

## حلول تقريبية لمسائل القيم الحدية من المرتبة الثانية عشرة باستخدام تقنية شرائحية

الدكتور سليمان محمد محمود\*

الدكتور سمير إحسان\*\*

تاريخ الإيداع 21 / 8 / 2017. قُبِلَ للنشر في 2 / 11 / 2017

### □ ملخص □

تم تقديم طريقة تجميع شرائحية للحل العددي لمسائل القيم الحدية الخطية في المعادلات التفاضلية المعممة من المرتبة الثانية عشرة التي تنشأ تطبيقاتها في الميكانيك والعلوم المختلفة. تعتمد التقنية المقترحة على تقريب دالة الحل بحدوديات شرائحية من الدرجة السادسة عشرة مع خمس نقاط تجميع في كل مجال جزئي من الحل. تستطيع الطريقة تقريب الحل للمسألة وتقريب مشتقاته حتى المرتبة الحادية عشرة. تم إثبات أن الطريقة المقترحة تضمن وجود ووحداية الحل عندما تُطبَّق لحل بعض مسائل الاختبار. كما تم تقدير صيغة للخطأ المققطع الشامل، حيث تبين الدراسة أن الطريقة تكون متناسقة ومقاربة بخطأ مققطع شامل من الرتبة السادس عشرة. و لإثبات صحة النتائج النظرية قمنا باختبار الطريقة الشرائحية بحل ثلاث مسائل مختلفة، حيث تشير المقارنات لنتائجنا مع نتائج الآخرين إلى أفضلية الطريقة المقترحة من حيث الدقة والفعالية.

**الكلمات المفتاحية:** كثيرات حدود شرائحية، نقاط تجميع، مسائل القيمة الحدية من المرتبة الثانية عشرة، التناسق، الخط المققطع الشامل.

\* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية  
\*\* مدرس - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

## Approximate Solutions of Twelfth-Order Boundary Value Problems by Using Spline Technique

Dr. Suliman M Mahmoud\*  
Dr. Sameer Ehssan\*\*

(Received 21 / 8 / 2017. Accepted 2 / 11 / 2017)

### □ ABSTRACT □

In this paper, we develop spline collocation technique for the numerical solution of general twelfth-order linear boundary value problems (BVPs). This technique based on polynomial splines from order sixteenth as well as five collocation points at every subinterval of BVPs. The method developed not only approximates the solution of BVP, but its higher order derivatives as well. We show that the spline collocation method is existent and unique when it is applied into a test problem. Also, its global truncation error is estimated. Moreover, the purposed spline method when applied to test problems will be consistent and convergent from sixteenth order. Three numerical examples are given to illustrate the applicability and efficiency of the new method. Comparisons of our results with some other methods show that our method is very effective and successful.

**Keywords:** Spline Polynomials, Collocation Points, Twelfth-Order BVPs, Consistence, Global Truncation Error.

---

\* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

\*\* Assistant Prof, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

**مقدمة:**

يلجأ الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية إلى تصميم نماذج رياضية للمساعدة في فهم الظواهر المختلفة، وهذه النماذج غالباً ما تؤدي إلى صياغة منظومات من المعادلات التفاضلية من مراتب عالية، نشاهدها كثيراً كمسائل في الميكانيك والفيزياء، والهندسة وفروع مختلفة. ولكن المشكلة التي تواجه هؤلاء الباحثين عدم وجود حلول تحليلية صريحة للكثير من هذه النماذج، وهذا ما حدا بهم إلى الاهتمام بتقديم طرائق تقريبية لإيجاد الحلول العددية باستخدام البرامج الحاسوبية. ويمكن القول إنه لولا الحواسيب لبقت الكثير من المسائل الرياضية دون حل. سيتم في هذا العمل تطوير تقنية تجميعية شرائحية لحل مسائل القيم الحدية الخطية المعممة من المرتبة الثانية عشرة من الشكل:

$$y^{(12)}(x) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x) y^{(i)}(x) = q(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.1)$$

الخاضعة للشروط الحدية الآتية:

$$y^{(m)}(a) = \alpha_m, m = 0, 1, \dots, 5; y^{(m)}(b) = \beta_m, m = 0, 1, \dots, 5 \quad (1.2)$$

حيث:  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) ثوابت حقيقية، و  $p_i(x)$  ( $i = 0, \dots, 11$ )، و  $q(x)$  دوال مستمرة على المجال  $[a, b]$ .

طوّر الباحثون العديد من الطرائق العددية لحل مسائل القيم الحدية الخطية من المرتبة الثانية عشرة في الحالة الخاصة من الشكل:

$$y^{(12)}(x) + q(x) y(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.3)$$

وتخضع لنوعين من الشروط الحدية:

$$y^{(m)}(a) = \alpha_m, \quad y^{(m)}(b) = \alpha_m, \quad m = 0, 1, \dots, 5, \quad (1.4)$$

$$y^{(2m)}(a) = \alpha_m, \quad y^{(2m)}(b) = \alpha_m, \quad m = 0, 1, \dots, 5 \quad (1.5)$$

نذكر من هذه الطرائق: طريقة التوضع الأمثل المتقاربة [2]، طريقة شرائحية من غير كثيرات الحدود [5]، طريقة تحليل التعبير التكرارية [6]، طريقة المربعات الصغرى [8]، طرائق التوضع الأمثل الاضطرابية [9, 10]، طريقة التعبير التكرارية [12]، طريقة شرائحية من الدرجة الثالثة عشرة [13] و طريقة التحويل التفاضلي [14].

**وحديثاً:** تم أيضاً تطوير المزيد من التقنيات العددية لحل مسائل من الشكل (1.3)–(1.5)،

نذكر منها، طريقة تحليل أدوميان مع دوال غرين [1]، طريقة تشيبتشيف غالركن من النوعين الثالث والرابع [3]، طريقة حدوديات تشيبتشيف [4]، طريقة التوضع الأمثل التحليلية لإيجاد حل تحليلي تقريبي [7]، طريقة موجات شانون (Shannon wavelets) استخدمت لحل مسائل من النمط (1.1)–(1.2) في [15]. وطريقة شرائحية بأربع نقاط تجميع استخدمت لحل مسائل القيم الحدية المعممة من المرتبة العاشرة في [11].

**أهمية البحث وأهدافه:**

تلعب المعادلات التفاضلية من مراتب عالية دوراً بارزاً في عصرنا الحديث نظراً للتغيرات المتسارعة في مختلف العلوم سواء أكانت ميكانيكية أو فيزيائية أو هندسية الخ، فهذه المعادلات نمذجة رياضية لكثير من مسائل الحركة بين الأجسام والعناصر في الطبيعة، ولها دور فعال في صناعة الطائرات والأقمار الصناعية، وحساب معادلة المجال

الكهربائي والمغناطيسي على جسم معين وتستخدم في مسائل التشتت الكهرومغناطيسي ومعادلات انتقال الطاقة المشعة التي يطبق عليها حرارة عالية. ولكن المشكلة التي يعاني منها الباحثون عدم وجود حلول تحليلية صريحة لمعظم هذه المسائل فيتم اللجوء إلى المعالجة العددية كبديل عن الحلول التحليلية. لهذا نهدف إلى تقديم تقنية شرائحية مع خمس نقاط تجميعية لتقريب الحلول لمسائل القيم الحدية من النمط (1.1)-(1.2) (الحالة المعممة حيث يظهر الحل مشتقاته من أي مرتبة)، ودراسة الاستقرار والتقارب العددي وإجراء الاختبارات العددية.

### طرائق البحث ومواده:

تعتمد طرائق البحث على بعض المفاهيم والمبرهنات الأساسية في نظرية التقريب مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود بالإضافة إلى بعض الأساسيات والمبرهنات في الجبر الخطي، وكذلك تم الاطلاع على بعض التقنيات العددية في المراجع العلمية التي تطرقت لحل المسألة المطروحة وذلك للاستفادة من المزايا الإيجابية وتجنب الثغرات والمزايا السلبية، ولهذا تم اختيار فضاء التقريبات بكثيرات حدود شرائحية لحل المسألة وتنفيذ النتائج برمجياً بلغة البرمجة Mathematica 10 عالية المستوى.

### النتائج والمناقشة:

#### صياغة طريقة شرائحية بخمس نقاط تجميع :

لحل المسألة (1.1)-(1.2) نأخذ تجزئة منتظمة:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  للمجال  $[a, b]$ ، حيث  $x_i = a + ih$ ،  $i = 0, 1, \dots, N$ ، و  $h = (b - a) / n$  طول الخطوة. بفرض أن  $S(x)$  تقريب شرائحي من الدرجة ست عشرة للحل  $y(x)$  لهذه المسألة و لأجل كل  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  نعرف الشريحة  $S_k(x)$  كالآتي:

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{11} \frac{(x-x_k)^i}{i!} s_k^{(i)} + \sum_{i=12}^{16} \frac{(x-x_k)^i}{i!} C_{k,i-11}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

حيث  $S^{(i)}(a) = s_0^{(i)}$  ( $i = 0, \dots, 11$ ) أي يوجد حدوديات شرائحية  $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$  بحيث أن

$S(x) \equiv S_k(x)$  لأجل كل  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ، وهذه الشرائح تحقق الشروط:

$$S \in C^{12}[a, b]; \quad S(x_k) = y(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad \blacksquare$$

$$S_{k+1}^{(m)}(x_{k+1}) = S_k^{(m)}(x_{k+1}), \quad k = 0(1)N-2, \quad m = 0(1)11 \quad \blacksquare$$

تعتمد التقنية الشرائحية في كل مجال جزئي على نقاط التجميع الخمس الآتية:

$$x_{k+z_j} = x_k + h z_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 5), \quad (4.2)$$

المرتبطة مع وسطاء التجميع الخمس التي تحدد بالشكل:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \quad (4.3)$$

الآن، سنحول مسألة القيم الحدية المعممة (1.1)-(1.2) إلى عدد من مسائل القيم الابتدائية الخاصة، ثم تطبيق كثيرات الحدود الشرائحية (4.1) مع نقاط التجميع (4.2)-(4.3)، لإيجاد الحل الشرائحي للمسألة المطروحة.

يفرض أن  $y(x)$  حل وحيد للمسألة المطروحة (1.1)-(1.2) عندئذ فإن هذا الحل سيعبر عنه كمجموع خطي لحلول سبع من مسائل القيم الابتدائية الخاصة، فإذا فرضنا أن:  $\mathbf{S}_0(x), \mathbf{S}_1(x), \mathbf{S}_2(x), \dots, \mathbf{S}_6(x)$  هي الحلول الوحيدة لهذه المسائل على الترتيب، فإنه يوجد ستة ثوابت حقيقية  $c_1, \dots, c_6$  بحيث يتحقق:

$$y(x) = \mathbf{S}_0(x) + \sum_{k=1}^6 c_k \mathbf{S}_k \quad (4.4)$$

في البداية، سنطبق التقريبات الشرائحية (4.1) ومشتقاتها حتى المرتبة الثانية عشرة مع نقاط التجميع (4.3) إلى مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$\mathbf{S}_0^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_0^{(i)}(x_{k+z_j}) = q(x_{k+z_j}), \quad j = 1(1)5, k = 0(1)N-1, \quad (4.5)$$

تخضع للشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_0^{(i)}(a) = \alpha_i \quad (i = 0, \dots, 5), \quad \mathbf{S}_0^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 6, \dots, 11), \quad (4.5a)$$

حيث:  $x_{k+z_j} \in [x_k, x_{k+1}], k = 0(1)N-1$  و  $\mathbf{S}_0(x)$  الحل الوحيد للمسألة (4.5) مع الشروط (4.5a).

وبأسلوب مشابه لما تقدم، سنطبق التقنية الشرائحية لحل مسائل القيم الابتدائية المتبقية التي نرسم لحلولها

$\mathbf{S}_1(x), \mathbf{S}_2(x), \dots, \mathbf{S}_6(x)$  على الترتيب، ولنبدأ بتطبيق التقنية الشرائحية على المسألة الابتدائية المتجانسة الأولى (التي حلها  $\mathbf{S}_1(x)$ ):

$$\mathbf{S}_1^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_1^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1(1)5, k = 0(1)N-1, \quad (4.6)$$

وتخضع للشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_1^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, \dots, 5), \quad \mathbf{S}_1^{(6)}(a) = 1, \quad \mathbf{S}_1^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 7, \dots, 11), \quad (4.6a)$$

وكذلك سنطبق التقنية للمسألة الابتدائية المتجانسة الثانية (التي حلها  $\mathbf{S}_2(x)$ ):

$$\mathbf{S}_2^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_2^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1(1)5, k = 0(1)N-1, \quad (4.7)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_2^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 6), \quad \mathbf{S}_2^{(7)}(a) = 1, \quad \mathbf{S}_2^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 8, \dots, 11), \quad (4.7a)$$

و بتطبيق التقنية للمسألة الابتدائية المتجانسة الثالثة (التي حلها  $\mathbf{S}_3(x)$ ) نجد أن:

$$\mathbf{S}_3^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_3^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1(1)5, k = 0(1)N-1, \quad (4.8)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_3^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 7), \quad \mathbf{S}_3^{(8)}(a) = 1, \quad \mathbf{S}_3^{(i)}(a) = 0, i = 9, 10, 11 \quad (4.8a)$$

كما سبق سنطبق التقنية للمسألة الابتدائية المتجانسة الرابعة (التي حلها  $\mathbf{S}_4(x)$ ):

$$\mathbf{S}_4^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_4^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1(1)5, k = 0(1)N-1, \quad (4.9)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_4^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 8), \quad \mathbf{S}_4^{(9)}(a) = 1, \quad \mathbf{S}_4^{(i)}(a) = 0, i = 10, 11 \quad (4.9a)$$

سنطبق التقنية للمسألة الابتدائية المتجانسة الخامسة (التي حلها  $\mathbf{S}_5(x)$ ):

$$\mathbf{S}_5^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_5^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j=1(1)5, k=0(1)N-1, \quad (4.10)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_5^{(i)}(a) = 0 \quad (i=0,1,\dots,9), \quad \mathbf{S}_5^{(10)}(a) = 1, \quad \mathbf{S}_5^{(11)}(a) = 0. \quad (4.10a)$$

أخيراً سنطبق التقنية الشرائحية للمسألة الابتدائية السادسة (التي حلها  $(\mathbf{S}_6(x))$ ):

$$\mathbf{S}_6^{(12)}(x_{k+z_j}) + \sum_{i=0}^{11} p_i(x_{k+z_j}) \mathbf{S}_6^{(i)}(x_{k+z_j}) = 0, \quad j=1(1)5, k=0(1)N-1, \quad (4.11)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية:

$$\mathbf{S}_6^{(i)}(a) = 0 \quad (i=0,1,\dots,10), \quad \mathbf{S}_6^{(11)}(a) = 1.$$

(4.11a)

سنثبت أن الدالة  $\mathcal{N}(x)$  المعرفة بالعلاقة (4.4) هي حل لمسألة القيمة الحدية المطروحة (1.1)-(1.2)، حيث

نجد

أنه لأجل ستة ثوابت حقيقية  $c_1, \dots, c_6$  يتحقق لدينا:

$$\begin{aligned} y^{(12)}(x) &= S_0^{(12)}(x) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k^{(12)} = \\ &= - \sum_{i=0}^{11} p_i(x) S_0^{(i)}(x) + q(x) + \sum_{k=1}^6 c_k \left[ - \sum_{i=0}^{11} p_i(x) S_k^{(i)}(x) \right] \\ &= - \sum_{i=0}^{11} p_i(x) \left[ S_0^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k^{(i)}(x) \right] + q(x) = - \sum_{i=0}^{11} p_i(x) y^{(i)}(x) + q(x), \\ &\quad \cdot \quad y^{(i)}(x) = S_0^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k^{(i)}(x), \quad i=0,1,\dots,11 \quad \text{حيث} \end{aligned}$$

لقد أثبتنا أن الحل  $y(x) = S_0(x) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k(x)$  يحقق المعادلة التفاضلية (1.1)، ويتبقى إثبات أن هذا الحل

يحقق الشروط الحدية (1.2) للمسألة، لأجل هذه الغاية نلاحظ أن:

$$y^{(i)}(a) = S_0^{(i)}(a) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k^{(i)}(a) = \alpha_i + \sum_{k=1}^6 c_k (0) = \alpha_i, \quad (i=0,\dots,5)$$

إضافة إلى ما تقدم فإن الثوابت الحقيقية  $c_1, \dots, c_6$  المجهولة سيتم تعيينها من الشروط الحدية (1.2) لنهاية

المجال بحل منظومة المعادلات الآتية:

$$y^{(i)}(b) = S_0^{(i)}(b) + \sum_{k=1}^6 c_k S_k^{(i)}(b) \equiv \beta_i, \quad (i=0,1,\dots,5), \quad (4.12)$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(b) & S_2(b) & S_3(b) & S_4(b) & S_5(b) & S_6(b) \\ S'_1(b) & S'_2(b) & S'_3(b) & S'_4(b) & S'_5(b) & S'_6(b) \\ S''_1(b) & S''_2(b) & S''_3(b) & S''_4(b) & S''_5(b) & S''_6(b) \\ S_1^{(3)}(b) & S_2^{(3)}(b) & S_3^{(3)}(b) & S_4^{(3)}(b) & S_5^{(3)}(b) & S_6^{(3)}(b) \\ S_1^{(4)}(b) & S_2^{(4)}(b) & S_3^{(4)}(b) & S_4^{(4)}(b) & S_5^{(4)}(b) & S_6^{(4)}(b) \\ S_1^{(5)}(b) & S_2^{(5)}(b) & S_3^{(5)}(b) & S_4^{(5)}(b) & S_5^{(5)}(b) & S_6^{(5)}(b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_0 - S_0(b) \\ \beta_1 - S'_0(b) \\ \beta_2 - S''_0(b) \\ \beta_3 - S_0^{(3)}(b) \\ \beta_4 - S_0^{(4)}(b) \\ \beta_5 - S_0^{(5)}(b) \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه بحل المنظومات (4.5)-(4.11) تصيح حلولها الشرائحية  $\mathbf{S}_6(x), \mathbf{S}_1(x), \mathbf{S}_0(x)$  ... معلومة عند كل  $1 \leq k \leq N$  ، وبالتالي حل المسألة  $S(x) \approx y(x)$  ومشتقاته  $S^{(i)}(x), i=1,2,\dots,12$  سيكون معلوماً في جميع نقاط التجزئة من المعادلة:

$$S^{(i)}(x_k) = \mathbf{S}_0^{(i)}(x_k) + \sum_{j=1}^6 c_j \mathbf{S}_j^{(i)}(x_k), \quad i=0,1,\dots,12. \quad (4.13)$$

وبتطبيق نقاط التجميع  $x_{k+z_j} = x_k + h z_j$  ، على الشريحة (4.1)، نجد أن:

$$S(x_{k+z_j}) = \sum_{i=0}^{11} \frac{(h z_j)^i}{i!} s_k^{(i)} + \sum_{i=12}^{16} \frac{(h z_j)^i}{i!} C_{k,i-11}, \quad j=1(1)5, k=0(1)N-1 \quad (4.14)$$

نلاحظ في (4.14) يتم حساب المعاملات المجهولة  $C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}, C_{k,4}, C_{k,5}$  الأولى عند حل كل منظومة من المنظومات (4.5)-(4.11) باستخدام الشروط الابتدائية إذا كان  $k=0$  أو من الخطوة السابقة إذا كان  $k>1$ .

### وجود حل تجميعي شرائحي وحيد :

لنأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية عشرة الآتية:

$$\begin{cases} y^{(12)}(x) = F[x, y(x), \dots, y^{(11)}(x)], & x \in [a, b] \\ y^{(d)}(a) = S_0^{(d)}, & d = 0(1)11. \end{cases} \quad (4.15)$$

فبفرض أن  $F : [a, b] \times C[a, b] \times \dots \times C^{11}[a, b] \rightarrow R$  دالة ملساء كفاية، نقول إن الدالة  $F$  تحقق شرط ليبشيز إذا تحققت متراجحة ليبشيز الآتية:

$$|F(x, y_0, \dots, y_{11}) - F(x, \ddot{y}_0, \dots, \ddot{y}_{11})| \leq L \sum_{i=0}^{11} |y_i - \ddot{y}_i|,$$

$$\forall (x, y_0, \dots, y_{11}), (x, \ddot{y}_0, \dots, \ddot{y}_{11}) \in [a, b] \times R^{11}$$

حيث  $L$  يدعى بثابت ليبشيز لـ  $F$ .

إن تحقيق شرط ليبشيز يضمن وجود وحدانية الحل  $\mathcal{N}(x)$  لمسألة الاختبار (4.15).

و بتطبيق التقريبات الشرائحية (4.1) ومشتقاتها مع نقاط التجميع (4.2)-(4.3) إلى المسألة (4.15)،

نحصل على المنظومة الحسابية الآتية:

$$C_{k,1} + (h z_j) C_{k,2} + \frac{(h z_j)^2}{2!} C_{k,3} + \frac{(h z_j)^3}{3!} C_{k,4} + \frac{(h z_j)^4}{4!} C_{k,5} = F(x_{k+z_j}, S(x_{k+z_j}), \dots, S^{(11)}(x_{k+z_j})), \quad j=1,\dots,5, \quad k=0(1)N-1, \quad (4.16)$$

$$S^{(d)}(a) = S_0^{(d)}, \quad d = 0(1)11. \quad (4.16a)$$

وبإعادة كتابة المنظومة (4.16) بصيغة المصفوفات ينتج لدينا:

$$A\bar{C}_k = \hat{F}_k \quad (4.17)$$

حيث:

$$F_{k+z_j} = F[x_{k+z_j}, S(x_{k+z_j}), \dots, S^{(11)}(x_{k+z_j})], \quad j=1(1)5,$$

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \\ C_{k,5} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k = \begin{bmatrix} F_{k+z_1} \\ F_{k+z_2} \\ F_{k+z_3} \\ F_{k+z_4} \\ F_{k+1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & hz_1 & \frac{h^2 z_1^2}{6} & \frac{h^3 z_1^3}{6} & \frac{h^4 z_1^4}{24} \\ 1 & hz_2 & \frac{h^2 z_2^2}{6!} & \frac{h^3 z_2^3}{6} & \frac{h^4 z_2^4}{24} \\ 1 & hz_3 & \frac{h^2 z_3^2}{6!} & \frac{h^3 z_3^3}{6} & \frac{h^4 z_3^4}{24} \\ 1 & hz_4 & \frac{h^2 z_4^2}{6!} & \frac{h^3 z_4^3}{6} & \frac{h^4 z_4^4}{24} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{6} & \frac{h^4}{24} \end{bmatrix}$$

**مبرهنة:** بفرض أن  $F \in C([a, b] \times \mathbb{R}^{11})$  تحقق شرط ليبشيز وأن المتراحة:

$$L5.90285 \times 10^{-7} h^8 < 1 \quad (4.18)$$

محققة عندئذ يوجد حل شرانحي وحيد  $S(x)$  باختيار وسطاء التجميع  $z_2 = 7/10$ ،  $z_1 = 5/10$

حيث  $L$  ثابت ليبشيز للدالة  $F$ ،  $z_4 = 9/10$ ،  $z_3 = 8/10$

**البرهان:**

لبرهان المطلوب يجب إثبات أن الحل الشرانحي  $S(x)$  عندما يطبق إلى المسألة (4.15) يتحقق شرط ليبشيز

للدالة  $F$ ، أي يكفي إثبات أن الشعاع  $\bar{C}_k$  يمكن تعيينه بشكل وحيد.

نلاحظ أولاً، إذا كان  $z_1 = 5/10$ ،  $z_2 = 7/10$ ،  $z_3 = 8/10$ ،  $z_4 = 9/10$  فإن  $A^{-1}$

مقلوب مصفوفة المنظومة (4.17) ليست شاذة لأن  $Det(A) = h^{10} / 9765625$ .

وليكن  $\bar{C}_k^1, \bar{C}_k^2 \in R^5$  عندئذ من المنظومة (4.17) نحصل على:

$$\bar{C}_k^1 = A^{-1} \hat{F}_k^1, \quad \bar{C}_k^2 = A^{-1} \hat{F}_k^2$$

والتي يمكن إعادة كتابتهما بالشكل:

$$\bar{C}_k^1 = \bar{Q}_k(C_{k,1}^1, C_{k,2}^1, C_{k,3}^1, C_{k,4}^1, C_{k,5}^1, h) \quad \text{and} \quad \bar{C}_k^2 = \bar{Q}_k(C_{k,1}^2, C_{k,2}^2, C_{k,3}^2, C_{k,4}^2, C_{k,5}^2, h)$$

ويتطبيق شرط ليبشيز ونظيم المسافة  $\|\cdot\|_\infty$  واستخدام لغة *Mathematica 10* نجد أن:

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}_k(\bar{C}_k^1) - \bar{Q}_k(\bar{C}_k^2)\| &= \|(A^{-1} \hat{F}_k^1) - (A^{-1} \hat{F}_k^2)\| = \|A^{-1}(\hat{F}_k^1 - \hat{F}_k^2)\| \leq \\ &\{ L_1 H_1 | C_{k,1}^1 - C_{k,1}^2 | + L_2 H_2 | C_{k,2}^1 - C_{k,2}^2 | + L_3 H_3 | C_{k,3}^1 - C_{k,3}^2 | + \\ &L_4 H_4 | C_{k,4}^1 - C_{k,4}^2 | + L_5 H_5 | C_{k,5}^1 - C_{k,5}^2 | \} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{L_1(5.90285 \times 10^{-7} h^8) | C_{k,1}^1 - C_{k,1}^2 | + L_2(4.82614 \times 10^{-8} h^9) | C_{k,2}^1 - C_{k,2}^2 | + \\ & L_3(3.61437 \times 10^{-9} h^{10}) | C_{k,3}^1 - C_{k,3}^2 | + L_4(2.50031 \times 10^{-10} h^{11}) | C_{k,4}^1 - C_{k,4}^2 | \} \\ & + L_5(1.60867 \times 10^{-11} h^{12}) | C_{k,5}^1 - C_{k,5}^2 | \\ & \leq L(5.90285 \times 10^{-7} h^8) \{ | C_{k,1}^1 - C_{k,1}^2 | + | C_{k,2}^1 - C_{k,2}^2 | + | C_{k,3}^1 - C_{k,3}^2 | + \\ & | C_{k,4}^1 - C_{k,4}^2 | + | C_{k,5}^1 - C_{k,5}^2 | \} \end{aligned}$$

حيث:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ -\frac{385}{12h} & \frac{535}{6h} & -\frac{195}{2h} & \frac{305}{6h} & \frac{125}{12h} \\ \frac{1775}{12h^2} & -\frac{1475}{3h^2} & \frac{1225}{2h^2} & -\frac{1025}{3h^2} & -\frac{875}{12h^2} \\ -\frac{875}{h^3} & \frac{1625}{h^3} & -\frac{2250}{h^3} & \frac{1375}{h^3} & -\frac{625}{2h^3} \\ \frac{625}{h^4} & -\frac{2500}{h^4} & \frac{3750}{h^4} & -\frac{2500}{h^4} & \frac{625}{h^4} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$H_1 = 9.63091 \times 10^{-7} h^8 - 4.65304 \times 10^{-7} h^9 + 1.05976 \times 10^{-7} h^{10} -$$

$$1.48938 \times 10^{-8} h^{11} + 1.41545 \times 10^{-9} h^{12} \leq 5.90285 \times 10^{-7} h^8, \quad \forall h \in ]0,1[$$

$$H_2 = 7.90815 \times 10^{-8} h^9 - 3.85154 \times 10^{-8} h^{10} + 8.82123 \times 10^{-9} h^{11} -$$

$$1.24439 \times 10^{-9} h^{12} + 1.18534 \times 10^{-10} h^{13} \leq 4.82614 \times 10^{-8} h^9, \quad \forall h \in ]0,1[$$

$$H_3 = 5.94163 \times 10^{-9} h^{10} - 2.91111 \times 10^{-9} h^{11} + 6.69532 \times 10^{-10} h^{12} -$$

$$9.47158 \times 10^{-11} h^{13} + 9.03788 \times 10^{-12} h^{14} \leq 3.61437 \times 10^{-9} h^{10}, \quad \forall h \in ]0,1[$$

$$H_4 = 4.12029 \times 10^{-10} h^{11} - 2.02786 \times 10^{-10} h^{12} + 4.67875 \times 10^{-11} h^{13} -$$

$$6.63305 \times 10^{-12} h^{14} + 6.33773 \times 10^{-13} h^{15} \leq 2.50031 \times 10^{-10} h^{11}, \quad \forall h \in ]0,1[$$

$$H_5 = 2.6559 \times 10^{-11} h^{12} - 1.31164 \times 10^{-11} h^{13} + 3.03364 \times 10^{-12} h^{14} -$$

$$4.30789 \times 10^{-13} h^{15} + 4.12029 \times 10^{-14} h^{16} \leq 1.60867 \times 10^{-11} h^{12}, \quad \forall h \in ]0,1[$$

$$L = \max(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5), \quad H_1 = \max(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5) \leq 5.90285 \times 10^{-7} h^8$$

,  $\forall h \in ]0,1[$ .

فإذا تحققت المتراجحة (4.18) يعني إذا كان  $L5.90285 \times 10^{-7} h^8 < 1$  يصبح شرط ليبشيز للدالة  $F$  محققاً

بحسب التعريف . وهكذا يوجد حل وحيد :

$$\bar{C}_k = \bar{Q}_k(C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}, C_{k,4}, C_{k,5}, h)$$

يمكن إيجاده تكرارياً بالشكل  $\bar{C}_k^{p+1} = \bar{Q}_k(\bar{C}_k^p, h)$ , وهو المطلوب.

**تعريف [11]:** يقال عن طريقة عددية إنها متسقة (Consistent) من الرتبة  $p$  إذا كان

$$\tau_k \equiv O(h^p), \quad \|\tau\|_{\infty} = \max_{0 \leq k \leq N} |\tau_k|$$

### الخطأ المقتطع الموضعي: Local Truncation Error

بفرض أن  $y(x) \in C^{16}[a, b]$  حل وحيد للمسألة (1.1)-(1.2) وأن  $S(x)$  الحل الشرائحي. وبفرض أن

$T = (\bar{\tau}_k)$  شعاع بعده خمسة، و  $\bar{\tau}_k$  يرمز للخطأ المقتطع الموضعي. وبتطبيق التقريب الشرائحي  $S(x)$  مع نقاط

التجميع (4.2)-(4.3)، مع اختيار  $z_1 = 5/10, z_2 = 7/10, z_3 = 8/10, z_4 = 9/10$ ، و وضع

الموضعي بالشكل:  $S_k^{(m)} = S^{(m)}(x_k)$ ، و  $y(x_{k+z_j}) = y(x_k + hz_j)$ ، نحصل على صيغة الخطأ المقتطع

$$\bar{\tau}_k = M\bar{C}_k + \bar{\Psi}_k, \quad (4.20)$$

حيث

$$M = \begin{bmatrix} \frac{(z_1h)^{12}}{12!} & \frac{(z_1h)^{13}}{13!} & \frac{(z_1h)^{14}}{14!} & \frac{(z_1h)^{15}}{15!} & \frac{(z_1h)^{16}}{16!} \\ \frac{(z_2h)^{12}}{12!} & \frac{(z_2h)^{13}}{13!} & \frac{(z_2h)^{14}}{14!} & \frac{(z_2h)^{15}}{15!} & \frac{(z_2h)^{16}}{16!} \\ \frac{(z_3h)^{12}}{12!} & \frac{(z_3h)^{13}}{13!} & \frac{(z_3h)^{14}}{14!} & \frac{(z_3h)^{15}}{15!} & \frac{(z_3h)^{16}}{16!} \\ \frac{(z_4h)^{12}}{12!} & \frac{(z_4h)^{13}}{13!} & \frac{(z_4h)^{14}}{14!} & \frac{(z_4h)^{15}}{15!} & \frac{(z_4h)^{16}}{16!} \\ \frac{h^{12}}{12!} & \frac{h^{13}}{13!} & \frac{h^{14}}{14!} & \frac{h^{15}}{15!} & \frac{h^{16}}{16!} \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \\ C_{k,5} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{11} \frac{(z_1h)^i}{i!} S_k^{(i)} - y(x_k + z_1h) \\ \sum_{i=0}^{11} \frac{(z_2h)^i}{i!} S_k^{(i)} - y(x_k + z_2h) \\ \sum_{i=0}^{11} \frac{(z_3h)^i}{i!} S_k^{(i)} - y(x_k + z_3h) \\ \sum_{i=0}^{11} \frac{(z_4h)^i}{i!} S_k^{(i)} - y(x_k + z_4h) \\ \sum_{i=0}^{11} \frac{h^i}{i!} S_k^{(i)} - y(x_k + h) \end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى من المنظومة (4.17) نحصل على

$$\bar{C}_k = A^{-1} \hat{F}_k \quad (4.21)$$

حيث  $A^{-1}$  هي المصفوفة المعبر عنها بالعلاقة (2.19)، وأن

$$\hat{F}_k = [y^{(12)}(x_{k+z_1}), y^{(12)}(x_{k+z_2}), y^{(12)}(x_{k+z_3}), y^{(12)}(x_{k+z_4}), y^{(12)}(x_{k+1})]^T.$$

وباستخدام منشورات تايلور للدوال  $y^{(m)}(x)$ ،  $m = 0, \dots, 11$  حول  $x_k$  والتعويض في (4.20) نحصل على

مرتبة الخطأ المقتطع الموضعي عند الخطوة  $k$ :

$$\bar{\tau}_k = M(A^{-1} \hat{F}_k) + \bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} 8.37679 \times 10^{-16} y^{(17)}(x_k) h^{17} \\ 4.34473 \times 10^{-14} y^{(17)}(x_k) h^{17} \\ 2.06711 \times 10^{-13} y^{(17)}(x_k) h^{17} \\ 8.15135 \times 10^{-13} y^{(17)}(x_k) h^{17} \\ 2.77254 \times 10^{-12} y^{(17)}(x_k) h^{17} \end{bmatrix}, k = 0(1)N \quad (4.22)$$

حيث

$$y(x) = \sum_{i=0}^{16} \frac{(x-x_k)^i}{i!} y^{(i)}(x_k) + O(h^{17}), x \in [x_k, x_{k+1}] .$$

وهكذا يعطى الخطأ المتقطع الموضوعي للتقنية الشرائحية وفقاً للعلاقة (4.22) كالآتي:

$$\| \bar{t}_k \|_{\infty} = 2.77254 \times 10^{-12} y^{(17)}(x_k) h^{17} \equiv O(h^{17})$$

خطوة كالآتي:  $\| T \|_{\infty} = N.O(h^{17}) = \frac{b-a}{h}.O(h^{17}) \equiv O(h^{16})$  ، ومنه بحسب التعريف فالطريقة المقترحة

ستكون متناسقة ومتقاربة من الرتبة ست عشرة.

## نتائج عددية Numerical Results

لتوضيح الإمكانية التطبيقية والدقة العددية للطريقة الشرائحية المقترحة في حل مسائل القيم الحدية من المرتبة الثانية عشرة (1.1)-(1.2) نختبرها لحل ثلاث مسائل اختبار قياسية اثنتان منها متداولة في مراجع حديثة، ونطرح المسألة الثالثة لاختبار فعالية الطريقة في الحالة المعممة. نستخدم في الحسابات  $\delta^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq N} |y^{(k)}(x_i) - S^{(k)}(x_i)|$  لتشير إلى أكبر الأخطاء المطلقة، ونرمز لمراتب المشتقات بـ  $k=0,1,\dots,11$ . نستخدم برنامج (10) Mathematica لإجراء العمليات الحسابية وتنفيذ البرامج الحاسوبية اللازمة لحل المسائل المطروحة بالطريقة الشرائحية، وكذلك لإنجاز الرسوم البيانية للمسائل.

**مسألة 2:** لنأخذ مسألة القيمة الحدية الآتية [1,9,10,13]:

$$y^{(12)}(x) - x y(x) = -(120 + 23x + x^3) \exp(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

تخضع للشروط الحدية

$$\begin{cases} y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = -3, y^{(4)}(0) = -8, y^{(5)}(0) = -15; \\ y(1) = 0, y'(1) = -e, y''(1) = -4e, y^{(3)}(1) = -9e, y^{(4)}(1) = -16e, y^{(5)}(1) = -25e. \end{cases}$$

وتملك الحل التحليلي  $y(x) = x(1-x)e^x$ .

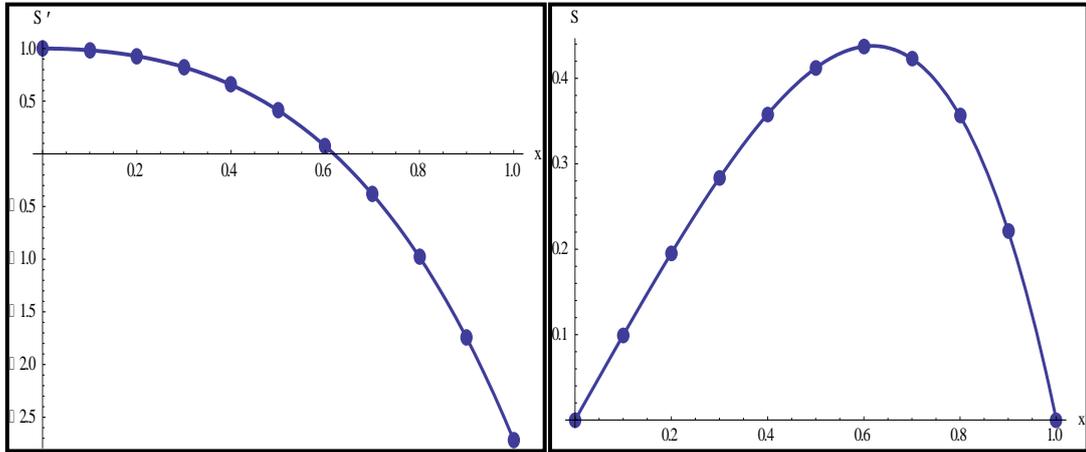
تم في الجدول (1) حساب الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمسألة 1 بالطريقة المقترحة بخطوة  $h=0.1$  ومقارنته مع طريقة Sawgf في [1] وطريقة Grover and Tomer في [9]، وطريقة Mirmoradi وآخرون في [10]. وندرج في الجدول (2) أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي وبعض مشتقاته حتى المرتبة العاشرة ومقارنته مع طريقة Siddiqi & Akram في [13]. نرسم في الأشكال (1)-(10) الحل الشرائحي ومشتقاته  $S_i^{(m)}$ ،  $m=0,1,\dots,11$  ومقارنته مع الحل الدقيق ومشتقاته  $y_i^{(m)}$ ،  $m=0,1,\dots,11$  بـ  $h=0.1$ .

الجدول (1): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمسألة 1 بخطوة  $h=0.1$

| $x_i$ | SAwGF in [1] | Mirmoradi et al. in [10] | Grover & Tomer in [9] | طريقتنا الشرائحية |
|-------|--------------|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| 0.1   | 2.03 E-16    | 3.000000 E-11            | 7.5065 E - 14         | 1.387786 E-22     |
| 0.2   | 6.56 E-15    | 0.000000 E-00            | 2.7686 E - 12         | 2.775569 E-22     |
| 0.3   | 3.43 E-14    | 1.000000 E-10            | 1.7271 E - 11         | 3.45345 E-21      |
| 0.4   | 7.79 E-14    | 2.000000 E-10            | 5.0232 E - 11         | 5.646546 E-21     |
| 0.5   | 1.02 E-13    | 1.100000 E-09            | 9.3401 E - 11         | 2.775560 E-20     |
| 0.6   | 8.12 E-14    | 4.400000 E-09            | 1.2791 E - 10         | 9.436901 E-20     |
| 0.7   | 3.71 E-14    | 1.350000 E-08            | 1.3917 E - 10         | 2.220454 E-19     |
| 0.8   | 7.39 E-15    | 3.680000 E-08            | 1.2278 E - 10         | 4.329873 E-19     |
| 0.9   | 2.38 E-16    | 9.010000 E-08            | 7.4997 E - 11         | 6.883382 E-19     |
| 1     | 0.0000000    | 2.027000 E-07            | 1.9454 E-11           | 8.965051 E-19     |

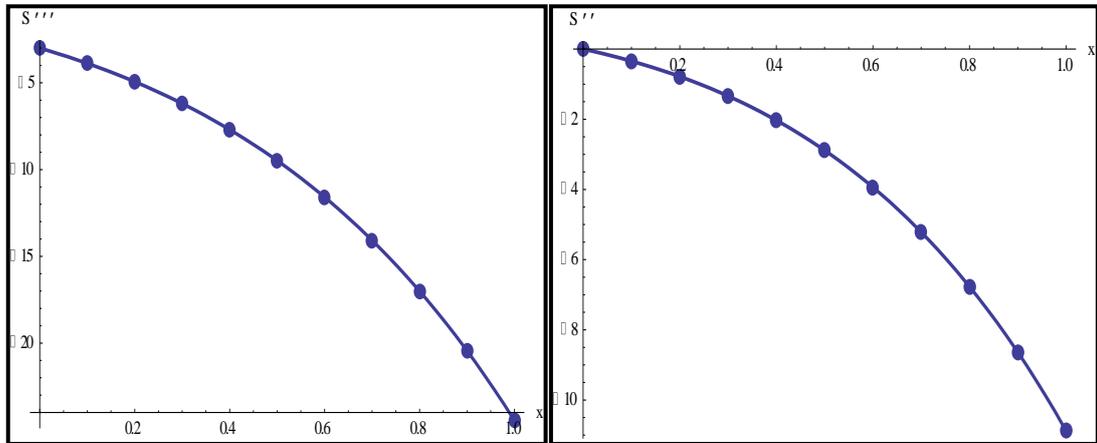
الجدول (2): أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي ومشتقاته للمسألة 1

| $y_i^{(m)}$  | Siddiqi & Akram [13] | طريقتنا الشرائحية |
|--------------|----------------------|-------------------|
| $y_i$        | 7.38 E-09            | 3.06699E-17       |
| $y_i^{(2)}$  | 3.45E-07             | 1.95399 E-15      |
| $y_i^{(4)}$  | 3.92 E-07            | 6.2883 E-14       |
| $y_i^{(6)}$  | 2.5 E-02             | 8.53362 E-13      |
| $y_i^{(8)}$  | 2.07 E+01            | 3.89863 E-12      |
| $y_i^{(10)}$ | 1.66 E+3             | 7.35056 E-11      |



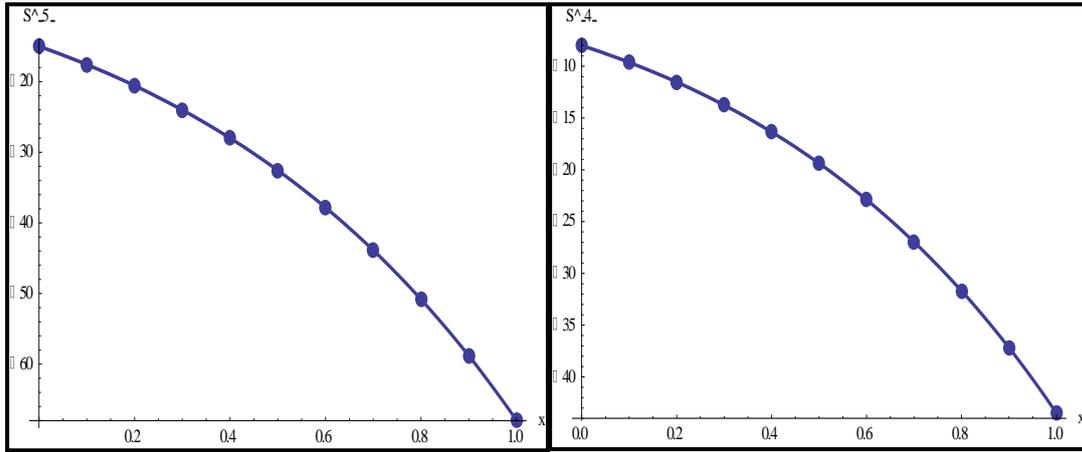
الشكل (2): الحل الشرائحي  $S(x)$ : ●●●  
والحل الدقيق:  $y(x)$  — للمسألة (1)

الشكل (1): الحل الشرائحي  $S(x)$ : ●●●  
والحل الدقيق:  $y(x)$  — للمسألة (1)



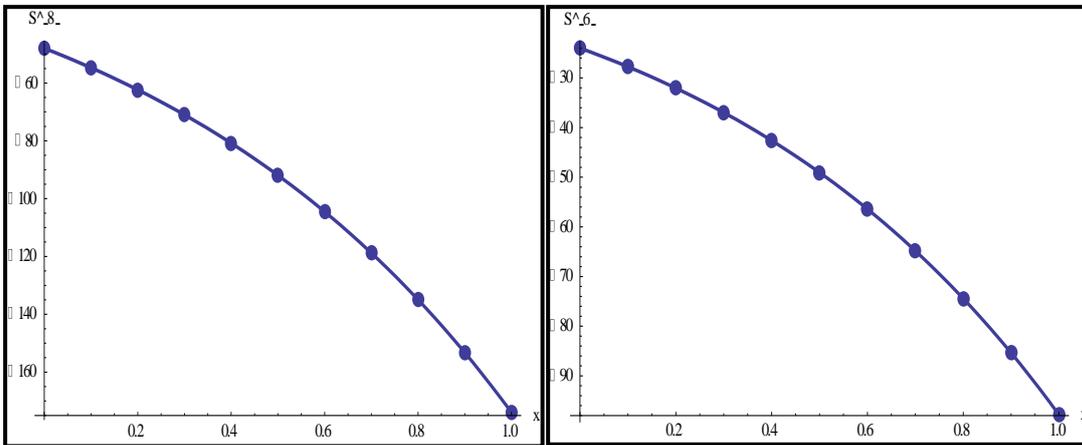
الشكل (4): الحل الشرائحي  $S'''(x)$ : ●●●  
والحل الدقيق:  $y'''(x)$  — للمسألة (1)

الشكل (3): الحل الشرائحي  $S''(x)$ : ●●●  
والحل الدقيق:  $y''(x)$  — للمسألة (1)



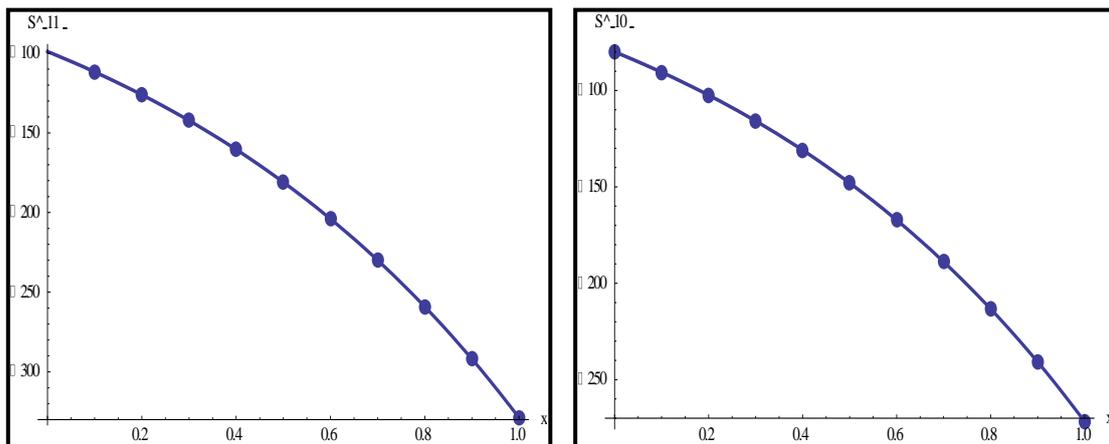
الشكل (6): الحل الشرائحي  $S^5(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^5(x)$  — للمسألة (1)

الشكل (5): الحل الشرائحي  $S^4(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^4(x)$  — للمسألة (1)



الشكل (8): الحل الشرائحي  $S^8(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^8(x)$  — للمسألة (1)

الشكل (7): الحل الشرائحي  $S^6(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^6(x)$  — للمسألة (1)



الشكل (10): الحل الشرائحي  $S^{11}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{11}(x)$  — للمسألة (1)

الشكل (9): الحل الشرائحي  $S^{10}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{10}(x)$  — للمسألة (1)

المسألة (2): لتأخذ مسألة الاختبار الثانية المحلولة في المراجع [1,2,3,13,14] :

$$y^{(12)}(x) - y(x) = -12[2x \cos x + 11 \sin x], \quad -1 \leq x \leq 1,$$

تخضع للشروط الحدية:

$$\begin{cases} y(-1) = y(1) = 0, & y'(-1) = y'(1) = 2 \sin 1; & y''(-1) = y''(1) = -4 \cos 1 - 2 \sin 1; \\ y^{(3)}(-1) = y^{(3)}(1) = 6 \cos 1 - 6 \sin 1; & y^{(4)}(-1) = y^{(4)}(1) = 8 \cos 1 + 12 \sin 1; \\ y^{(5)}(-1) = y^{(5)}(1) = 20 \cos 1 + 10 \sin 1 \end{cases}$$

مع الحل الدقيق  $y(x) = \sin x (x^2 - 1)$ .

نضع في الجدول (3) حسابات لأكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي وبعض مشتقاته حتى المرتبة العاشرة للمسألة (2) بالطريقة المقترحة بخطوة  $h=0.1$  ومقارنته مع طريقة Siddiqi & Akram في [13]. وندرج في الجدولين (4) و(5) الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي بالطريقة المقترحة بخطوة  $h=0.1$  ومقارنته مع طريقة Mirmoradi وآخرون في [10]، وطريقة SAWGF في [1]، وطريقة Ali وآخرون في [2]، وطريقة C4GM في [3]، وطريقة DTM في [14].

نرسم في الأشكال (11)-(22) الحل الشرائحي ومشتقاته  $S_i^{(m)}, m = 0, 1, \dots, 11$  ومقارنته مع الحل الدقيق ومشتقاته  $y_i^{(m)}, m = 0, 1, \dots, 11$  بـ  $N=20$ .

الجدول (3): أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي ومشتقاته للمسألة 2

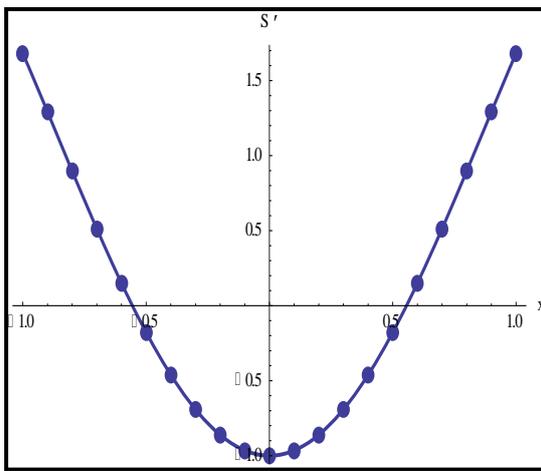
| $y_i^{(m)}$  | Siddiqi & Akram [13] | طريقتنا الشرائحية |
|--------------|----------------------|-------------------|
| $y_i$        | 4.69 E-05            | 5.42622 E-17      |
| $y_i^{(2)}$  | 1.2 E-02             | 9.07607 E-15      |
| $y_i^{(4)}$  | 4.53 E-1             | 8.53211 E-14      |
| $y_i^{(6)}$  | 2.04 E+02            | 7.30312 E-13      |
| $y_i^{(8)}$  | 1.22 E+04            | 6.78961 E-12      |
| $y_i^{(10)}$ | 1.01 E+5             | 9.2968 E-11       |

الجدول (4): الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي للمسألة 2

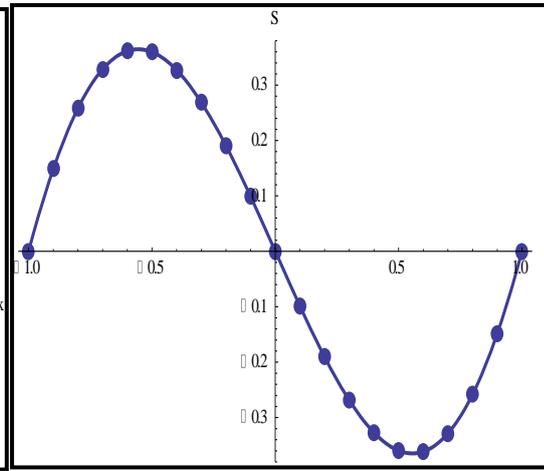
| $x_i$ | Mirmoradi et al. in [10] | طريقتنا الشرائحية    |              |
|-------|--------------------------|----------------------|--------------|
|       |                          | الحل الشرائحي        | الخطأ المطلق |
| -1.0  | 1.60000 E-09             | 0.000000000000 E+00  | 0.00000 E+00 |
| -0.8  | 2.00000 E-10             | 0.2582481927238282   | 5.42622 E-20 |
| -0.6  | 1.00000 E-09             | 0.36137118297282256  | 9.07607 E-20 |
| -0.4  | 3.00000 E-09             | 0.3271114075392667   | 1.53211 E-19 |
| -0.2  | 3.90000 E-09             | 0.19072255756325998  | 2.70894 E-19 |
| 0.0   | 0.00000 E-00             | 3.2861896797492 E-15 | 4.81282 E-18 |
| 0.2   | 3.30000 E-09             | -0.19072255756324985 | 8.53206 E-18 |
| 0.4   | 2.90000 E-09             | -0.3271114075392394  | 1.4988 E-17  |
| 0.6   | 1.00000 E-09             | -0.36137118297273735 | 2.58626 E-17 |
| 0.8   | 5.00000 E-10             | -0.25824819272356947 | 4.3876 E-17  |
| 1.0   | 1.60000 E-09             | 7.3031164449233 E-17 | 7.3031 E-17  |

الجدول (5): الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي للمسألة 2 بالمقارنة مع الطرائق [1, 2, 3, 14]

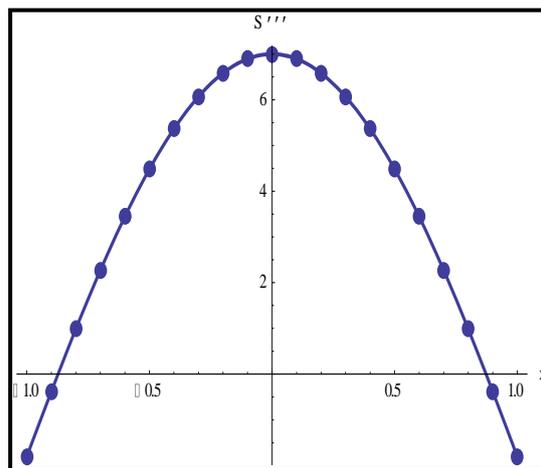
| $x_i$ | SAwGF in [1] | Ali et al. in [2] | C4GM in [3]  | DTM in [14] | طريقتنا الشرائحية |
|-------|--------------|-------------------|--------------|-------------|-------------------|
| 0.1   | 1.22E-11     | 3.9288 E-14       | 1.14157 E-18 | 1.6376 E-15 | 5.42622 E-20      |
| 0.2   | 2.03E-11     | 1.7736 E-14       | 7.30064 E-17 | 2.0797 E-13 | 9.07607 E-20      |
| 0.3   | 2.20E-11     | 3.5250 E-13       | 3.74261 E-17 | 3.4360 E-12 | 1.53211 E-19      |
| 0.4   | 1.81E-11     | 1.3883 E-13       | 1.16867 E-17 | 2.4556 E-11 | 2.70894 E-19      |
| 0.5   | 1.14E-11     | 6.328 E-14        | 3.32856 E-18 | 1.1021 E-10 | 4.81282 E-18      |
| 0.6   | 5.27E-11     | 2.6101 E-13       | 2.71537 E-17 | 3.6677 E-10 | 8.53206 E-18      |
| 0.7   | 1.57E-12     | 2.4547 E-13       | 1.39794 E-16 | 9.8945 E-10 | 1.4988 E-17       |
| 0.8   | 2.20E-13     | 1.2379 E-14       | 1.15079 E-16 | 2.2839 E-09 | 2.58626 E-17      |
| 0.9   | 5.32E-15     | 1.8097 E-13       | 1.57088 E-17 | 4.6760 E-09 | 4.3876 E-17       |
| 1     | 0.000000     | 4.5474 E-13       | 2.22045 E-16 | 8.7157 E-09 | 7.3031 E-17       |



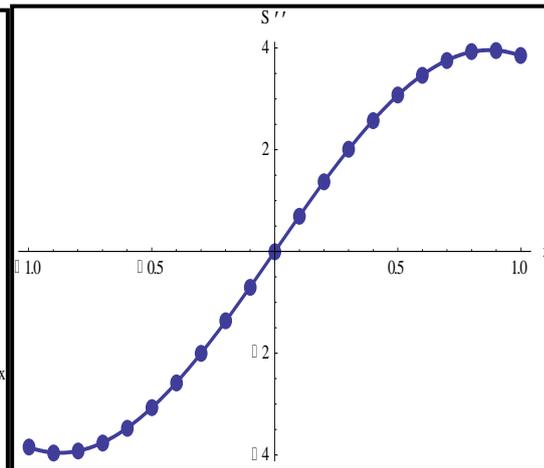
الشكل (12): الحل الشرائحي  $S'(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y'(x)$  — للمسألة (2)



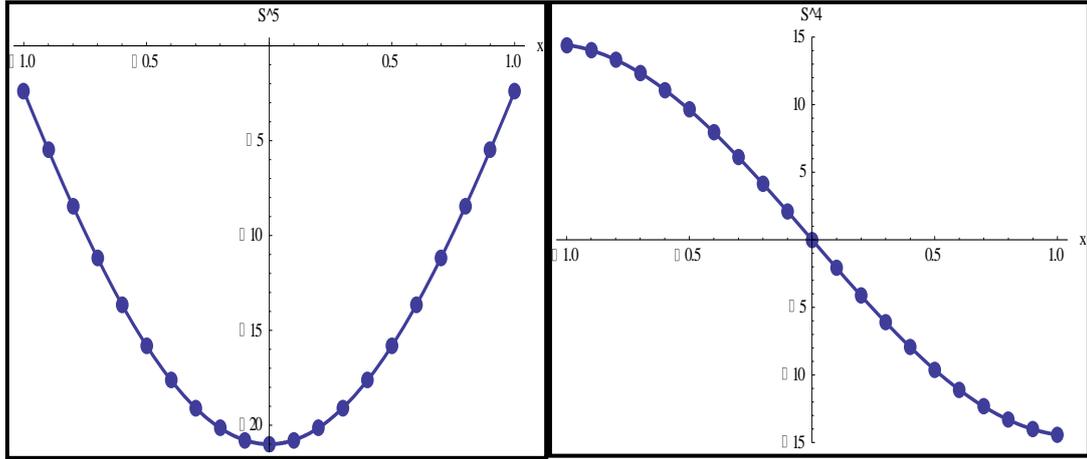
الشكل (11): الحل الشرائحي  $S(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y(x)$  — للمسألة (2)



الشكل (14): الحل الشرائحي  $S'''(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y'''(x)$  — للمسألة (2)

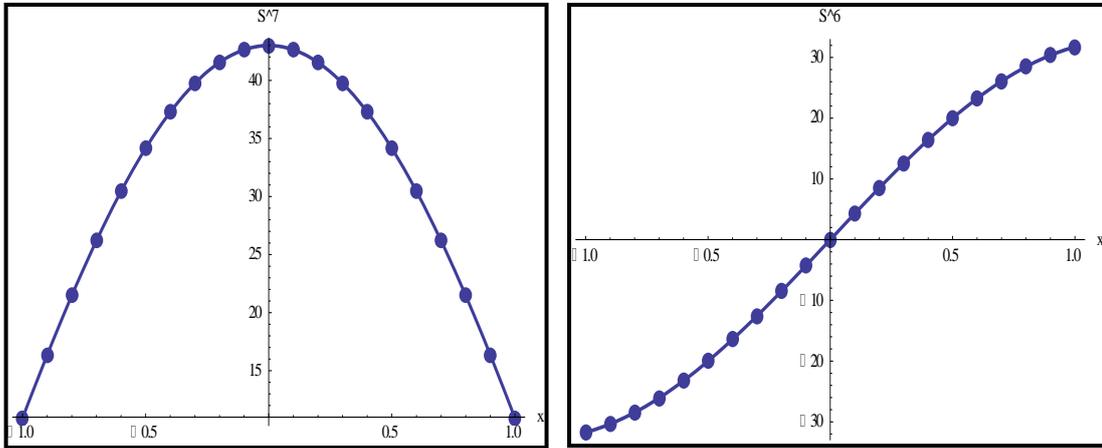


الشكل (13): الحل الشرائحي  $S''(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y''(x)$  — للمسألة (2)



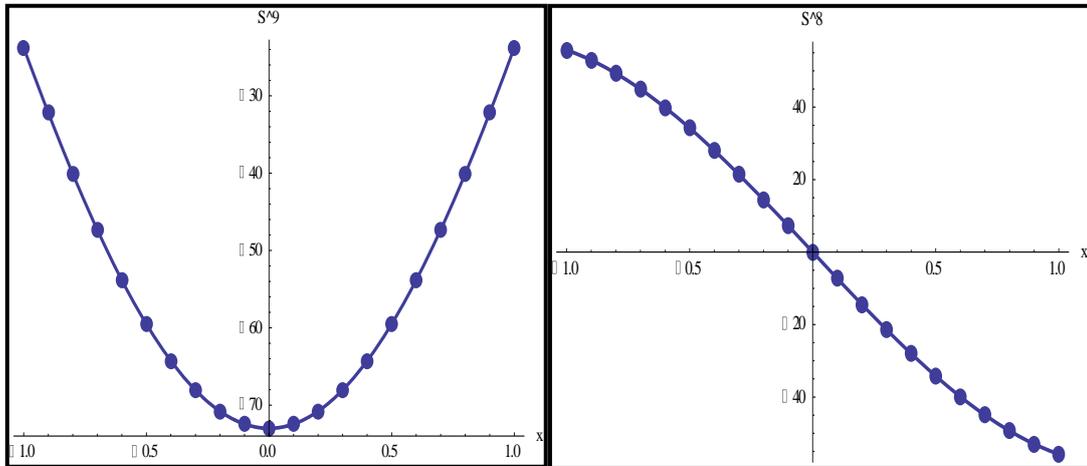
الشكل (16): الحل الشرائحي  $S^{(5)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(5)}(x)$  — للمسألة (2)

الشكل (15): الحل الشرائحي  $S^{(4)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(4)}(x)$  — للمسألة (2)



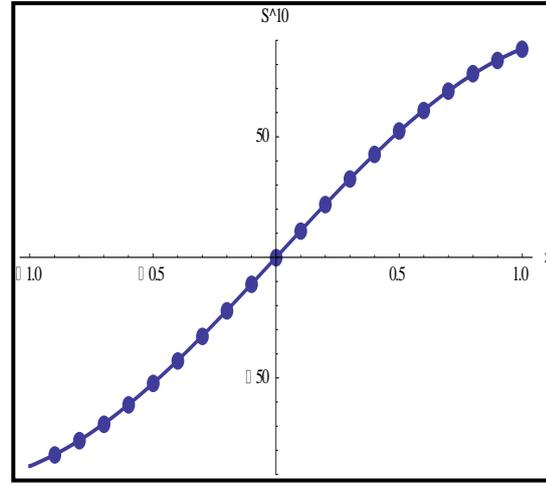
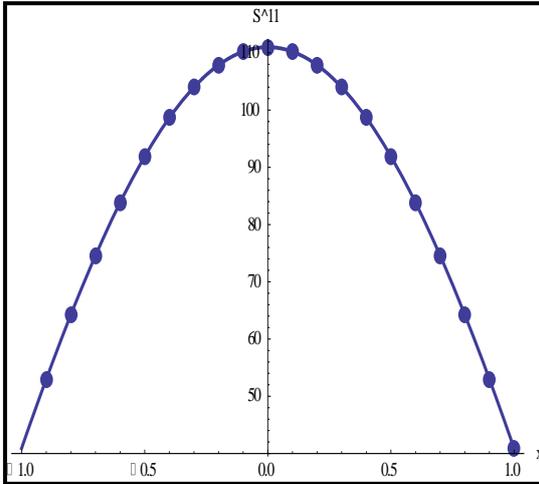
الشكل (18): الحل الشرائحي  $S^{(7)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(7)}(x)$  — للمسألة (2)

الشكل (17): الحل الشرائحي  $S^{(6)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(6)}(x)$  — للمسألة (2)



الشكل (20): الحل الشرائحي  $S^{(9)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(9)}(x)$  — للمسألة (2)

الشكل (19): الحل الشرائحي  $S^{(8)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(8)}(x)$  — للمسألة (2)



الشكل (22): الحل الشرائحي  $S^{(11)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(11)}(x)$  — للمسألة (2)

الشكل (21): الحل الشرائحي  $S^{(10)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(10)}(x)$  — للمسألة (2)

المسألة (3): اختبارنا الثالث لتمثل الحالة المعممة التي يظهر فيها الحل ومشتقاته من جميع المراتب:

$$y^{(12)} + \sum_{i=0}^{11} y^{(i)} = \cos(x) - 1638 \sin(2x) + 3277 \sin(2x), \quad x \in [0, 15],$$

مع الشروط الحدية:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -8, \quad y^{(4)}(0) = 1, \quad y^{(5)}(0) = 32$$

$$y(15) = \cos(15) + \sin(30); \quad y'(15) = 2 \cos(30) - \sin(15)$$

$$y''(15) = -\cos(15) - 4 \sin(30); \quad y^{(3)}(15) = -8 \cos(30) + \sin(15)$$

$$y^{(4)}(15) = \cos(15) + 16 \sin(30); \quad y^{(5)}(15) = 32 \cos(30) - \sin(15)$$

ويعطى الحل التحليلي الدقيق  $y(x) = \cos(x) + \sin(2x)$ .

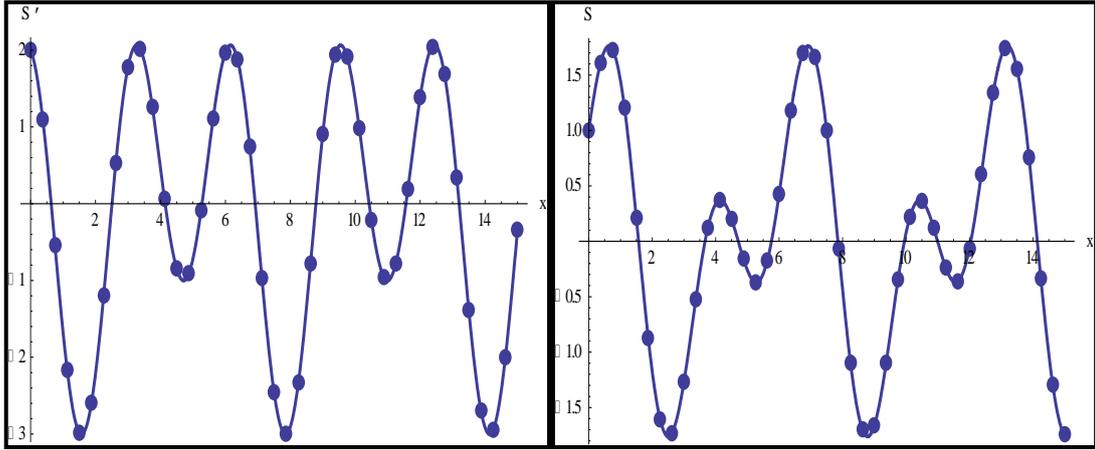
نحسب أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي ومشتقاته حتى المرتبة الحادية عشرة للمسألة وتسجيل

النتائج في الجدول (6). ونرسم في الأشكال (23)–(28) الحل الشرائحي وبعض مشتقاته  $S^{(m)}(x), m = 0, 1, 2, 3, 5, 8$

ومقارنته مع الحل الدقيق ومشتقاته  $y^{(m)}(x), m = 0, 1, 2, 3, 5, 8$  بـ  $N=40$ .

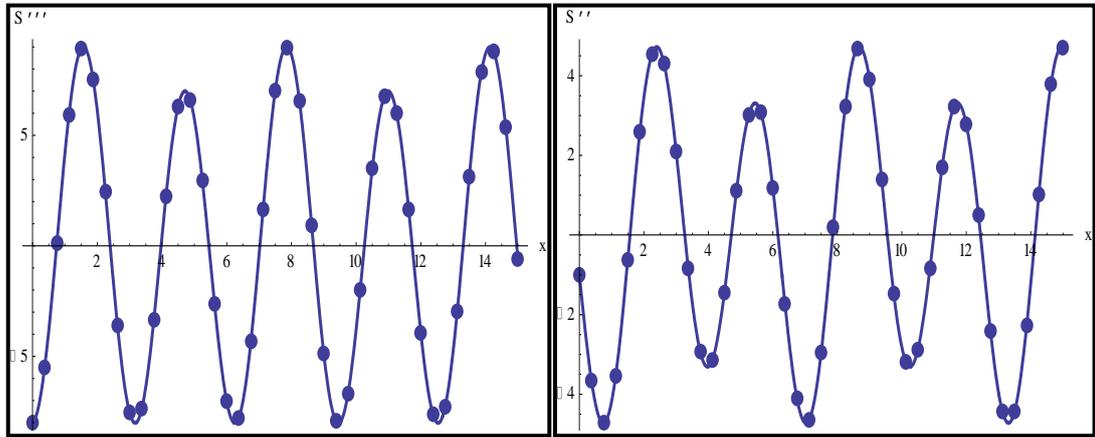
الجدول (6): أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي ومشتقاته للمسألة 3 بـ  $N=40$

|                |             |                 |             |
|----------------|-------------|-----------------|-------------|
| $\delta^{(0)}$ | 6.3249E-15  | $\delta^{(6)}$  | 2.8565 E-11 |
| $\delta^{(1)}$ | 7.2564 E-14 | $\delta^{(7)}$  | 3.5464 E-11 |
| $\delta^{(2)}$ | 3.9964 E-13 | $\delta^{(8)}$  | 6.8653 E-11 |
| $\delta^{(3)}$ | 1.2545 E-12 | $\delta^{(9)}$  | 7.7655 E-11 |
| $\delta^{(4)}$ | 3.6543 E-11 | $\delta^{(10)}$ | 9.8658 E-11 |
| $\delta^{(5)}$ | 1.0737 E-11 | $\delta^{(11)}$ | 1.6366 E-10 |



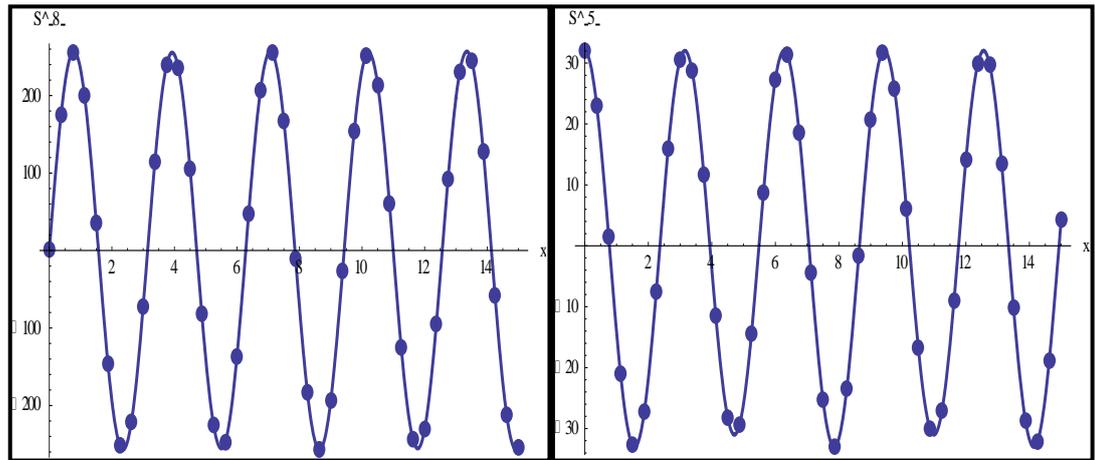
الشكل (24): الحل الشرائحي  $S'(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y'(x)$  — للمسألة (3)

الشكل (23): الحل الشرائحي  $S(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y(x)$  — للمسألة (3)



الشكل (26): الحل الشرائحي  $S'''(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y'''(x)$  — للمسألة (3)

الشكل (25): الحل الشرائحي  $S''(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y''(x)$  — للمسألة (3)



الشكل (28): الحل الشرائحي  $S^{(8)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(8)}(x)$  — للمسألة (3)

الشكل (27): الحل الشرائحي  $S^{(5)}(x)$  : ●●●  
والحل الدقيق:  $y^{(5)}(x)$  — للمسألة (3)

### الاستنتاجات والتوصيات:

تم تطوير تقنية شرائحية بخمس نقاط تجميع بنجاح للحل العددي لمسائل القيم الحدية المعمة من المرتبة الثانية عشرة، فكانت التقنية المقترحة مستقرة ومتقاربة من الرتبة السادسة عشرة. وبعد إجراء اختبارات عددية للطريقة بحل ثلاث مسائل اختبار محلولة بطرق مختلفة في المراجع [1,2,3,9,10,13,14]، أشارت المقارنات والنتائج المدرجة في الجداول (1)–(6) إلى تفوق طريقتنا في الدقة العددية على، طريقة SAWGF [1]، طريقة Ali وآخرون [2]، طريقة C4GM [3]، طريقة Grover and Tomer [9]، طريقة Mirmoradi وآخرون [10]، طريقة Siddiqi and Akram [13]، وطريقة DTM في [14]. وكذلك تبين الأشكال (1)–(28) أن التقنية الشرائحية تستطيع تقديم حل شرائحي يتطابق إلى حد كبير مع الحل الدقيق.

نظراً لما سبق نوصي باستخدام التقنية الشرائحية لحل مثل هذه المسائل، كما نقترح تطوير طرائق شرائحية تجميعية لحل مسائل قيم حدية غير خطية من مراتب عليا.

### المراجع:

1. AL-HAYANI W. *Adomian Decomposition Method with Green's Function for Solving Twelfth-Order Boundary Value Problems*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, No. 8, 2015, 353-368.
2. ALI J., S. ISLAM, M. T. RAHIM and G. ZAMAN, *The Solution of Special Twelfth Order Boundary Value Problems by the Optimal Homotopy Asymptotic Method*. World Applied Sciences Journal, Vol.11, No.3, 2010, 371-378.
3. DOHA E. H., W. M. ABD-ELHAMEED, BASSUONY M. A. *On the Coefficients of Differentiated Expansions and Derivatives of Chebyshev Polynomials of the Third and Fourth Kinds*. Acta Mathematica Scientia, Vol. 35B, No.2, 2015, 326–338.
4. EL-GAMEL M. *Chebyshev Polynomial Solutions of Twelfth-order Boundary-Value Problems*. British Journal of Mathematics & Computer Science, Vol. 6 No. 1, 2015, 13-23.
5. FARAJEYAN K.; N. R. MALEKI; H. R. DOSTBAGLOO, MISAGH F. *Non-Polynomial Spline Approach to the Solution of Twelfth-Order Boundary-Value Problems*. Life Science Journal, Vol. 9, No.4, 2012, 4333- 4337.
6. GROVER M. and TOMER A. K. *New Variational Iteration Decomposition Method for Solving Twelfth Order Boundary Value Problems*. International Journal of the Physical Sciences, Vol. 7 No.1, 2012, 81-88.
7. HYMAVATHI T., P. Vijay Kumar, *Numerical Solution of Twelfth Order Boundary Value Problems Using Homotopy Analysis Method*, Journal of Engineering, Computers & Applied Sciences, Vol.3, No.2, February 2014.
8. LOGHMANI G.B. *Application of Least Square Method to Arbitrary-Order Problems With Separated Boundary Conditions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.222, 2008, 500-510.
9. GROVER M., TOMER A. K. *Comparison of Optimal Homotopy Asymptotic Method with Homotopy Perturbation Method of Twelfth Order Boundary Value Problems*. International Journal on Computer Science and Engineering, Vol. 3 No. 7, 2011, 2739-2747.

10. MIRMORADI H., H. MAZAHERIPOUR, S. GHANBARPOUR, A. BARARI *Homotopy Perturbation Method for Solving Twelfth Order Boundary Value Problems*. International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, Vol. 1, No. 2, 2009, 164-173.
11. MAHMOUD S. M. & S. EHSAAN, *Collocation Spline Method for Solving Linear and Nonlinear Tenth-Order Boundary-Value Problems*, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series, 2017, to Appear.
12. SIDDIQI S. S., AKRAM G. ZULFIQAR, I. *Solution of Twelfth Order Boundary Value Problems Using Variational Iteration Technique*. European Journal of Scientific Research, Vol.33, No.1, 2009, 96-114.
13. SIDDIQI S. S., AKRAM G. *Solutions of twelfth order boundary value problems using thirteen degree spline*. Applied Mathematics and Computation, Vol.182, 2006, 1443–1453.
14. SIRAJ-UI-ISLAM, S. HAQ , J. ALI *Numerical solution of special 12th-order boundary value problems using differential transform method*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol.14, 2009, 1132–1138.
15. ZHI S., LI F. *Numerical solution of high-order differential equations by using periodized Shannon wavelets*. Applied Mathematical Modelling, Vol.38, 2014. 2235-2248.