مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (39) العدد (5) 2017
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (39) No. (5) 2017

استخدام معادلة هاملتون-جاكوبي لدراسة نظرية الالكترون النسبي وبعض تطبيقاتها

الدكتور علي عساف*

(تاريخ الإيداع 21 / 8 / 2017. قُبِل للنشر في 1 / 10 /2017)

□ ملخّص □

استخدمنا في هذه المقالة معادلة هاملتون- جاكوبي المعممة لدراسة الحركة النسبية للإلكترون في الحقل الكهرومغنطيسي الكيفي، اعتماداً على تابع الفعل(مبدأ الفعل الأصغري)، مع الأخذ بالحسبان العلاقة بين تابعي هاملتون ولاغرانج $(H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L)$، بدءاً من معادلتي الحركة والطاقة للإلكترون في نظرية النسبية الخاصة، حيث تم اختيار اللاغرانجيان بحيث يكون من أجله مبدأ التغاير مساوياً للصفر وبالتالي تكون معادلة لاغرانج محققة، وقد تم الحصول على المجموعتين الأولى والثانية لمعادلات هاملتون القانونية ومن ثم على قانون انحفاظ تابع هاملتون، أي طاقة الالكترون. وقد شمل هذا البحث دراسة بعض تطبيقات معادلة هاملتون- جاكوبي على الحركة الحرة لجسيم والحركة الدائرية واللاتغايرات الكظومة ومن ثم نُوقشت مسألة كبلر لذرة الهيدروجين في النظرية النسبية وتم استخراج معادلة مسار الحركة للإلكترون وحساب كل من طاقه وتواتر(تردد) الاهتزاز.

الكلمات المفتاحية: معادلة هاملتون- جاكوبي، تابع الفعل، مبرهنة جاكوبي، التحولات الكظومة، مسألة كبلر، مسار وردة سمر فيلد.

* أستاذ مساعد ، قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية ، سورية

Using Hamilton-Jacoby equation to study the relativistic theory of the electron and some of its applications

Dr. Ali ASSAF*

(Received 21 / 8 / 2017. Accepted 1 / 10 /2017)

□ ABSTRACT □

In this article, we used the generalized Hamilton-Jacoby equation to study the relative motion of the electron in the arbitrary electromagnetic field, depending on the action function(the principle of the least action), taking into account the relationship between the Hamilton and Lagrange functions($H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L$), starting with the equations of energy and motion for electron in the theory of special relativity, where the Lagrangian were chosen so that the principle of variation is equal to zero, thus the Lagrange equation was verified. The first and second sets of Hamilton's equations were obtained and then Hamilton's conservation law, ie electron energy. Study of some applications of the Hamilton-Jacoby equation on the free motion of the particle, circular motion and the adiabatic transformations was discussed. Kepler problem of the hydrogen atom was then discussed in relativistic theory. The equation of the motion path of the electron was calculated and the energy of the vibration and the frequency of the vibration were calculated.

Key words: Hamilton-Jacoby equation, action function, Jacoby's theorem, adiabatic transformations, Kepler's problem, path of Rose Sommerfeld.

***Associate Professor, Department of Physics, Science Faculty, Tishreen Uni., Lattakia ,Syria.**

مقدمة

يُعنى الميكانيك التقليدي أولاً بوصف حركة الجسيمات، ويكتمل الوصف في أية لحظة زمنية بتحديد ثلاثة إحداثيات فضائية لموقع الجسيم بالإضافة إلى ثابت عددي(سُلَّمي) هو كتلة الجسيم. لكن بالرغم من استحالة تحقيق تقسيم دقيق للمادة يتفق مع هذا المفهوم اتفاقاً تاماً، إلا أنه يمكن وصف حركة الأجسام الكبيرة وصفاً دقيقاً باعتبارها مكونة من مجموعة جسيمات بالمعنى المتقدم ذكره. كما أنه من المسلم به أن صياغة نيوتن لعلم الميكانيك تقريب يصح فقط حينما تكون سرعات جسيمات المنظومة (الجملة) صغيرة مقارنة مع سرعة الضوء. أما الوصف الأكثر شمولية لهذا العلم فهو ماتزودنا به النظرية النسبية الخاصة.

تلعب نظرية هاملتون –جاكوبي دوراً هاماً في حل مسائل الميكانيك، ولها أهمية كبيرة في تحليل الحركات الدورية. وتعد واحدة من الطرق المتطورة لحل أكثر المسائل العملية. وقبل اكتشاف النظرية الكوانتية الحديثة، كانت النظرية الذرية لِ بور Bohr تُعَالَج بدلالة نظرية هاملتون– جاكوبي. لقد لعبت هذه النظرية أيضاً دوراً هاماً في علم البصريات وتطوره وفي اشتقاق معادلة شرودينغرSchrodinger . كما أن معادلة هاملتون– جاكوبي، وهي معادلة جزئية من الدرجة الأولى لاخطية، وثيقة الصلة بالمعادلات القانونية لِ هاملتون وأن نظرية جاكوبي تنص على أن حل الأولى يكافيء تماماً حل الثانية. تشكل معادلة هاملتون– جاكوبي بالإضافة إلى معادلات لاغرانج ومعادلات هاملتون القانونية اساساً لطريقة أخرى لمكاملة معادلات الحركة لمنظومة ميكانيكية، حيث نعلم أن مسألة ميكانيكية ما تُعتبر منتهية عندما نحصل على قانون حركتها، ويتم ذلك بحل المعادلات التفاضلية لهذه الحركة.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة معادلة هاملتون– جاكوبي انطلاقاً من معادلتي لاغرانج وهاملتون في نظرية الالكترون النسبي ومن ثم تطبيق هذه المعادلة على حالة الحركة الحرة لجسيم، الحركة الدائرية، اللاتغايرات الكظومة، مسألة كبلر ومن ثم تعيين مسار حركة الالكترون ثم طاقة وتواتر(تردد) الاهتزاز.

طرائق البحث ومواده:

لبحث معادلة هاملتون– جاكوبي في الحالة النسبية لابد من معرفة معادلتي لاغرانج وهاملتون في نظرية الالكترون النسبي:

معادلتا لاغرانج وهاملتون في نظرية الالكترون النسبي

تُعطى معادلة الحركة والطاقة للإلكترون في النظرية النسبية الخاصة بالشكل[1–3] :

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}=e(\vec{E}+\frac{1}{c}(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H})) \qquad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}=e(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{E}) \qquad (1.2)$$

علماً أن $\vec{\mathrm{v}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ السرعة ثلاثية الأبعاد للإلكترون. يمثل الطرف الأيمن من المعادلة (1.1) قوة لورنتز، أما الطرف الأيسر فيمثل العمل الميكانيكي الذي يقوم به الحقل الكهرومغنطيسي في أثناء حركة الشحنة خلال وحدة الزمن. وهذا العمل يقوم به الحقل الكهربائي فقط، أما الحقل المغنطيسي فلا يقوم بعمل ميكانيكي لكونه عمودياً على سرعة الحركة، حيث يُكسب الالكترون تسارعاً مركزياً فقط.

يجب أن يتم اختيار اللاغرانجيان بالشكل الذي يؤدي فيه مبدأ التغاير:

$$\delta S=\delta\int L dt=0 \qquad (1.3)$$

وبالتالي المعادلة:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\vec{\mathrm{v}}}-\frac{dL}{d\vec{r}}=0 \qquad (1.4)$$

إلى تحقق(1.1). ولهذا يجب اختيار تابع لاغرانج، كما جاء بالملحق، بالصيغة [4]:

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}-e(\phi-\frac{\vec{\mathrm{v}}}{c}\cdot\vec{A}) \qquad (1.5)$$

، (ϕ الكمون السُلّمي و $\dfrac{\vec{\mathrm{v}}}{c}=\vec{\beta}$)

وعندئذٍ يكون: $\dfrac{\partial L}{\partial\vec{r}}=\vec{\nabla}L=+e\vec{\nabla}((\vec{\beta}\cdot\vec{A})-\phi)$. فمن أجل الاندفاع ثلاثي الأبعاد يكون:

$$\vec{P}=\frac{dL}{d\vec{\mathrm{v}}}=\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\vec{A} \qquad (1.6)$$

بوضع(1.6) في(1.4) مع الأخذ بالحسبان أن:

$$\frac{d\vec{A}}{d\mathrm{t}}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\mathrm{t}}+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \qquad (1.7)$$

وأن:

$$\vec{\nabla}(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{A})=\vec{\nabla}_{\mathrm{v}}(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{A})+\vec{\nabla}_{\mathrm{A}}(\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}})=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathrm{v}}+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{v}})+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+\vec{\mathrm{v}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

وفرضنا $\vec{H}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ، [5] و $\vec{\mathrm{v}}=\overrightarrow{const}$. نجد: $\vec{\nabla}(\vec{\mathrm{v}}.\vec{A})-(\vec{\mathrm{v}}.\vec{\nabla})\vec{A}=\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}$.

بتطبيق: $\dfrac{d}{dt}\vec{P}=\dfrac{\partial L}{\partial\vec{r}}$ نحصل، وفق(1.6)على:

$$\frac{d}{dt}[\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}]=e\vec{\nabla}(\frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{A}-\phi)=\mathrm{e}[\frac{1}{c}(\vec{\mathrm{v}}\vec{\nabla})\vec{A}+\frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}-\vec{\nabla}\phi]$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}})=e[-\vec{\nabla}\phi+\frac{1}{c}(\vec{\mathrm{v}}\vec{\nabla})\vec{A}-\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}]=\mathrm{e}[-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}]$$

$$=e(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H})$$

وهي المعادلة (1.1) علماً أن: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. أما المعادلة(1.2) فهي تنتج بشكل مباشر من المعادلة(1.1) بضرب هذه المعادلة الأخيرة عددياً بـ $\vec{\mathrm{v}}$ مع الأخذ بالحسبان وبانتباه أن:

$$\vec{\mathrm{v}}\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.8)$$

(يمكن التأكد من ذلك بالاشتقاق بالنسبة للزمن وملاحظة أن كل من الطرفين يساوي: $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\mathrm{v}}\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$)

هذا ويمكن اعتبار:

$$E_{kin}=\frac{m_0\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.9)$$

الطاقة الحركية للإلكترون في الحالة النسبية. لنعين الآن تابع هاملتون، الذي يرتبط بتابع لاغرانج بالعلاقة الآتية:

$$H=(\vec{P}\cdot\vec{\mathrm{v}})\text{-L}=\frac{m_0\mathrm{v}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\vec{\mathrm{v}}+m_0\mathrm{c}^2\sqrt{1-\beta^2}+e\phi-\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}$$

$$=\frac{m_0\mathrm{c}^2(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2})+m_0\mathrm{v}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\phi=\frac{m_0\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\phi \qquad (1.10)$$

وبملاحظة أن:

$$\frac{m_0\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=c\sqrt{\frac{m_0^2\mathrm{v}^2}{1-\beta^2}+m_0^2\mathrm{c}^2} \qquad (1.11)$$

وبالأخذ بالحسبان (1.6)، يمكن معاودة كتابة الهاملتونيان(1.10) بالشكل الآتي:

$$H=c\sqrt{(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})+m_0^2\mathrm{c}^2}+e\phi \qquad (1.12)$$

وتحافظ المعادلات القانونية للهاملتونيان في نظرية النسبية الخاصة، على شكلها في الميكانيك اللانسبي. فمن معادلة لاغرانج(1.4) والعلاقة بين اللاغرانجيان والهاملتونيان (1.10)، تنتج المجموعة الأولى لمعادلات هاملتون القانونية $\dot{\vec{P}}=\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}$ ، أي:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{r}} \quad ، \quad (\dot{\vec{P}}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}) \qquad (1.13)$$

لنفاضل (1.12) بالنسبة لـ $\vec{P}$ ، ولنأخذ بالحسبان العلاقة(1.6)، فنحصل على المجموعة الثانية لمعادلات هاملتون القانونية، حيث $\dot{\vec{q}}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{P}}$ و

أي أن:

$$\frac{\partial H}{\partial\vec{P}}=\frac{c(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})}{\sqrt{(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2+m_0^2c^2}}=\frac{c(\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}})}{\sqrt{(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2+m_0^2c^2}}=\vec{\mathrm{v}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \qquad (1.14)$$

هذا وتسمح المعادلات القانونية لهاملتون بإيجاد التفاضل التام بالنسبة للزمن لبعض الدوال المتعلقة بالزمن والاحداثيات $\vec{q}$ والاندفاعات $\vec{P}$، حيث: $\vec{F} = F(t, \vec{r}, \vec{P})$ أي: $dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial \vec{r}}d\vec{r} + \frac{\partial F}{\partial \vec{P}}d\vec{P}$، وتبعاً لِـ (1.13) و (1.14) نكتب:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \vec{P}}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\frac{\partial H}{\partial \vec{P}} - \frac{\partial F}{\partial \vec{P}}\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

ومنه:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F] \qquad (1.15)$$

علماً أن:

$$[H, F] = \frac{\partial F}{\partial \vec{r}}\frac{\partial H}{\partial \vec{P}} - \frac{\partial F}{\partial \vec{P}}\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \qquad (1.16)$$

حيث $[H, F]$ أقواس بواسون التقليدية. هذا وتعد العبارة(1.15) الشكل الأعم لمعادلة هاملتون القانونية. لو استبدلنا F بالهاملتونيان H، لحصلنا على $[H, H]=0$، وبالتالي يكون: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. ومن هنا ينتج أنه إذا كانت $\vec{A}$ و $\vec{P}$ غير متعلقتين بالزمن، أي أن $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ (من(1.12))، فإننا نحصل على قانون انحفاظ تابع هاملتون، الذي نضعه مساوياً طاقة الالكترون:

$$H = E = const. \qquad (1.17)$$

2- معادلة هاملتون- جاكوبي في نظرية النسبية

عند استخراج معادلة هاملتون- جاكوبي[1،6-8]، لدراسة حركة ما، تعطى مسارات اختيارية كثيرة، لكن يجب أن يكون لإحداثيات هذه المسارات في بداية الزمن $t = 0$ وفي نهايته t قيماً معينة(الاحداثيات الابتدائية والنهائية يجب أن تكون محددة)، وبعدئذٍ يتم تحديد المسار الحقيقي، الذي يجب أن يوافق بدوره النهاية الدنيا لتابع الفعل(مبدأ الفعل الأصغري)[1، 2، 6]:

$$S = \int_0^t L dt \qquad (2.1)$$

وهذا الشرط يحقق معادلات لاغرانج(1.4). أما عند استخراج معادلة هاملتون–جاكوبي فعلى العكس، حيث يُعطى عندئذٍ أعداداً كبيرة من المسارات الحقيقية، التي تحقق تغاير معادلات لاغرانج (1.4). لكن بعد ذلك يتم اختيار المسارات التي تمر عبر نقطتين محددتين(نقطة البداية ونقطة النهاية) او التي تحقق شرطاً ابتدائياً محدداً(مبدأ الفعل الأصغري). ولذلك عند معالجة معادلة هاملتون–جاكوبي يجب اجراء تغاير الاحداثيات الابتدائية والنهائية، التي تعين ثوابت اختيارية. لن نتوقف عند هذا الموضوع فهو موضح بشكل تفصيلي في معظم الكتب التدريسية، التي تعالج الميكانيك التحليلي، ونكتفي بذكر النتائج البسيطة، التي تنتج عن استخدام معادلة هاملتون–جاكوبي المعممة لدراسة الحركة النسبية للإلكترون في الحقل الكهرومغنطيسي الكيفي(الاختياري). بأخذ التفاضل التام لتابع الفعل(2.1) بالنسبة للزمن مع الأخذ بالحسبان العلاقة بين تابعي لاغرانج وهاملتون(1.9)، نجد أن:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}S = L = (\vec{v}\vec{P}) - H \quad ; \quad S = S(t, \vec{r}) \qquad (2.2)$$

ومنه نجد علاقة كل من الاندفاع $\vec{P}$ والهاملتونيان H بتابع الفعل S كما يلي:

$$\vec{P} = \vec{\nabla} S \quad , \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{2.3}$$

بوضع القيمتين(2.3) في(1.12)، والتخلص من الجذر التربيعي، نجد معادلة هاملتون−جاكوبي في حالة الحركة النسبية[1]:

$$(-\frac{\partial S}{\partial t} - e\phi)^2 = c^2(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}) + m_0^2 c^4 \tag{2.4}$$

وبحل هذه المعادلة(2.4) يتم تعيين S كتابع للزمن t وللإحداثيات $\vec{r}(x,y,z)$ إضافة إلى ثلاثة ثوابت اختيارية (a_1,a_2,a_3)، حيث يمكن ربط هذه الثوابت مع القيم الابتدائية للإحداثيات $\vec{r}_0(x_0,y_0,z_0)$، ولتبسيط المسألة نكتفي بحالة بُعد واحد، حيث تُعطى عندئذٍ S كتابع لثلاث كميات:

$$S = S(x, x_0, t)$$

وبالتالي يمكن تعيين التغاير بسهولة $(t = const.)$:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x}\delta x + \frac{\partial S}{\partial x_0}\delta x_0 \tag{2.5}$$

ومن جهة أخرى يمكن تعيين تغاير S باستخدام العبارة(2.1)، والتي ينتج عنها:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta\int_0^t L(x,\dot{x})dt \\ &= \int_0^t (\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x})dt = \int_0^t \frac{\partial L}{\partial x}\delta x dt + \int_0^t P_x\,\delta\dot{x}dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

علماً أن: $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$. ونظراً لأن جميع المسارات تكون حقيقية في أثناء استخراج معادلة هاملتون− جاكوبي، أي تتحقق من أجلها جميعاً المعادلة(1.4)، فإنه بالإمكان معاودة كتابة العبارة الواقعة داخل التكامل(2.6) بالشكل:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + P_x\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(P_x\delta x)$$

وبأخذ ذلك بالحسبان نحصل من(2.6) على العبارة:

$$\delta S = P_x\delta x - P_{0x}\delta x_0 \tag{2.7}$$

($P_x\,\delta x$: الحد الأعلى و $P_{0x}\,\delta x_0$: الحد الأدنى). ومن مقارنة(2.5) مع (2.7)، نلاحظ أن:

$$P_x = \frac{\partial S}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$P_{0x} = -\frac{\partial S}{\partial x_0} = const. \tag{2.9}$$

هذا وتقود العبارة(2.8) من جديد إلى العلاقة بين الاندفاع وتابع الفعل(2.3). أما العبارة(2.9) فتؤدي إلى مايسمى بدعوى جاكوبي، التي يمكن تعميمها على حالة n درجة حرية. من دعوى جاكوبي ينتج أنه بتعيين تابع الفعل من معادلة هاملتون−جاكوبي (2.4) كتابع للزمن t وللإحداثيات x_n وللثوابت الاختيارية a_n (حيث n عدد درجات الحرية)، ومن ثم بحساب المشتقات الجزئية للتابع S بالنسبة للثوابت الاختيارية a_n، وبإجراء التساوي بين هذه المشتقات، والثوابت الاختيارية الأخرى b_n، نحصل على تكاملات الحركة:

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = b_n \qquad (2.10)$$

وتعد العبارة(2.10) بمثابة تعميم لـ (2.9) على حالة بعض الاحداثيات المستقلة. ويتم تعيين الثوابت a_n و b_n عملياً من الشروط الابتدائية. إذا كان ϕ و $\vec{A}$ غير تابعين للزمن، فإنه يجب أن يتحقق قانون انحفاظ الطاقة(1.17)، وعندئذٍ يمكن تعيين تابع الفعل وفقاً لـ (2,3)، بالشكل الآتي:

$$S = -Et + S_0(\vec{r}) \qquad (2.11)$$

وبوضع(2.11) في (2.4) نحصل على معادلة هاملتون−جاكوبي في الحالة المستقرة:

$$(-E - e\phi)^2 = c^2(\vec{\nabla} S_0 - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m_0^2 c^4 \qquad (2.12)$$

ويمكن ملاحظة أن مبرهنة جاكوبي (2.10)، تكون محققة في حالة التابع المستقر $S_0(\vec{r})$. عند الانتقال إلى التقريب اللانسبي، يجب اجراء التحويل التالي:

$$(-\frac{\partial S}{\partial t} - e\phi)^2 = m_0^2 c^4 (1 + \frac{(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{m_0^2 c^2})$$

$$(-\frac{\partial S}{\partial t} - e\phi) = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{m_0^2 c^2}}$$

$$\simeq m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2 m_0^2 c^2})$$

ومنه:

$$(-\frac{\partial S}{\partial t} - e\phi) \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A})^2$$

في الحالة اللانسبية يجب اسقاط الطاقة السكونية $m_0 c^2$ من الحسبان وبالتالي يكون لدينا في الحالة اللانسبية:

$$(-\frac{\partial S^{N.r}}{\partial t} - e\phi) \simeq \frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla} S^{N.r} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 \qquad (2.13)$$

(لنرمز بـ $N.r$ للحالة اللانسبية) وفي الحالة المستقرة نجد وفق(2.11):

$$E^{N.r} - e\phi \simeq \frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla} S_0^{N.r} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 \qquad (2.14)$$

3) حل بعض المسائل باستخدام معادلة هاملتون− جاكوبي

A) حالة الحركة الحرة:

عندما تكون الحركة حرة يكون:

$$\phi = A = 0 \qquad (3.1)$$

وبالتالي تأخذ معادلة هاملتون جاكوبي(2.4) الشكل الآتي:

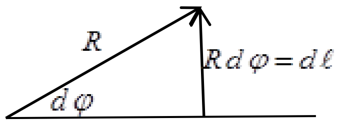
$$(\frac{\partial S}{\partial t})^2 = c^2(\vec{\nabla} S)^2 + m_0^2 c^4 \qquad (3.2)$$

وتتحقق هذه المعادلة في الواقع، عند افتراض أن تابع الفعل S من الشكل:

$$S=-Et+a_xX+a_yY+a_zZ \qquad (3.3)$$

حيث ترتبط الكميات الثابتة (الطاقة والمعاملات $a_x, a_y.a_z$) مع بعضها بالشكل:

$$(\frac{\partial S}{\partial t})^2=(-E)^2 \ ; \ (\vec{\nabla}S)^2=[(\nabla_x\vec{i}+\nabla_y\vec{j}+\nabla_z\vec{k})S]^2$$



$$(\vec{\nabla}S)^2=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

$$E^2=c^2(a_x^2+a_y^2+a_z^2)+m_0^2c^4$$

(3.4)

$$E=c\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2+m_0^2c^2}$$

يتضح من(3.3) أن المعاملات $a_x, a_y.a_z$ تساوي مركبات الاندفاع الموافقة:

$$P_x=\frac{\partial S}{\partial x}=a_x,\cdots \quad , \qquad (3.5)$$

والتي تبقى بدورها في حالة الحركة الحرة ثوابت. تبيِّن العبارة (3.4) العلاقة الشهيرة، التي تربط الطاقة E بالاندفاع $a_i=P_i$ ($i=x,y,z$):

$$E=c\sqrt{P^2+m_0^2c^4} \qquad (3.6)$$

ومن(3.3) و (3.4)، وباستخدام مبرهنة جاكوبي(2.10)، يمكن الحصول على المعادلة الاتية للحركة:

$\frac{\partial S}{\partial a_x}=-\frac{\partial S}{\partial a_x}t+x$ و $\mathrm{b}_x=\frac{\partial S}{\partial a_x}$ (وفق(2.10))، أي أن: $\mathrm{b}_x=x-\frac{\partial E}{\partial a_x}t$ ، لكن:

وبالتالي نجد أخيراً أن:

$$x=\frac{c^2a_x}{E}t+\mathrm{b}_x,... \qquad (3.7)$$

$$\vec{r}=\frac{c^2}{E}\vec{a}\ t+\vec{b} \qquad (3.8)$$

حيث يمثل المقدار المتجه $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$ الاحداثيات الابتدائية. أما المقدار المتجه $\frac{c^2}{E}\vec{a}=\vec{\mathrm{v}}$ فهو السرعة الابتدائية $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$ وبالتالي نعاود كتابة (3.8) بالشكل:

$$\vec{r}=\vec{\mathrm{v}}t+\vec{r}_0 \qquad (3.9)$$

B) الحركة الدائرية:

نقتصر هنا على معالجة هذه المسالة هنا في التقريب اللانسبي. لنضع $\phi=A=0$ ، ولنفترض أن نصف قطر

الدوران ثابتاً $R=const.$ ، وزاوية الدوران $d\varphi$ صغيرة. عندئذٍ تؤول المعادلة(2.14) إلى الشكل الآتي:

$$E^{N.r}=\frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla}S_0^{N.r})^2$$

$$E^{N.r}=\frac{1}{2m_0R^2}(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi})^2 \qquad (3.10)$$

من هنا نجد أن: $\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = P_\varphi = a$ أو $S_0 = a\ \varphi$. فإذا أخذنا بالحسبان أن $P_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = a$ ، فإن هذا الثابت a يلعب دور الاندفاع، وكما يتضح لنا من(3.10) فهو مرتبط مع الطاقة E :

$$E = \frac{a^2}{2m_0 R^2} \tag{3.11}$$

ويكون تابع الفعل الكلي($S = -Et + S_0(\vec{r})$ حيث $S_0(\vec{r}) = a\ \varphi$) مساوياً(وفق(2.11)) إلى:

$$S = -\frac{a^2}{2m_0 R^2} t + a\varphi \tag{3.12}$$

وبحساب التفاضل الجزئي لهذه العبارة بالنسبة لـ a، ومن ثم إقامة التساوي بين المقدار الحاصل وبين ثابت جديد φ_0، (مبرهنة جاكوبي(2.10))، نجد معادلة الحركة:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -\frac{a}{m_0 R^2} t + \varphi \quad , \quad -\frac{a}{m_0 R^2} t + \varphi = \varphi_0$$

وبالتالي:

$$\varphi = \frac{a}{m_0 R^2} t + \varphi_0 \tag{3.13}$$

وبدون تجاوز ماهو عام، يمكن وضع الزاوية الابتدائية $\varphi_0 = 0$ ، ووضع $\frac{a}{mR^2} = \omega$، والتي هي السرعة الزاوية. عندئذٍ يكون الوضع كما هو متوقع، دوران منتظم في دائرة بدور ثابت، يساوي:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m R^2}{a} \tag{3.14}$$

وعندئذٍ يمكن صياغة الطاقة E والاندفاع P، والدور T وفق العلاقات:

$$E = \frac{a^2}{2m_0 R^2} = \frac{2\pi^2 m_0 R^2}{T^2}$$ ، (وفق (3.11) و (3.14))

$$\mathrm{v} = R\omega = \frac{2\pi R}{T} \quad , \quad P_\varphi = a = \frac{2\pi m_0 R^2}{T} \tag{3.15}$$ ، (وفق(3.14)).

C) اللاتغايرات الكظومة

لنبرهن دعوى إرنفست EHRENFEST في التحولات الكظومة وذلك بمثال وهو الحركة الدائرية للنقطة المادية. لنفترض أن نصف قطر الدائرة التي يتحرك عليها الجسيم يزداد ببطء(تحول كظوم).وفق العلاقة $R = R_0 + bt$ ، حيث نفترض للتبسيط أن التغير يحدث وفق قانون خطي. ويعني التغير الكظوم أن تزايد نصف القطر خلال دور واحد($t = T$)، أصغر بكثير من القيمة الابتدائية، أي أن:

$$bT << R_0 \tag{3.16}$$

لنتساءل الآن أي الكميات تبقى عندئذٍ دون تغير؟ عند دوران الجسم يؤثر عليه قوة طرد مركزي تساوي:

$$F = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{m_0}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2} \tag{3.17}$$

وعندما $R = const,$ يؤول عمل القوة (3.17) إلى الصفر(لأن القوة تكون عمودية على الانزياح). أما إذا كان نصف القطر يزداد ببطء، فإن العمل المذكور يغدو عندئذٍ مختلفاً عن الصفر:

$$dW = \frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2} dR \tag{3.18}$$

ويتم هذا العمل على حساب طاقة الجسيم، حيث تتناقص عندئذٍ:

$$dE = -dW = -\frac{4\pi^2 m_0 R}{T^2} dR \tag{3.19}$$

وبتقسيم هذه المساواة الأخيرة على طاقة الجسيم المعينة في(3.15)، نحصل على:

$$\frac{dE}{E} = -2\frac{dR}{R} \tag{3.20}$$

وبالمكاملة نجد: $\ln E + 2\ln R = C_1$ أو $E.R^2 = e^{C_1} = C$. ومن ذلك نلاحظ أن:

$$E.R^2 = const. \tag{3.21}$$

وبالتعويض عن R^2 بقيمته بدلالة T و E (العلاقة(3.15))، نجد أنه في أثناء التغيرات الكظومة لنصف القطر، يبقى جداء الطاقة E في الدور T كمية ثابتة:

$$R^2 = \frac{ET^2}{2\pi^2 m_0} \qquad \Rightarrow \qquad ER^2 = \frac{E^2T^2}{2\pi^2 m_0} = const.$$

$$\Rightarrow \qquad ET = const. \tag{3.22}$$

ويبدو بوضح من(3.15)، أن هذا الجداء يساوي:

$$\begin{aligned} 2ET &= \frac{4\pi^2 m_0 R^2}{T} = \frac{2\pi m_0 R^2}{T} 2\pi \\ &= P_\varphi \cdot 2\pi = \oint P_\varphi d\varphi = const. \end{aligned} \tag{3.23}$$

علماً أن التكامل المغلق يشمل كامل دور تغير الاحداثي φ، أي أنه يحسب من القيمة صفر إلى القيمة 2π، ونظراً لكون P_φ في الحالة الراهنة ثابتة $(P_\varphi = a)$، فإنه يمكن كتابة العبارة (3.23) بالشكل الآتي:

$$P_\varphi \cdot 2\pi = const. \tag{3.24}$$

تسمى العبارة (3.24) مبرهنة (دعوى) إرنفست، والتي تنص على أن اللاتغايرات الكظومة المأخوذة على كامل دور الاحداثي q_i عند التغير الكظوم لبارامترات(معلمات) الحركة الدورانية في حالة وجود درجة حرية واحدة، أو بعض درجات الحرية على كامل دور الاحداثي q_i تبقى ثابتة:

$$I_i = \oint P_i \; dq_i = const. \tag{3.25}$$

وبالإمكان صياغة الطاقة بدلالة اللاتغاير الكظوم كما يلي:

$$E = E(I_1, I_2, \cdots) \tag{3.26}$$

عندئذٍ بأخذ التفاضل الجزئي لـ E بدلالة أي تغاير كظوم، نحصل على تواتر الاهتزاز الموافق:

$$\frac{\partial E}{\partial I_i} = \nu_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \tag{3.27}$$

ففي حالة الحركة الدائرية، ترتبط الطاقة مع التغاير الكظوم بالشكل، (وفق(3.15)):

$$I = 2\pi P_\varphi = \frac{4\pi^2 m_0 R^2}{T} = 2ET \tag{3.28}$$

$$\Rightarrow E=\frac{I}{2T}=\frac{IP_\varphi}{2\cdot 2\pi m_0R^2}=\frac{I.I}{2\pi.4\pi m_0R^2}$$

$$E=\frac{I^2}{8\pi^2m_0R^2} \tag{3.29}$$

وبالتالي نجد من أجل تواتر الاهتزاز القيمة، (وفق(3.28)):

$$\nu=\frac{\partial E}{\partial I}=\frac{I}{4\pi^2m_0R^2}=\frac{4\pi^2m_0R^2}{T.4\pi^2m_0R^2}=\frac{1}{T} \tag{3.30}$$

D) مسألة كبلر(النظرية التقليدية النسبية للذرات المشابهة لذرة الهيدروجين)

لنفترض أن الالكترون يتحرك حول النواة تحت تأثير(فعل) التجاذب الكولوني. ولنرمز لشحنته بالرمز $e=e_0$، ولشحنة النواة $e=ze_0$، حيث z العدد الذري للنواة. عندئذٍ تكون الطاقة الكامنة مساوية:

$$e\phi=-\frac{ze_0^2}{r} \tag{3.31}$$

ونظراً لكون الطاقة الكامنة لاتتعلق بالزمن(كما تبين العلاقة(1.17)) فإن الجملة الراهنة تكون محافظة، وبالتالي فإن الهاملتوني يكون مساوياً كمية ثابتة، ويساوي طاقة الجسيم E. عند حل المسالة الراهنة يمكن استخدام المعادلات(2.3) واضعين فيها $\vec{A}=0$. لنأخذ بالحسبان أن الحركة في حقل القوى المركزية تكون حركة مستوية، حيث يمكن عندئذٍ كتابة عبارة مربع الاندفاع في الاحداثيات القطبية (r,φ) بالشكل:

$$(\vec{\nabla}S_0)^2=(\frac{\partial S_0}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi})^2 \tag{3.32}$$

حيث لدينا من العلاقة(2.3) $\vec{P}=\vec{\nabla}S_0$. ونظراً لأن الإحداثي φ لايدخل في عبارة الطاقة الكامنة، فإنه بالإمكان البحث عن حل المعادلة(3.32) بالصيغة التالية:

$$S_0=f(r)+a\varphi \tag{3.33}$$

علماً أن a كمية ما ثابتة (حيث $\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}=a$ من الفقرة B السابقة) وتساوي الاندفاع:

$$P_4=\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}=a=const. \tag{3.34}$$

أما التابع $f(r)$ ، التابع لنصف القطر r ، فيمكن تعيينه من المعادلتين:(2.12) و(3.32) كما يلي: فمن العلاقة(2.12) نجد: $(E-e\phi)^2=c^2(\nabla S_0)^2+m_0^2c^4$ ومن(3.31) لدينا:

$(E+\frac{ze_0^2}{r})^2-m_0^2c^4=c^2(\vec{\nabla}S_0)^2$ وبالتالي نجد: $(\vec{\nabla}S_0)^2=\frac{1}{c^2}(E+\frac{ze_0^2}{r})^2-m_0^2c^4$.

نساوي بين $\vec{\nabla}S_0$ المحسوبة لدينا مع مثيلتها من العلاقة (3.32) فنجد:

$$\vec{\nabla}S_0=\sqrt{(\frac{\partial S_0}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi})^2}$$

ينتج أن:

$$\frac{1}{c}\sqrt{(E+\frac{ze_0^2}{r})^2-m_0^2c^4}=\sqrt{(\frac{\partial S_0}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi})^2}$$

ومن(3.33) نجد: $\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}=a$ ، $\frac{\partial S_0}{\partial r}=\frac{\partial f(r)}{\partial r}$ ، أي أن: $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial r})^2+\frac{a^2}{r^2}}=\frac{1}{c}\sqrt{(E+\frac{ze_0^2}{r})^2-m_0^2c^4}$

ونكتب هذه العلاقة بالشكل: $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial r})^2+\frac{a^2}{r^2}}=\sqrt{-A+\frac{2B}{r}+\frac{z^2e_0^4}{c^2r^2}}$ حيث:

$C=a^2-\frac{z^2e_0^4}{c^2}$, $B=\frac{Eze_0^2}{c^2}$, $A=\frac{m_0^2c^4-E^2}{c^2}$. ومنه: $(\frac{\partial f}{\partial r})^2=-A+\frac{2B}{r}+\frac{z^2e_0^4}{c^2r^2}-\frac{a^2}{r^2}$

أو: $\frac{\partial f}{\partial r}=\sqrt{-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}}$ وبالمكاملة نجد:

$$f(r)=\int(\sqrt{-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}})\,dr \qquad (3.35)$$

علماً أن:

$$A=\frac{m_0^2c^4-E^2}{c^2}\ ,\ B=\frac{Eze_0^2}{c^2}\ ,\ C=a^2-\frac{z^2e_0^4}{c^2} \qquad (3.36)$$

ونظراً لكون التكامل(3.35) غير محدود، فإنه بالإمكان اختيار ثابت المكاملة مساوياً الصفر. وحتى يكون تابع الفعل حقيقياً، يجب أن يكون مجال تغيرات r بالشكل الذي يكون فيه المقدار الموجود تحت الجذر التربيعي في(3.35) موجباً، أي يجب أن يكون:

$$-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}\geq 0 \qquad (3.37)$$

يتضح من ذلك أن الكمية r تكون محدودة في نهايتيها الحدوديتين، إذا كانت قيم الكميات A و B و C موجبة. فمن(3.36) نجد أن $A>0$ و $C>0$ عندما:

$$|E|<m_0c^2\ ,\ \frac{ze_0^2}{c}<a=P_\varphi \qquad (3.38)$$

ونظراً لكون الكمية B موجبة دائماً، فإن حدي تغيرات r هما جذرا المعادلة(3.37)، أي:

$$r_{1,2}=\frac{B}{A}\pm\sqrt{\frac{B^2}{A^2}-\frac{C}{A}} \qquad (3.39)$$

وحتى يكون الجذران حقيقيان وموجبان، يجب أن يتحقق زيادة على الشرطين $A>0$ و $C>0$ أن:

$$B^2>AC \qquad (3.40)$$

E) تعيين مسار الحركة،[9،2]

حتى نعين مسار الحركة نقوم أولاً ووفاقاً لمبرهنة جاكوبي بمفاضلة تابع الفعل(3.33) بالنسبة للثابت a، ومن ثم نضع الناتج مساوياً لثابت آخر، فنجد أن: $S_0=a\varphi+f(r)$ ومنه: $\frac{\partial S_0}{\partial a}=\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial a}$، ومن(3.35) نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\int(\frac{1}{r^2}\frac{\partial C}{\partial a}\frac{1}{2\sqrt{-A^2+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}}})dr$$

لنأخذ بالحسبان أن: $\frac{\partial}{\partial a}C=\frac{\partial}{\partial a}(a^2-\frac{z^2e_0^4}{c^2})=2a$ أو: $\frac{\partial f}{\partial a}=-a\int(\frac{dr}{r^2\sqrt{-A^2+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}}})$ نجد:

$$\frac{\partial S_0}{\partial a}=\varphi-a\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2\sqrt{-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}}}=\varphi_0 \qquad (3.41)$$

حيث يعين الثابت φ_0 القيمة الابتدائية لـ φ، ولذلك لانقلل من عمومية النتائج فيما لو وضعنا هذا الثابت مساوياً $-\dfrac{\pi}{\gamma}$ وقد وضعنا الحد الأدنى لِ r أثناء المكاملة r_1 ، وبالإمكان كتابة العبارة الموجودة تحت الجذر التربيعي $(r_2 \ge r \ge r_1)$ بالشكل الآتي:

$$-A+\frac{2B}{r}-\frac{C}{r^2}=[\frac{B^2-AC}{C^2}-(\frac{1}{r}-\frac{B}{C})^2]$$

وبمكاملة(3.41) مع الأخذ بالحسبان أن: $-A+\dfrac{2B}{r}-\dfrac{C}{r^2}=C(\dfrac{B^2-AC}{C^2}-(\dfrac{1}{r}-\dfrac{B}{C})^2)=0$

ومنه: $\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{\sqrt{B^2-AC}}{C}$. يمكن بسهولة الحصول على معادلة المسار في الاحداثيات القطبية، بالشكل الآتي: $\dfrac{1}{r}-\dfrac{B}{C}=x$، أي $\dfrac{1}{r}=x+\dfrac{B}{C}$، فنجد $-\dfrac{dr}{r^2}=dx$، وبالتالي:

$$\frac{\partial S_0}{\partial a}=\varphi-\frac{a}{\sqrt{C}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{D^2-x^2}}=\varphi_0 \quad \text{حيث:} \quad D^2=\frac{B^2-AC}{C^2}=\frac{B^2}{C^2}(1-\frac{AC}{B^2})$$

أي $D=\dfrac{B}{C}\sqrt{1-\dfrac{AC}{B^2}}$ و $\underbrace{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{B}{C}}_{x_1}=\sqrt{\dfrac{B^2-AC}{C^2}}$ ومنه: $x_1=\dfrac{B}{C}\sqrt{1-\dfrac{AC}{B^2}}$

و $x_2=\dfrac{1}{r}-\dfrac{B}{C}$ وبالتالي: $\varphi-\varphi_0=\dfrac{a}{\sqrt{C}}\displaystyle\int_{\frac{B}{C}\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}}^{\frac{1}{r}-\frac{B}{C}}\frac{dx}{r^2\sqrt{D^2-A^2}}$ وحيث: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$

$(x^2<a^2)$ نجد: $\varphi-\varphi_0=\dfrac{a}{\sqrt{C}}\arcsin\dfrac{x}{D}\Big|_{(\frac{B}{C}\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}})}^{(\frac{1}{r}-\frac{B}{C})}$. يمكن اختيار الثابت φ_0 بالشكل الذي يكون فيه مساوياً $-\dfrac{\pi}{\gamma}$، أي نضع $(\varphi_0=-\dfrac{\pi}{\gamma})$:

$$-\frac{\sqrt{C}}{a}(\varphi+\frac{\pi}{\gamma})=\arcsin\frac{(\frac{1}{r}-\frac{B}{C})}{\frac{B}{C}\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}}-\arcsin 1$$

أو: $-\dfrac{\sqrt{C}}{\gamma a}(\gamma\varphi+\pi)=\arcsin\dfrac{\frac{1}{r}-\frac{B}{C}}{\frac{B}{C}\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}}-\arcsin 1$. باختيار $\gamma=\dfrac{\sqrt{C}}{a}$. ومن جهة أخرى $\arcsin 1=\pi/2$، نجد أن:

$$\sin(-(\gamma\varphi+\frac{\pi}{2}))=\frac{(\frac{1}{r}-\frac{B}{C})}{\frac{B}{C}\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}} \quad \text{وبالتالي:} \quad \frac{1}{r}=\frac{B}{C}[1-\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}\sin(\gamma\varphi+\frac{\pi}{2})]$$

أو: $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{P}[1-e\sin(\gamma\varphi+\dfrac{\pi}{2})]$ أي:

$$r=\frac{P}{1-e\sin(\gamma\varphi+\frac{\pi}{2})}=\frac{P}{1-e\cos\gamma\varphi} \qquad (3.42)$$

علماً أن: $e=\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}}$, $P=\frac{C}{B}$ ومن(3.36) نجد:

$$\gamma=\frac{\sqrt{C}}{a}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{z^2e_0^4}{c^2}}}{a}=\sqrt{1-\frac{z^2e_0^4}{a^2c^2}} \qquad (3.43)$$

في التقريب اللانسبي($c\to\infty$ سرعة الضوء) نحصل على مدار اهليلجي(قطع ناقص $\gamma=1$):

$$r=\frac{P_0}{1-e_0\cos\varphi} \qquad (3.44)$$

وبالتالي نلاحظ أن أخذ المفاعيل النسبية لايؤثر إلاَّ ببعض التغيير في المَعلَمين(البارامترين) P و e (الاختلاف أو التباين المركزي). وأن ظهور المضروب γ ، عندما يختلف عن الواحد، يغير من حيث المبدأ خواص المسار. فإذا كانت القيمة العظمى الأولى لـ r (الحضيض) تحصل عند الزاوية $\varphi=0$ ، يكون:

$$r_{\max}=\frac{P}{1-e} \qquad (3.45)$$

أما القيمة الثانية(التالية) لـ $r_{\max}$ ، فلا تكون عند القيمة الموافقة $\varphi=2\pi$. بل عند القيمة الموافقة: $r=\frac{P}{1-e\cos\gamma\varphi}$ (حسب(3.43)). تكون r أعظم مايمكن أولاً عندما $\varphi=0$ ونظراً لأن $\gamma\neq 0$ ، تكون r أعظم مايمكن ثانياً عندما $\gamma\varphi\approx 2\pi$ أو:

$\varphi=\frac{2\pi}{\gamma}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{z^2e_0^4}{a^2c^2}}}$ (وفق(3.43)) وبما أن $1>>\frac{z^2e_0^4}{a^2c^2}$ نجد:

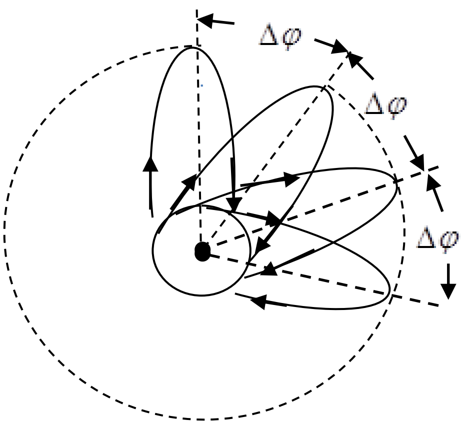
$$\varphi=\frac{2\pi}{\gamma}=2\pi\left(1-\frac{z^2e_0^4}{a^2c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 2\pi\left(1+\frac{z^2e_0^4}{2a^2c^2}\right) \qquad (3.46)$$

أي أن الاهليلج الذي يقع بين الدائرتين اللتين نصفي قطريهما $r_{\max}$ و $r_{\min}$ ، حيث

$$r_{\min}=\frac{P}{1+e} \qquad (3.47)$$

يبدأ بالدوران(وردة سمرفيلد). وتكون زاوية التفاف الحضيض عند دورة(لفة) واحدة في الاهليلج مساوية- كما يتبين من(3.46)- القيمة:

$$\Delta\varphi=\pi(z^2e_0^2/a^2c^2) \qquad (3.48)$$



مسار وردة سمرفيلد

تذكرنا هذه الظاهرة بظاهرة دوران حضيض كوكب عطارد حول الشمس، عندما تتم دراسته من منظور النظرية النسبية العامة، وليس من منظور ميكانيك نيوتن. بهذا الشكل تكون تواترات دوران الزاوية φ ونصف القطر r مختلفان. ونظراً لأن هذه التواترات لاتقاس(غير قابلة للقياس) بشكل عام. فإنه يقال عنه شرطياً بأنه دوران دوري، ويتحرك الالكترون في هذه الحالة في مسار غير مغلق، حيث يمر مع مرور الزمن بالقرب من كل نقطة من النقاط الواقعة بين الدائرتين اللتين نصفي قطريهما

معيناً بالعبارتين(3.45) و(3.47)، أما إذا كان تواتر دوران نصف

القطر r والزاوية φ واحداً(متساوياً)– على سبيل المثال في الحالة غير النسبية– عندئذٍ يؤول المسار إلى اهليلج(قطع ناقص)، وتصبح عندئذٍ الحركة دورية.

F) طاقة وتواتر الاهتزاز

حتى يتم تعيين الطاقة يجب اولاً تعيين اللاتغاير الكظوم. لنأخذ بالحسبان أن $P_\varphi = const.$ (وذلك من جمع العلاقتين(3.24) و(3.34))، فنجد: $P_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = a$ (وفق(3.33))، وبالتالي نحصل، حسب(3.25)على:

$$I_\varphi = \oint P_\varphi d\varphi = a\varphi \tag{3.49}$$

وبالشكل نفسه نكتب من أجل اللاتغاير الكظوم الثاني(الآخر):

$$I_r = \oint P_r dr \tag{3.50}$$

علماً أن P_r يعين وفاقاً لـ (3.35) و (3.36) بالشكل:

$$P_r = \frac{\partial S_0}{\partial r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} \tag{3.51}$$

، (وفق(3.33) و (3.35))

حيث يعني التكامل المغلق $\oint$ أنه يجب حسابه من r_1 إلى r_2 بإشارة زائد(+) أمام الجذر $(P_r > 0)$ ومن r_2 إلى r_1 بإشارة ناقص(−) أمام الجذر $(P_r < 0)$، أي أنه بجمع(3.50) و(3.51) نحصل:

$$I_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}\, dr \tag{3.52}$$

علماً أن r_1 و $r_2 > r_1$ هما كما أشرنا سابقاً جذرا المعادلة:

$$-A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} = 0 \tag{3.53}$$

وبالإمكان بسهولة حساب هذا التكامل: فلدينا $r_{2,1} = \frac{B}{A}[1 \pm \sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}}]$ و

$I_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{-Ar^2 + 2Br - C}}{r} dr$. حسب[10]، (ص97، علاقة2.267)، لدينا:

$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \underbrace{X^{\frac{1}{2}}}_{I} + \frac{b}{2} \underbrace{\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}}_{II} + c \underbrace{\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}}_{III}$، حيث: $a \to -A \ ,\ b \to 2B \ ,\ c \to -C$ وبالتالي

$X = ax^2 + bx + c = -Ar^2 + 2Br - C$ وبإجراء الحسابات اللازمة نجد أن الحد الأول من التكامل السابق، أي $I = X^{\frac{1}{2}} = 0$ بعد تعويض حدي التكامل r_1 و r_2. والتكامل الثاني:

$II = -\frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{2B - 2Ar}{\sqrt{4B^2 - 4AC}} \Bigg|_{\frac{B}{A}(1-\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}})}^{\frac{B}{A}(1+\sqrt{1-\frac{AC}{B^2}})}$، حسب[10]،(ص94،علاقة(128) 2.261, TI)،

وبتعويض حدي التكامل نجد: $II = \frac{\pi}{\sqrt{A}}$. أما التكامل الثالث: $III = \frac{1}{\sqrt{C}} \arcsin \frac{r - \frac{C}{B}}{|r|\sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}}}$.

وبتعويض حدي التكامل نجد: $III = \frac{\pi}{\sqrt{C}}$. بالتعويض في علاقة I_r نجد:

$$I_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{-Ar^2 + 2Br - C}}{r} dr$$
$$= 0 + 2\pi \frac{B}{\sqrt{A}} - 2\pi\sqrt{C} = 2\pi(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}) \qquad (3.54)$$

وبوضع قيم الثوابت A ,B ,C المعطاة في(3.36) هنا وتعيين الطاقة E بدلالة اللامتغيرين الكظومين (I_r, I_φ) نحصل من جمع العلاقتين(3.25) و (3.34) على $I_\varphi = 2\pi a$، ومن (3.54) أي $I_r = 2\pi[\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}]$ ووفق(3.36) نجد: $I_r = \frac{2\pi}{c}[\frac{Eze_0^2}{\sqrt{m_0^2c^4 - E^2}} - \sqrt{a^2c^2 - z^2e_0^4}]$ أو:

$$c^2[\underbrace{\frac{I_r}{2\pi} + \sqrt{a^2 - \frac{z^2e_0^4}{c^2}}}_{\gamma^2}]^2 = \frac{z^2e_0^4E^2}{m_0^2c^4 - E^2}$$ وبالتالي $$E^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 + \frac{z^2e_0^4}{c^2\gamma^2}}$$

وبتعويض γومن ثم $a = \frac{I_\varphi}{2\pi}$ نحصل على:

$$E = m_0c^2\{1 + \frac{z^2e_0^4}{c^2[\frac{I_r}{2\pi} + \sqrt{(\frac{I_\varphi}{2\pi})^2 - \frac{z^2e_0^4}{c^2}}]^2}\}^{-1/2} \qquad (3.55)$$

وبحساب المشتق بالنسبة لِ I_r و I_φ نحصل على تواترات الاهتزازات الموافقة(3.27). تقع العبارة(3.55) في أساس النظرية النسبية لذرة الهيدروجين في النظرية نصف التقليدية لبور، حيث يجب عندئذٍ أن نضع اللامتغيرين الكظومين بالشكل:

$$I_r = 2\pi\hbar n_r \quad ، \quad I_\varphi = 2\pi\hbar n_\varphi \qquad (3.56)$$

و $n_\varphi = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ، $n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ هما العددان الكميان: السمتي والقطري. بوضع(3.56) في (3.55)، واجراء نشر بسيط، نلاحظ أن: $E \approx m_0c^2\{1 - \frac{z^2e_0^4}{2c^2[\frac{I_r}{2\pi} + \sqrt{(\frac{I_\varphi}{2\pi})^2 - \frac{z^2e_0^4}{c^2}}]^2}\}$ ومنه نجد:

$$E - m_0c^2 = -\frac{m_0z^2e_0^4}{2\hbar^2n^2} \frac{1}{(1 - \frac{z^2e_0^4}{2\hbar nn_\varphi c^2})^2}$$ حيث $n = n_r + n_\varphi = 1, 2, \ldots$ علماً أن n عدد موجب وصحيح ويسمى العدد الكمومي الرئيسي. اعتماداً على التقريب $(1-x)^{-2} \approx 1 - 2x$ نجد:

$$E_{n,n_\varphi} = E - m_0c^2 \approx -\frac{m_0z^2e_0^4}{2\hbar^2n^2}[1 + \frac{z^2e_0^4}{c^2\hbar^2n^2}(\frac{n}{n_\varphi})] \qquad (3.57)$$

النتائج والمناقشة

حصلنا من خلال بحثنا هذا انطلاقاً من معادلتي لاغرانج وهاملتون في نظرية الإلكترون النسبي، على تابع هاملتون في الحالة النسبية وعلى المجموعتين الأولى والثانية لمعادلات هاملتون القانونية وبالتالي إلى انحفاظ تابع هاملتون الذي يساوي طاقة الالكترون. استنتجنا بعد ذلك معادلة هاملتون– جاكوبي في الحالة اللانسبية والمستقرة. توصلنا أيضاً من خلال استخدامنا لمعادلة هاملتون–جاكوبي إلى الحصول على معادلة الحركة للجسيم الحر، وصغنا عبارات الطاقة والاندفاع والدور للحركة الدائرية ثم أثبتنا دعوى إرنفست في التحولات الكظومة وبحثنا مسألة كبلر ثم عيّنا مسار حركة الالكترون وطاقة وتواتر الاهتزاز. لقد ناقشنا كل هذه النتائج بشكل مفصّل في متن المقالة وبالعلاقات الرياضية المناسبة التي استنتجناها بشكل متسلسل وواضح.

الاستنتاجات والتوصيات

تُعد هذه الورقة البحثية بمثابة مدخل لمعالجة بعض مسائل نظرية الاشعاع الكهرومغنطيسي بشكل متطور ودراسة حركة الالكترون النسبي واشعاع تشيرنكوف Cherenkov effect(اشعاع كهرومغنطيسي ينبعث عندما يمر جسيم مشحون في وسط عازل بسرعة طور تفوق سرعة الضوء في نفس الوسط) والاشعاع المتزامن(السنكروتروني) Synchronization Radiation(إشعاع كهرومغنطيسي ينتج عند تسريع الجسيمات المشحونة إلى سرعات قريبة من سرعة الضوء) والنظرية الكمومية النسبوية، حيث تكون هذه الدراسة مؤسسة على معادلة هاملتون– جاكوبي حيث تكون هذه الدراسة مؤسسة على معادلة هاملتون– جاكوبي للانتقال من الميكانيك الكلاسيكي إلى الميكانيك الكمومي.

ملحق:

يتلخص مضمون مبدأ الفعل الأصغري في الميكانيك الكلاسيكي في أنه: يتحقق من أجل جملة ميكانيكية، تكاملاً S، يُسمى الفعل، ويكون له في حالة أي حركة حقيقية قيمة صغرى(أصغرية)، وتبعاً لذلك يكون التغير δS مساوياً الصفر [*]. يتألف الفعل للجسيم المتحرك في حقل كهرومغنطيسي معين من جزأين: الفعل الموافق للجسيم الحر، وحد ثان يعين الفعل المتبادل بين هذا الجسيم والحقل. وهذا الحد الأخير يجب أن يحتوي على الكميات التي تصف الجسيم والكميات التي تصف الحقل. إن خواص الجسيم بالنسبة إلى فعله المتبادل مع الحقل الكهرومغنطيسي، تتعين بمتحول واحد، يُسمى شحنة الجسيم، التي يمكن أن تكون كمية موجبة أو سالبة(أو مساوية الصفر). أما خواص الحقل فتُعيَّن بمتجهة رباعية الأبعاد A_i، تُسمى الكمون رباعي الأبعاد، الذي تكون مركباته توابع للإحداثيات والزمن. وتدخل هاتين الكميتين في الفعل S على شاكلة الحد: $-\frac{e}{c}\int_a^b A_i\ dx^i$ حيث أن المكاملة تكون على طول الخط العالمي (world line) بين حدثين مُعينيّن a و b، وهما وجود(وقوع) الجسيم في الموضعين الابتدائي والنهائي في اللحظتين المعينتين t_1و t_2، أي بين نقطتين عالميتين معينتين. علماً أنه يتم حساب(أخذ) التابع A_i على نقاط الخط العالمي للشحنة. أما المضروب $\frac{1}{c}$ فيتم استخدامه للملائمة. ومن الملاحظ أنه طالما لم نعتمد بعد أي علاقة تربط الشحنة أو الكمون مع كميات معلومة لدينا سابقاً، يكون من الممكن اختيار وحدات قياسهما(الشحنة والكمون) بشكل اختياري. يتضح من ذلك أن الفعل للشحنة في الحقل الكهرومغنطيسي يأخذ الشكل: $S=\int_a^b(-m_0cds-\frac{e}{c}A_idx^i)$ حيث

يمثل التكامل $(-m_0c\int_a^b ds)$ الفعل من أجل الجسيم المادي الحر والحد ds الفاصل التفاضلي في الفضاء الاقليدي الرباعي وهو مقدار سُلَّمي، كما أن $x^i=(ct,\vec{r})$ و $x_i=(ct,-\vec{r})$. أي أن المقدار الموجود تحت رمز التكامل، في علاقة S السابقة، مقدار تفاضلي من المرتبة الأولى. وتشكل المركبات الفراغية الثلاث للمتجهة A^i، المتجهة ثلاثية الأبعاد $\vec{A}$، التي تسمى الكمون المتجه للحقل، أما المركبة الزمنية فتسمى بالكمون السُلمي، ويُرمز لها بالرمز $A^0=\phi$، وبهذا الشكل يكون: $A^i=(\phi,\vec{A})$ وبالتالي يصاغ تكامل الفعل بالشكل:

$S=\int_a^b(-m_0cds-\frac{e}{c}\vec{A}\cdot d\vec{r}-e\phi dt)$ أو باستخدام سرعة الجسيم $\vec{\mathrm{v}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ نجد:

$S=\int_a^b(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}-e\phi)dt$. نلاحظ أن المقدار الموجود داخل التكامل هو تابع لاغرانج للشحنة الموجودة في الحقل الكهرومغنطيسي: $L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}-e\phi$ حيث $ds=\sqrt{c^2dt^2-dL^2}$. لاتختلف عبارة اللاغرانج هنا عن تابع اللاغرانج للجسيم الحر: $L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$ إلا بالحدين $\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}-e\phi$ اللذان يُعيِّنان الفعل المتبادل بين الشحنة والحقل.

(*) في الوقع يؤكد مبدأ الفعل الأصغري أن تكامل S يجب أن يكون أصغرياً فقط على أطوال أجزاء صغيرة جداً من التكامل. أما من أجل أطوال اختيارية، فيؤكد هذا المبدأ أن لِـ S نهاية حدية، وليس من الضروري أن تكون صغرى.

المراجع

[1] SOKOLOV, A.A. and TERNOV, I.M., *Radiation from Relativistic electrons*, New York,1986. p 26-37.

[2] GOLDSTEIN, H., POOLE, C. and SAFKO, J., *Classical Mechanics*, third edition, 2000, p 35,83,298,430.

[3] OUGAROV, V., *Théorie de la Relativité Restreinte*, Traduction Française Edition Mir, Moscow, 1974, p 104-105.

[4] JACKSON, J.D., *Classical electrodynamics*, 3rd edn. Wiley, New York,1998, p 408.

[5] LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M., *The classical theory of fields*, 4th edn. Butterworth-Heinemann, Oxford,1980, p 66.

[6] AMIOT; P. et MARLEAU; L., *Mécanique analytique* 2017, université Laval, Québec, Canada, p 98-101.

[7] FASANO, A. and MARMI, S., *Analytical Mechanics*, Oxford University press2006, p 413, 314.

[8] TORRES DEL CASTILLO, G.F., *Generation of Solution of the Hamilton-Jacobi equation*, Revista Mexican de Fisica 60(2014) 75-79.

[9] LANDAU, L.D. and LIFSHITZ, E.M., *Mécanique*, 4e Edition, Traduction Française Edition Mir 1981, p 30-32,72-74.

[10] GRADSHTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M., *Table of Integrals, Series and Products*, 7th edn, 2007, p 94,97.