنّ سويات الطاقة: $E_n^L = E_n^R = n^2E_1 : n = 1,2,3,\ldots$ مُنطبقة (*degenerate*) من الدرجة الثانية؛ أي g=2، لأنّها تقابل متجهين موجبين مختلفين:

المتجه الموجي الأيسر $|\psi_n^L\rangle$ المقابل لسوية الطاقة $E_n^L = n^2E_1$ في حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L، والمتجه الموجي الأيمن $|\psi_n^R\rangle$ المقابل لسوية الطاقة $E_n^R = n^2E_1$ في حفرة الكمون الكمومية اليُمنى R.

اقتصرنا في هذه الدراسة على سوية الطاقة الأساسية (*Ground Level*)؛ أي من أجل العدد الكمومي الرئيس n=1. ونُشير هنا إلى أنّ سويتي الطاقة الأساسيتين، قبل تآثر حفرتي الكمون الكموميتين، منطبقتان: $E_1^L = E_1^R = E_1$، ومقابلتان للمتجهين الموجبين: المتجه الموجي الأيسر $|\psi_1^L\rangle$ المقابل لسوية الطاقة $E_1^L = E_1$ في حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L والمتجه الموجي الأيمن $|\psi_1^R\rangle$ المقابل لسوية الطاقة $E_1^R = E_1$ في حفرة الكمون الكمومية اليُمنى R، الشكل (2).

أمكننا، بناءً على ما تقدم، اقتراح النموذج النظري الذي يصف الجملة الفيزيائية الكمومية ذات سويتي الطاقة بفرض أنّها مكوّنة من إلكترون، طاقته E_0>0، موجود في إحدى حفرتي كمون لانهائيتين متآثرتين ومتناظرتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات o، وبفرض أنّهما على بُعد واحد x وعرض كل منهما a ويبعدان عن مبدأ الإحداثيات مسافة $|b|$، الشكل (3).



الشكل (3)حفرتي كمون لانهائيتين متآثرتين ومتناظرتين بالنسبة لمبدأ الإحداثيات *o*

كتبنا العلاقة التي تصف حفرتي الكمون الكموميتين $\hat{V}(x)$، في هذه الحالة، بالشكل التالي:

$$\hat{V}(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0: & -\frac{b}{2}+a \le x \le -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \le x \le a+\frac{b}{2} \\ V_0 > 0: & -\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2} \\ \infty: & eleswhere \end{array}\right\} \quad (8)$$

إنّ تآثر الحفرتين الكموميتين يعني: أولاً اتصالهما بحاجز كمون ارتفاعه V_0>0 وذلك بفرض أنّ طاقة الإلكترون أصغر من ارتفاع طاقة حاجز الكمون' أيّ: $E_0 < V_0$، ثانياً وجود طاقة تفاعل بينهما A. على حين يُعبّر، في ميكانيك الكم، عن تآثر الحفرتين من خلال إضافة المؤثّر $\widehat{W}$ إلى مؤثّر هاملتوني الجملة الأساس. إنّ الغاية من

إضافة المؤثّر $\widehat{W}$ هي وصف إمكانية انتقال الإلكترون بين حفرتي الكمون الكموميتين، من خلال مفعول النفق (*Tunnel Effect*) لأنّ: $E_0 < V_0$. بذلك يُصبح $\widehat{H}$ مؤثّر الهاملتوني الكلّي لجملة حفرتي الكمن الكموميتين المتآثرتين: $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{W}$. كتبنا تأثير مؤثّر الهاملتوني المُضاف $\widehat{W}$ على القاعدة المتوامدة $\{|\psi_1^L\rangle, |\psi_1^R\rangle\}$ بالعلاقتين التاليتين:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{W}|\psi_1^L\rangle = -A|\psi_1^R\rangle \\ \widehat{W}|\psi_1^R\rangle = -A|\psi_1^L\rangle \end{Bmatrix} \tag{9}$$

وأوجدنا المصفوفة الممثلة لمؤثّر الهاملتوني المُضاف $\widehat{W}$، في القاعدة المتوامدة $\{|\psi_1^L\rangle, |\psi_1^R\rangle\}$، بالشكل التالي:

$$\widehat{W} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} |\psi_1^L\rangle \\ |\psi_1^R\rangle \end{array} \tag{10}$$

أوجدنا حلول معادلة شرودنغر المستقرّة لجملة حفرتي الكمون المتآثرتين، وذلك بعد إضافة مؤثّر الهاملتوني $\widehat{W}$ إلى مؤثّر هاملتوني الجملة الأساس $\widehat{H}_0$، فأصبحت معادلة شرودنغر المستقرّة الجديدة الشكل التالي:

$$\widehat{H}|\varphi\rangle = \left(\widehat{H}_0 + \widehat{W}\right)|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \tag{11}$$

وبيّنا في العلاقات (12) الشكل العام للمتجه الموجي المتناظر $|\varphi_1^S\rangle$ (*Symmetric eigenvector*) والقيمة الخاصة المقابلة له E_1^S، والشكل العام للمتجه الموجي اللامتناظر $|\varphi_1^A\rangle$ (*Asymmetric eigenvector*) والقيمة الخاصة المقابلة له E_1^A. نُشير هنا إلى أنّ المتجهين الموجيين: المتناظر $|\varphi_1^S\rangle$ واللامتناظر $|\varphi_1^A\rangle$ هما عبارة عن تركيب خطي للمتجهين الموجيين الأيسر $|\psi_n^L\rangle$ والأيمن $|\psi_n^R\rangle$ اللذين أشرنا إليهما في العلاقات (6) و (7).

$$\begin{Bmatrix} |\varphi_1^S\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_1^L\rangle + |\psi_1^R\rangle] \Longrightarrow E_1^S = E_1 - A \\ |\varphi_1^A\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_1^L\rangle - |\psi_1^R\rangle] \Longrightarrow E_1^A = E_1 + A \end{Bmatrix} \tag{12}$$

نلاحظ أنّ أخذ التآثر، بين حفرتي الكمون الكموميتين، بالاعتبار قد أزال الانطباق في سويتي الطاقة الأساسيتين: $E_1^L = E_1^R = E_1$. إذ تنخفض سوية الطاقة الأساسية E_1 المقابلة للمتجه الموجي المتناظر بمقدار قيمة طاقة التفاعل A، على حين ترتفع سوية الطاقة الأساسية E_1 المقابلة للمتجه الموجي اللامتناظر بمقدار قيمة طاقة التفاعل نفسها A.

تمت، لاشتقاق معادلة رابي، دراسة الجمل الكمومية ذوات سويتي الطاقة بطريقة التقريب وفقاً لنظرية الاضطراب [14–15]. أمّا نحن فقد استخدمنا نتائج النموذج، الذي طرحناه أعلاه، لاشتقاق معادلة رابي بطريقة غير اضطرابية. فرضنا في البداية؛ أي عند اللحظة t_0=0، أنّ الإلكترون موجود في إحدى حفرتي الكمون الكموميتين ولتكن حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L، أنظر الشكل (3). ووصفنا الجملة الفيزيائية، عند اللحظة عند اللحظة t_0=0، بالتابع الموجي الخاص (*eigenfunction*) التالي:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\psi_1^L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_1^S\rangle + |\psi_1^A\rangle] \tag{13}$$

حصلنا على العلاقات (13) انطلاقاً من العلاقات (12). طبقنا مؤثّر التطور $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t}$ على التابع الموجي الخاص $|\Psi(t_0 = 0)\rangle$، الذي يُمثّل الحالة الابتدائية للجملة الفيزيائية عند اللحظة $t_0=0$، للحصول على التابع الموجي الخاص $|\Psi(t)\rangle$ في اللحظة $t > t_0$، أي:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(t = 0)\rangle = \hat{U}(t)|\psi_1^L\rangle \tag{14}$$

نُشير هنا إلى أنّ مؤثّر التطور $\hat{U}(t)$ هو مؤثّر واحدي (*Unitary Operator*)؛ أي أنّه يُحقق العلاقات الآتية:

$$\hat{U}\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{I} \tag{15}$$

حيث يُمثّل المؤثّر $\hat{U}^{-1}$ المؤثّر المعكوس (*Invers Operator*) للمؤثّر $\hat{U}$ والمؤثّر $\hat{U}^{\dagger}$ المؤثّر المرافق الذاتي (*Adjoint Operator*) للمؤثّر $\hat{U}$ والمؤثّر $\hat{I}$ مؤثّر الوحدة (*Identity Operator*).

عوّضنا، في العلاقة (14)، عن مؤثّر التطور $\hat{U}(t)$ والتابع الموجي الخاص $|\Psi(t_0 = 0)\rangle$ بما يساويهما، كما يلي:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_1^S\rangle + |\psi_1^A\rangle]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t}|\psi_1^S\rangle + e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t}|\psi_1^A\rangle\right] \tag{16}$$

أجرينا بعض الحسابات على العلاقة (16) وحصلنا، بعد الإصلاح، على التابع الموجي الخاص $|\Psi(t)\rangle$ في اللحظة $t > t_0$، على الشكل التالي:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{iE_1}{\hbar}}\left[\cos\frac{At}{\hbar}|\psi_1^L\rangle + \sin\frac{At}{\hbar}|\psi_1^R\rangle\right] \tag{17}$$

حسبنا، أخيراً، قيمة $\mathcal{P}_{LR} = |\langle\psi_1^R|\Psi(t)\rangle|^2$، الذي يُمثّل إحتمال إنتقال الإلكترون من حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L إلى حفرة الكمون الكمومية اليُمنى R وقيمة $\mathcal{P}_{RL} = |\langle\psi_1^L|\Psi(t)\rangle|^2$، الذي يُمثّل إحتمال إنتقال الإلكترون من حفرة الكمون الكمومية اليُمنى R إلى حفرة الكمون الكمومية اليُسرى L، ووجدنا النتائج التالية:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{LR} &= |\langle\psi_1^R|\Psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{At}{\hbar}\right) \\ \mathcal{P}_{RL} &= |\langle\psi_1^L|\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{At}{\hbar}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

تُدعى المعادلات (18) معادلة رابي.

النتائج والتوصيات:

1. أوجدنا نموذجاً نظرياً مناسباً لوصف الجمل الكمومية بسويتي طاقة.
2. نستطيع، من خلال العلاقات التحليلية الدقيقة للمُتجهات الخاصّة (3،6،7،12)، حساب القيمة المُتوقّعة لموضع الإلكترون باستخدام العلاقة التالية: $\langle\hat{x}\rangle = \langle F|\hat{x}|F\rangle$، حيث يُمثّل F أحد المُتجهات الخاصة المذكورة في العلاقات (3،6،7،12).
3. تبين، من خلال أخذ التآثر بالاعتبار، بين حفرتي الكمون الكموميتين بعد إضافة المؤثّر $\hat{W}$ إلى $\hat{H}_0$ مؤثّر هاملتوني الجملة الأساس، أنّه قد أزال الانطباق في سويتي الطاقة الأساسيتين: $E_1^L = E_1^R = E_1$، إذ تنخفض سوية الطاقة الأساسية E_1 المقابلة للمتجه الموجي المتناظر بمقدار قيمة طاقة

التفاعل A، لتُصبح: $E_1^S = E_1 - A$ على حين ترتفع سوية الطاقة الأساسية E_1 المقابلة للمتجه الموجي اللامتناظر بمقدار قيمة طاقة التفاعل نفسها A لتُصبح: $E_1^A = E_1 + A$.

4. اشتقينا معادلة رابي بطريقة بسيطة ومباشرة غير اضطرابية.
5. إنّ احتمال انتقال الإلكترون بين حفرتي الكمون الكموميتن يتعلق بطاقة التفاعل A بين الحفرتين.
6. إن للنموذج النظري الذي أقترحناه تطبيقات كثيرة للجمل الفيزيائية الكمومية التي يُمكن وصفها بجملة كمومية بسويتي طاقة.
7. نقترح تعميم النموذج النظري الذي أقترحناه ليأخذ بالاعتبار لاتناظر حفرتي الكمون الكموميتين مع المحافظة على الشكل أو المحافظة على التناظر مع تغيير شكل الحفرتين؛ قطع مكافئ أو نصف قطع مكافئ.

المراجع

1. A. Nishino, T. Imamura and N. Hanato, J. Phys.: Conf. Ser. 343, 2012.
2. O. V. Kibis, G. Ya. Slepyan, S. A. Maksimenko and A. Hoffmann, Phys. Rev. Lett., 102, 023601, 2009.
3. U. Hartmann and F. Wilhelm, Phys. Rev. B, 69, 161309(R), 2004.
4. W. Wiel, T. Fujisawa, S. Tarucha and L. Kouwenhoven, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 40, pp. 2100-2104, 2001.
5. B. Rakos, A. I. Csurgay and W. Porod, Superlattices and Microstructures, 34, pp. 503-507, 2003.
6. K-E. Thylwe and H. J. Korsch, J. Phys. A: Math. Gen. 35, pp. 7507-7523, 2002.
7. U. Boscain and P. Mason, arXiv:quant-ph/050215v1, 2005.
8. T. M. Haard, J. B. Rand, H. H. Hensley, Y. Lee, P. J. Hamot, D. T. Sprague and W. P. Halperin, Phys. Rev. Lett. Vol. 72, N. 6, pp.860-863, 1994.
9. Zhi-zhong Xing, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 203–204 (2010) 82–117.
10. J-M Lévy-Leblond And F. Balibar, Quantique (Rudiment), InterEditions, Paris, 1984.
11. I. D. Ferachuk, L. I. Komarov and A. P. Ulyanenkov, J. Phys. A: Math. Gen., 29, pp. 4035-4047, 1996.
12. D. Dong and I. Petersen, arXiv: 1009.055v2 [quant-ph] 2011.
13. C. Cohen-Tanoudji, B. Diu and F. Laloë, Mécanique Quantique, Tome 1, Hermann, Paris, 1977.
14. Z-J. Zhang, D-G. Jiang an W. Wang, Commun. Theor. Phys., Vol. 56, pp. 67-70, 2011.
15. D. Dong and I. Petersen, IFAC World Congress, pp. 5777-5782, 2011.