مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (3) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (3) 2018

تعميم بعض مسائل حساب التحولات إلى فضاء الدوال التحليلية

هناء سكاف *

(تاريخ الإيداع 2 / 2 / 2018. قُبِل للنشر في 7 / 5 / 2018)

☐ ملخّص ☐

يعالج هذا البحث مسألة إيجاد القيمة القصوى الصغرى للدالي التكاملي:

$$\Phi_0(f) = re\int_{\Gamma} F_0\left[f_1(z),...,f_n(z), f_1'(z),...,f_n'(z)\right]dz$$

تحت قيود دالية من النوع $\Phi_1(f) \le 0$ وشروط حدية من النوع $f_k\left[z(a)\right] = A_k, f_k\left[z(b)\right] = B_k$ مع العلم أن $f = (f_1, f_2,..., f_n)$ دالة معرفة في فضاء باناخ للدوال التحليلية في قرص الواحدة و Γ منحن نظامي في هذا القرص.

وقد تم البرهان على أن الشرط اللازم لكي تكون الدالة $f = (f_1, f_2,..., f_n)$ حلاً للمسألة أعلاه هو تحقيقها لجملة المعادلات التفاضلية

$$\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial}{\partial f_k}F_j(f_1,...,f_n') - \frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial f_k'}F_j(f_1,...,f_n')\right) = 0$$

حيث $k = 1,2,...,n$ و $\lambda_0, \lambda_1,..., \lambda_m$ مضاريب لاغرانج.

يحتوي البحث أيضاً على بعض الأمثلة والتطبيقات

الكلمات المفتاحية:
المسألة القصوى
الدالة القصوى
الدالي

* مشرفة على الأعمال – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين ، اللاذقية – سورية

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (3) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (3) 2018

The Generalization of some Problems in Calculus of Variations into the Space of Analytic Functions

Hanaa Skaf*

(Received 2 / 2 / 2018. Accepted 7 / 5 /2018)

□ ABSTRACT □

This paper deals with the following conditional extremal problem: Find the minimum value of the integral functional

$$\Phi_0(f) = re\int_\Gamma F_0[f_1(z),\dots,f_n(z),f_1'(z),\dots,f_n'(z)]dz$$

under some boundary conditions $f_k[z(a)] = A_k$, $f_k[z(b)] = B_k$ and additional constraints of type $\Phi_1(f) \le 0$, where $f = (f_1, f_2,\dots,f_n)$ is some function defined in Banach Space of holomorphic functions in unit disc and Γ is a regular curve in this disc.

It have been shown that the solution $f = (f_1, f_2,\dots,f_n)$ of the above problem satisfies the system of differential equations

$$\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial}{\partial f_k}F_j(f_1,\dots,f_n') - \frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial f_k'}F_j(f_1,\dots,f_n')\right) = 0$$

Where $k = 1,2,\dots,n$ and $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ are the Lagrange Multipliers.

Some applications and additional examples are given.

Key Words:

extremal problem
extremal function
Functional

---

* **Work Supervisor , Department of Mathematics , University of Tishreen, Lattakia, Syria.**

مقدمة

من المسائل الأساسية في حساب التحولات (Calculus of Variations) هي مسألة إيجاد القيمة الصغرى الشرطية للدالي:

$$J(y_1, y_2, ..., y_m) = \int_a^b F[y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x), y_1'(x), ..., y_m'(x)]dx \qquad (1)$$

بشرط أن يكون:

$$I(y_1, y_2, ..., y_m) = \int_a^b G[y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x), y_1'(x), ..., y_m'(x)]dx = l \qquad (2)$$

مع بعض الشروط الإضافية الأخرى على F و G ومشتقاتهما[2].

وقد عممت هذه المسألة أكثر من مرة وفي اتجاهات مختلفة وصولاً إلى ما يعرف اليوم بنظرية الحلول المثلى (Optimization)[4] . وفي هذا المجال يعد مبدأ القيمة القصوى ليوفي– تيخوميروف (Ioffe-Tikhomirov) أداة فعالة لإيجاد الشرط اللازم لوجود القيمة القصوى للداليات في الفضاءات الحقيقية المختلفة[3]. وقد تبين فيما بعد أنه بالإمكان استخدام هذا المبدأ لدراسة المسائل القصوى على الساحة العقدية . وكذلك أصبح ممكناً تعميم دراسة المسألة المطروحة أعلاه في بعض الفضاءات العقدية مثل فضاء باناخ ثم إيجاد الشرط اللازم لوجود الحل لهذه المسائل.

أهمية البحث وأهدافه

تنبع أهمية البحث من كونه متابعة لدراسات سابقة في المسائل القصوى المتعلقة بالداليات العقدية وخصوصاً بعد أن أصبح بالإمكان – كما ذكرنا في المقدمة – استخدام الطرق الحقيقية ،متمثلة بنظرية الأمثليات، في دراسة المسائل القصوى على الساحة العقدية . وفي هذا السياق يهدف هذا البحث إلى دراسة المسائل الشرطية على الساحة العقدية كتعميم لبعض المسائل المعروفة في حساب التحولات .

طرائق البحث ومواده

طريقة البحث المتبعة هي طريقة الأمثليات (Optimization) وتم تحديداً استخدام مبدأ القيمة القصوى (Extremum Principle)) [3] في سبيل إيجاد حلول بعض المسائل الشرطية.

المناقشة والنتائج.

من المعلوم في حساب التحولات أن الشرط اللازم لوجود القيمة الصغرى الشرطية للدالي (1) هو تحقيق $y(x)$ لجملة المعادلات الآتية:

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dz} F'_{y_k'} = 0 \, , \; k = 1,2,...m \, . \qquad (3)$$

المعروفة بمعادلات أولر. في هذا البحث تتم دراسة الدالي (1) على الساحة العقدية أي عندما تكون الدوال $y_1, y_2, ..., y_m$ عقدية مع إضافة بعض القيود الاخرى على المسألة. حيث نحصل على الشرط اللازم لوجود الحل من خلال الحصول على جملة معادلات مشابهة للجملة (3).

5. عرض المسألة في فضاء باناخ

ليكن E فضاء باناخ المؤلف من الدوال التحليلية في قرص الواحدة $D(|z|<1)$. ولنضع:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n), \quad f' = (f_1', f_2', ..., f_n'), \; E^n = E \times E \times ... \times E$$

ولنعرف متتالية الداليات $\Phi_j(f)$ في الفضاء E^n بالشكل:

$$\Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_j[f_1(z), ..., f_n(z), f_1'(z), ..., f_n'(z)]dz, \; j = 0,1,...,m \qquad (4)$$

أو باختصار:

$$\Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_j[f(z), f'(z)]dz, \; j = 0,1,2,...,m \qquad (5)$$

حيث F_j دوال (أو داليات) تحليلية في الفضاء E^n و $f_k(z)$ دوال تحليلية في قرص الواحدة . أما Γ فهو منحن نظامي في القرص D معادلته:

$$\Gamma : z = z(t), \; \alpha \le t \le \beta, \; z \in D$$

ولنبحث عن القيمة القصوى الصغرى (أو العظمى) للدالي $\Phi_0(f)$ بشرط أن يكون

$$\Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_1[f(z), f'(z)]dz \le 0, \; j = 1,2,...,m$$

مع العلم أن

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n), \; f' = (f_1', f_2', ..., f_n'),$$

تدعى الدالة التي يبلغ الدالي $\Phi_0(f)$ من أجلها قيمة قصوى بحل المسألة أو بالدالة القصوى للمسألة ويرمز لها عادة بالرمز $f^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*)$.

بذلك يمكن طرح المسألة السابقة باختصار كما يلي:

مسألة 1. حل المسألة:

$$\Phi_0(f) = re\int_{\Gamma} F_0[f(z), f'(z)]dz \longrightarrow min, \; f \in E^n \qquad (6)$$

$$\Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_1[f(z), f'(z)]dz \le 0, \; j = 1,2,...,m \qquad (7)$$

6. الشرط اللازم لوجود الحل

نظرية1. إذا كان $f^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_n^*)$, حلاً للمسألة 1 فإن هذا الحل يحقق جملة المعادلات التفاضلية:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial f} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F_j}{\partial f'} \right) = 0 \qquad (7)$$

حيث

$$\frac{\partial F_j}{\partial f}=\left(\frac{\partial F_j}{\partial f_1},\frac{\partial F_j}{\partial f_2},...,\frac{\partial F_j}{\partial f_n}\right)\ ,\ f=(f_1,f_2,...,f_n), \quad (8)$$

و $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m$ مضاريب لاغرانج.

البرهان. نشكل دالة لاغرانج [3] للمسألة 1 كما يلي:

$$L(f,f',\lambda)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\,\Phi_j(f)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j re\int_{\Gamma}F_j[f(z),f'(z)]dz=\sum_{j=0}^{m}re\int_{\Gamma}\lambda_j F_j[f(z),f'(z)]dz \quad (9)$$

حيث $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m)$ وكذلك:

$$F_j[f(z),f'(z)]=F_j[f_1(z),...,f_n(z),f_1'(z),...,f_n'(z)].$$

والآن بحسب مبدأ القيمة القصوى [3] تكون الدالة f^* حلاً لهذه المسألة إذا وجدت أعداد $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m$ لا تساوي الصفر دفعة واحدة وتحقق شرط لاغرانج ، وهو انعدام مشتق فريشيه فيها! أي أن :

$$L_f(f^*,f'^*,\lambda)\circ h=0$$

بالنسبة للعنصر h من E^n . وهذا يعني أن المساواة

$$L_f(f^*,f'^*,\lambda)\circ h=re\int_{\Gamma}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial F_j}{\partial f}h+\frac{\partial F_j}{\partial f'}h'\right)dz=0$$

محققة في نقطة القيمة القصوى f^* . والآن وبدون التخلي عن العمومية نستطيع اعتبار المنحني Γ قطعة مستقيمة واصلة بين 0 و z_0 معادلتها:

$$\Gamma: z=z_0t,\ 0\le t\le 1,\ |z_0|<1$$

وأن $h(0)=0,\ \ h(z_0)=0$. في هذه الحالة يكون

$$L_f=re\int_0^1\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial F_j}{\partial f}h(z_0t)+\frac{\partial F_j}{\partial f'}h'(z_0t)\right)z_0dt=0$$

وبعد التكامل بالتجزئة نحصل على المساواة:

$$\int_0^1 re\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial F_j}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_j}{\partial f'}\right)z_0h(z_0t)dt=0$$

وهذه العلاقة محققة من أجل كل دالة $h\in E^n$ يحقق للشرط $h(0)=h(z_0)=0$ ، حيث $z_o\in D$. والآن بحسب التمهيدية الأساسية في حساب التحولات [2] وتعميمها [1] نحصل على المعادلة :

$$\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial F_j}{\partial f}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_j}{\partial f'}\right)=0$$

وهذه المعادلة صحيحة في كل نقطة من القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و z_0 . من تحليلية الدوال F_j نستنتج صحة العلاقة السابقة في كل قرص الواحدة. وهو المطلوب.

7. حل المسألة بشروط حدية

إذا كانت المسألة القصوى 1 تحتوي على شروط تابعية من النوع:

$$\Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_j\left[f(z), f'(z)\right]dz = \ell\,,\;\; j = 1,2,...,m$$

فإننا نبدل كل شرط منها بشرطين من نوع المتراجحات :

$$\Phi_j(f) - \ell \le 0\,,\;\; -\left[\Phi_j(f) - \ell\right] \le 0$$

ثم نطبق النظرية 1 فنحصل على جملة معادلات مشابهة للجملة (7) . أما إذا احتوت المسألة 1 على شروط حدية من النوع:

$$f_k\left[z(a)\right] = A_k\,,\; f_k\left[z(b)\right] = B_k\,, k = 1,2,...,n$$

فإننا نبدل كل شرط منها بأربعة شروط مكافئة له من نوع المتراجحات :

$$re\left\{f_k\left[z(a)\right] - A_k\right\} = 0,\;\; im\left\{f_k\left[z(a)\right] - A_k\right\} = 0,$$
$$im\left\{f_k\left[z(b)\right] - B_k\right\} = 0,\;\; im\left\{f_k\left[z(b)\right] - B_k\right\} = 0$$

ثم نطبق النظرية 1مرة أخرى آخذين بالحسبان أن مشتق فريشيه للمقادير الثابتة التي تظهر في دالة لاغرانج سيكون معدوماً من اجل أي عنصر h محقق للشرطين $h(a) = 0,\; h(b) = 0$ في الفضاء المدروس .

في هذه الحالة نستطيع معالجة المسألة بالشكل الآتي:

مسألة 2. حل المسألة :

$$(10) \qquad \Phi_0(f) = re\int_{\Gamma} F_0\left[f_1(z),..., f_n(z), f_1'(z),..., f_n'(z)\right]dz \to min\,,\;\; f \in E^n$$

$$(11) \qquad \Phi_j(f) = re\int_{\Gamma} F_j\left[f_1(z),..., f_n(z), f_1'(z),..., f_n'(z)\right]dz \le 0\,,\;\; j = 1,2,...,m$$

$$(12) \qquad f_k\left[z(a)\right] = A_k\,,\; f_k\left[z(b)\right] = B_k\,, k = 1,2,...,n$$

في حالة هذه المسألة يكون لدالة لاغرانج الشكل:

$$L(f, f', \lambda) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, \Phi_j(f) + C_n$$

حيث $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ و C_n ثوابت ناتجة عن الشروط الحدية . ويكون الشرط اللازم لوجود الحل (بشكل مشابه للنظرية1) هو أن يكون:

$$L_f\left(f^*, f'^*, \lambda\right) \circ h = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial f} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F_j}{\partial f'} \right) = 0$$

وبذلك تكون النظرية الآتية صحيحة:

نظرية2. إذا كان f^* حلاً للمسألة 2 فإن هذا الحل يحقق جملة المعادلات التفاضلية:

$$(13) \qquad L_{f_k} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial f_k} F_j\left(f_1, ..., f_n'\right) - \frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial f_k'} F_j\left(f_1, ..., f_n'\right) \right) = 0$$

حيث $k = 1,2,...,n$ و $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ مضاريب لاغرانج.

ملاحظة1. تعد الجملة (13) مكافئة للجملة (7) وهذا الشكل يفيد في التطبيقات .

ملاحظة2. باستخدام الشروط الإضافية نستطيع إيجاد ثوابت التكامل وبالتالي تحديد حل المسألة القصوى المعطاة بدقة.

ملاحظة3.بحسب مبدأ القيمة القصوى فإن $\lambda_0 \neq 0$ عند وجود الحل وعندئذ يمكن القبول أن $\lambda_0 = 1$.

تطبيقات ونتائج

سوف نعرض فيما يلي بعض التطبيقات والأمثلة للنتائج السابقة.

مسألة 3. في فضاء الدوال التحليلية E حل المسألة الآتية:

$$\Phi_0(f) = re\int_\Gamma \left(f_1 f_1' + f_2 f_2' + \ldots + f_n f_n'\right) dz \to min\,,\ f \in E$$

$$\Phi_1(f) = re\int_\Gamma \left(f_1'^2 + f_2'^2 + \ldots + f_n'^2\right) dz \le 0$$

$$\Phi_2(f) = re\int_\Gamma \left(f_1 + f_2 + \ldots + f_n\right) dz \le 0$$

$$f_k(0) = 0,\quad f_k(z_0) = B_k\,,\ k = 1,2,\ldots,n$$

$$\Gamma : z = z_0 t,\ 0 \le t \le 1,\ |z_0| < 1$$

الحل. لكي يكون $f^* = \left(f_1^*,\ldots,f_n^*\right)$ حلاً للمسألة 3 يجب أن تحقق الدوال:

$$F_0 = f_1 f_1' + f_2 f_2' + \ldots + f_n f_n'$$

$$F_1 = f_1'^2 + + f_2'^2 + \ldots + f_n'^2$$

$$F_2 = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

المعادلة التفاضلية (13) (بحسب النظرية 2). في سبيل تحقيق ذلك نضع العلاقة(13)بالشكل:

$$L_{f_k} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k} F_j\left(f_1,\ldots,f_n'\right) - \frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial}{\partial f_k'} F_j\left(f_1,\ldots,f_n'\right) = 0 \qquad (14)$$

حيث $m = 2$ ثم نحسب المشتقات:

$$\sum_{j=0}^{2} \lambda_j \frac{\partial}{\partial f_1} F_j = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial f_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial f_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial f_1} = \lambda_0 f_1' + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2$$

$$\sum_{j=0}^{2} \lambda_j \frac{\partial}{\partial f_1'} F_j = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial f_1'} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial f_1'} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial f_1'} = \lambda_0 f_1 + 2\lambda_1 f_1' + \lambda_2 \cdot 0$$

وبتعويض ذلك في (14)يكون:

$$L_{f_1} = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k} F_j - \frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial}{\partial f_k'} F_j = \lambda_0 f_1' + \lambda_2 - \frac{d}{dz}\left(\lambda_0 f_1 + 2\lambda_1 f_1'\right)$$

$$= \lambda_0 f_1' + \lambda_2 - \lambda_0 f_1' - 2\lambda_1 f_1'' = \lambda_2 - 2\lambda_1 f_1'' = 0$$

نستنتج من ذلك أن الدالة f_1^* تحقق المعادلة التفاضلية: $f_1'' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$f_1 = a_1 z^2 + b_1 z + c_1\,,\ a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

وهكذا من أجل الحد الذي ترتيبه k يكون:

$$\sum_{j=0}^{2}\lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k}F_j=\lambda_0\frac{\partial F_0}{\partial f_k}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial f_k}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial f_k}=\lambda_0 f_k'+\lambda_2$$

$$\sum_{j=0}^{2}\lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k'}F_j=\lambda_0\frac{\partial F_0}{\partial f_k'}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial f_k'}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial f_k'}=\lambda_0 f_k+2\lambda_1 f_k'$$

وبالتعويض في (14)يكون:

$$L_{f_k}=\sum_{j=0}^{2}\lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k}F_j-\frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{2}\frac{\partial}{\partial f_k'}F_j=\lambda_0 f_1'+\lambda_2-\frac{d}{dz}\left(\lambda_0 f_k+2\lambda_1 f_k'\right)$$

$$=\lambda_0 f_k'+\lambda_2-\lambda_0 f_k'-2\lambda_1 f_k''=\lambda_2-2\lambda_1 f_1''=0$$

وبذلك يكون

$$f_k''=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=a_1$$

ويكون الحل العام لهذه المعادلة كما سبق:

$$f_k=a_1z^2+b_kz+c_k\ ,\ k=1,2,...,n$$

نستنتج من ذلك أن عناصر الدالة القصوى $f^*=\left(f_1^*,...,f_n^*\right)$ للمسألة هي كثيرات حدود من الشكل:

$$f_k^*=a_1z^2+b_kz+c_k\ ,k=1,2,...,n$$

حيث $a_1=\lambda_2/\lambda_1$. ومن الشروط الحدية $f_k(0)=0,\ f_k(z_0)=B_k$ نجد بقية الثوابت :

$$c_k=0\ ,\ b_k=\frac{B_k-z_0^2}{z_0}\ ,\ k=1,2,...,n$$

مسألة 4. في فضاء الدوال التحليلية E^n حل المسألة الآتية:

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}\left(a_1 f_1^2+...+a_n f_n^2+b_1 f'^2_1+...+b_n f'^2_n\right)dz\to min\ ,\ f\in E$$

$$\Phi_k(f)=re\int_{\Gamma}\left(f_k f_k'\right)dz\le 0$$

$$f_k(0)=0,\quad f_k(z_0)=B_k\ ,\ \ k=1,2,...,n$$

$$\Gamma: z=z_0t,\ 0\le t\le 1,\ |z_0|<1$$

الحل. لكي يكون $f^*=\left(f_1^*,...,f_n^*\right)$ حلاً للمسألة 4 يجب أن تحقق الدوال:

$$F_0=a_1 f_1^2+...+a_n f_n^2+b_1 f'^2_1+...+b_n f'^2_n$$

$$F_k=f_k f_k'\ ,\ \ k=1,2,...,n$$

المعادلة التفاضلية (13) (وبالتالي(14)) مع ملاحظة أن $m=n$ في هذه الحالة. في سبيل التحقق من ذلك لدينا، من أجل الحد العام k ، على التوالي:

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k}F_k=2a_k\lambda_0 f_k'+\lambda_k f_k'$$

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_j \frac{\partial}{\partial f_k'}F_k=2b_k\lambda_0 f_k'+\lambda_k f_k$$

وبالتعويض في (14)يكون:

$$L_{f_k}=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\frac{\partial}{\partial f_k}F_j-\frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial}{\partial f_k{}'}F_j=2a_k\lambda_0 f_k{}'+\lambda_k f_k{}'-\frac{d}{dz}\left(2b_k\lambda_0 f_k{}'+\lambda_k f_k\right)$$

$$=2a_k\lambda_0 f_k+\lambda_k f_k{}'-2b_k\lambda_0 f_k{}''+\lambda_k f_k{}'=2a_k\lambda_0 f_k-2b_k\lambda_0 f_k{}''=0$$

وبذلك يكون

$$a_k f_k-b_k f_k{}''=0$$

وبالتالي

$$f_k{}''-A_k=0\,,\; a_k/b_k=A_k$$

والحل العام لهذه المعادلة–كما نعلم– هو:

$$f_k(z)=c_k e^{A_k z}+d_k e^{-A_k z}.$$

لإيجاد الثوابت c_k, d_k, نستفيد من الشروط الحدية $f_k(0)=0,\; f_k(z_0)=B_k$ فنجد من الشروط الأولى أن:

$c_k=-d_k$, وبالتالي:

$$f_k(z)=c_k e^{A_k z}-c_k e^{-A_k z}=c_k\left(e^{A_k z}-e^{-A_k z}\right)=c_k\sinh A_k z$$

ومن الشروط الثانية:

$$c_k=\frac{B_k}{\sinh A_k z_0}$$

نستنتج من ذلك أن عناصر الدالة القصوى $f^*=\left(f_1^*,\ldots,f_n^*\right)$ للمسألة هي دوال من الشكل:

$$f_k^*(z)=\frac{B_k}{\sinh A_k z_0}\sinh\frac{a_k}{b_k}z\,,\quad k=1,2,\ldots,n\;.$$

كحالة خاصة للمسألة السابقة نورد المثال الآتي:

مسألة 4. في فضاء الدوال التحليلية E حل المسألة الآتية:

$$\Phi_0(f)=re\int_{\Gamma}\left(f^2(z)+f'^2(z)\right)dz\to min\,,\; f\in E$$

$$\Phi_1(f)=re\int_{\Gamma}\left(f(z)f'(z)\right)dz\le 0$$

$$f(0)=0,\quad f(z_0)=1$$

$$\Gamma: z=z_0t,\; 0\le t\le 1,\; |z_0|<1$$

الحل. هذه المسألة هي حالة خاصة من المسألة 4 حيث:

$$n=m=1\,,\quad a_1=b_1=1\,,\; B_1=1$$

ولذلك سيكون حل المسألة هذه متمثلاً بالدالة القصوى :

$$f^*(z)=\frac{1}{\sinh z_0}\sinh z$$

الاستنتاجات والتوصيات

1- بالإمكان تعميم المسألة السابقة إلى فضاءات أخرى وبداليات متعددة المتحولات حيث يمكن الحصول على تعميمات أخرى لمسائل في حساب التحولات مثل مسألة لاغرانج مسألة أولر- بواسون).

2- توجيه طلاب الدراسات العليا في الرياضيات (تخصص تحليل رياضي) إلى امكانية الاستفادة من المواضيح المطروحة في هذا البحث لطرح مواضيع جديدة ذات صلة يتضمونوها في أطروحاتهم.

المراجع:

[1] H.BADDOUR, S. TARABEH, *The Generalization of Euler- Lagrange Equation into Complex Domains*. Tichreen Univ. Jour. Basic Sci. Series. Vol(31) N0 (2)2009

[2] GELFAND, I. FOMIN, S. *Calculus of Variations* (Russian). Moscow 1979.[3] IOFFE, A.D. TICHOMIROV, W.I. *The theory of extremal problems* North- Holland, Amsterdam, 1979.

[4] PONTRIGIN, S.BOLTIANSKI, V.GGAMRKLIDZE, R.VMISHCHENKO, E.F, *The mathematical theory of optimal processes* , Wiley (1962).

[5] ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[6] TICHOMIROV, V.M. *Fundamental principles of the theory of extremal problems*, Wiley & Sons 1986.