مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

# دراسة حول إيجاد الحلول التامة لمعادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال التابعة للزمن باستخدام طريقة دالة الظل الزائدي

**د. سامي انجرو** *

**(تاريخ الإيداع 2 / 5 / 2018. قُبِل للنشر في 26 / 8 /2018)**

## □ ملخّص □

هَدَفَ هذا البحث إلى إيجاد حلول تامة صريحة ذات موجة منعزلة (soliton wave solutions)، لمعادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال التابعة للزمن، باستخدام طريقة دالة الظل الزائدي بتحويل موجي لاخطي في الحالة العامة، وتبين النتائج التي حصلنا عليها أن الحلول التامة تتأثر بالطبيعة اللاخطية للموجة، كما يتبين أن هذه الطريقة فعالة ومناسبة لحل مثل هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي تعتبر نماذج لمسائل تطبيقية في الفيزياء والكيمياء والنمو السكاني.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة زيلدوفيتش – الحل التام – طريقة دالة الظل الزائدي – الحل ذو الموجة المنعزلة – تحويل موجي – معادلة تفاضلية جزئية غير خطية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سوريا.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

# A Study about Finding Exact Solutions for Zeldovich Equation with Time-Dependent Coefficients by Using the Tanh Function Method

**Dr. Sami Injrou** *

**(Received 2 / 5 / 2018. Accepted 26 / 8 /2018)**

## ☐ ABSTRACT ☐

In this work, we have been found explicit exact soliton wave solutions for Zeldovich equation with time-dependent coefficients, by using the tanh function method with nonlinear wave transform, in general case. The results obtained shows that these exact solutions are affected the nonlinear nature of the wave variable, it is also shown that this method is effective and appropriate for solving this kind of nonlinear PDEs, which are models of many applied problems in physics, chemistry and population evolution.

**Keywords:** Zeldovich equation - exact solution - tanh function method – soliton wave solution – wave transform - nonlinear partial differential equations.

* **Associated Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

## مقدمة

تستخدم معادلات التطور التفاضلية الجزئية غير الخطية بشكل واسع لوصف العديد من الظواهر المعقدة المصادفة في الفيزياء والكيمياء والهندسة ...، ونظراً للدور الكبير الذي تلعبه الحلول التامة لهذه المعادلات في فهم هذه الظواهر. كان إيجاد هذه الحلول، مجال بحث الكثير من الرياضيين والفيزيائيين، ولأن المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الأمثال التابعة للزمن أكثر ملائمة للحياة الواقعية سواء في المسائل الفيزيائية أو الحيوية أو الكيميائية، حيث تكون الوسائط متحولة وتتغير مع مرور الزمن. ركز معظم الرياضيون العاملون في هذا المجال جهودهم على تقديم حلول تامة لمثل هذا النوع من المعادلات، حيث قدم *Yang* و آخرون في [1] حلول تحليلية لمعادلة*KDV* المعممة ذات التخامد والتشتت التابعين للزمن، كما قدم *Wazwaz* و*Triki* في [2] حلول تامة ذات موجة منعزلة لمعادلة فيتزهوغ – ناغومو ذات الأمثال التابعة للزمن، معتمدين على طريقة المعادلة المساعدة وطريقة دالة الظل الزائدي *tanh function method*، كذلك في [3]، قدم *Wazwaz* و*Triki* حلول تامة ذات موجة جوالة لمعادلة *KDV* من المرتبة الخامسة ذات الأمثال التابعة للزمن مستخدمين طريقة *sine–cosine*، وكذلك استخدم *Guner* و *Bekir* في [4] طريقة *sine–cosine* للحصول على حلول دقيقة لمعادلة *KDV* ذات الأمثال المعدلة التابعة للزمن، وقدم مؤخراً *Baishya* في [5] حلول دقيقة لمعادلة نيويل وايتهيد سغل مع قانون الطاقة غير الخطية ذات الأمثال التابعة للزمن مستخدماً طريقة دالة الظل الزائدي *tanh function method*.

تعد معادلة زيلدوفيتش *(Zildovich)* نتاج أعمال الباحث *Zildovich* في [6،7]، وهي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2(1-u) \qquad (1)$$

وتأتي هذه المعادلة من نظرية الاحتراق، إذ يمثل $u(x,t)$ درجة الحرارة بينما يمثل الحد الآخر في الطرف الأيمن توليد الحرارة الناتجة عن الاحتراق، ودرست هذه المعادلة بشكل واسع في [8]، كما تعد حالة خاصة من المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 (u^m)}{\partial x^2}+\frac{\partial\left(u(b_0+b_1u^p)\right)}{\partial x}+u^{2-m}(1-u^p)(c_0+c_1u^p) \qquad (2)$$

عندما $m=p=1$ و $b_0=b_1=c_0=0$ و $c_1=1$، ثم ظهرت بعد ذلك معادلة زيلدوفيتش ذات أمثال الثابتة في [9]، ولها الشكل الآتي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+qu^2+ru^3=0 \qquad (3)$$

حيث $u(x,t)$ هي الدالة المجهولة، و $p$ معامل الانتقال و $q$ و $r$ معاملين خاصين يلعبان دوراً هاماً في مسألة النمو السكاني [10]، إذ تصف هذه المعادلة معدل تزايد السكان حيث $q$ و $r$ تمثل توزيعات الموارد التي تتحكم في الظواهر الحيوية مثل الولادة والموت [10]، كما ينبغي لنا أن نلاحظ أن هناك تشابه كبير بين الانموذج الحيوي وانموذج الاحتراق في الكيمياء [10،11]، ولقد قدم *Korkmaz* في [9] حلول عقدية مستخدماً معادلة *Sine–Gordon* التفاضلية الجزئية كمعادلة مساعدة. سنحاول في هذه المقالة تقديم حلول تحليلية دقيقة لمعادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال التابعة للزمن المعطاة بالعلاقة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+p(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(t)u^2+r(t)u^3=0 \qquad (4)$$

حيث أن $p(t)$ و $q(t)$ و $r(t)$ دوال حقيقة قابلة للمكاملة مع الأخذ بعين الاعتبار أنه عندما $p(t)$ و $q(t)$ و $r(t)$ ثوابت فإننا نحصل على معادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال الثابتة (3)، بينما نحصل على معادلة زيلدوفيتش التقليدية (1) عندما $p(t)=-1$ و $q(t)=-1$ و $r(t)=1$. سنعتمد في حل المعادلة (4) على طريقة دالة الظل الزائدي المستخدمة من قبل *Wazwaz* و*Triki* في [2]، حيث تعود هذه الطريقة إلى *Malfiet* في عام 1992 في المرجع [12].

## أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى حل معادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال التابعة للزمن بطريقة دالة الظل الزائدي، فهو يعتبر في غاية الأهمية، لأنه يقدم حلولاً تامة صريحة لهذه المعادلة، حيث تلعب هذه الحلول دوراً كبيراً في فهم العديد من الظواهر التي تواجه الباحثين في المجالات العلمية التطبيقية مثل الكيمياء والنمو السكاني.

## طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات غير الخطية وبرامج الحسابات الرياضية الصيغية.

## النتائج والمناقشة:

سنعرض أولاً طريقة دالة الظل الزائدي *Tanh Function Method* :

### طريقة دالة الظل الزائدي *Tanh Function Method* :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية، بمتحولين مستقلين فقط $x$ و $t$، الآتية:

$$P\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \ldots\right)=0 \tag{5}$$

حيث أن $u(x,t)$ الدالة المجهولة و $P$ كثيرة حدود تابعة لـ $u(x,t)$ ومشتقاته الجزئية.

تتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

1− نستخدم متحول الموجة [13] الآتي:

$$\xi = x - c(t)t \tag{6}$$

حيث أن $c(t)$ سرعة الموجة وهي دالة تابعة للزمن مستمرة تعين لاحقاً ومشتقها $c'(t)$ أيضاً دالة مستمرة، وبالتالي تتحول المعادلة التفاضلية الجزئية (5) إلى معادلة تفاضلية عادية غير خطية بالمجهول $u(\xi)$:

$$Q\left(u, u', u'', u''', \ldots\right)=0 \tag{7}$$

حيث $Q$ كثيرة حدود تابعة لـ $u(\xi)$ ومشتقاته.

2− تدخل الطريقة القياسية لدالة الظل الزائدي المتحول المستقل [15،14،12]:

$$Y = \tanh(\mu\xi) \;;\; \xi = x - c(t)t \tag{8}$$

حيث $\mu$ معامل يحدد لاحقاً، يؤدي ذلك إلى تغيير المشتقات كما يأتي:

$$\frac{d}{d\xi} = \mu(1-Y^2)\frac{d}{dY} \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -2\mu^2 Y(1-Y^2)\frac{d}{dY} + \mu^2(1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2} \tag{10}$$

3- تفرض طريقة دالة الظل الزائدي أن حل المعادلة (7) يكتب بالشكل الآتي [16]:

$$u(\xi) = S(Y) = \sum_{i=0}^{m} a_i Y^i \tag{11}$$

حيث أن $a_i$، من أجل $i = 0,1,...,m$، مع $a_m \neq 0$، أمثال تعين لاحقاً.

4- يحسب العدد الصحيح الموجب $m$، بإجراء موازنة التجانس بين المشتق ذو المرتبة الأعلى مع الحد غير الخطي الأعلى في المعادلة الناتجة عن تعويض العلاقات (9) و(10) و(11) في المعادلة (7). حيث تعرف درجة $u(\xi)$، $\deg(u(\xi)) = m$، ومنه وبشكل مماثل نجد:

$$\deg\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = m + p \quad , \quad \deg\left(u^p\left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^j\right) = mp + j(m+r)$$

ثم نطابق أمثال قوى $Y$ بالصفر، لنحصل على جملة من المعادلات غير الخطية، نحلها باستخدام برامج الحسابات الصيغية الرياضية مثل Maple أو Mathematica، لنحصل بذلك على قيم الأمثال $a_i$، من أجل $i = 0,1,...,m$، و $\mu$ و $c(t)$، وهكذا نكون قد حددنا $u(x,t)$ حل المعادلة التفاضلية الجزئية (5).

## حلول تامة لمعادلة زيلدوفيتش باستخدام طريقة دالة الظل الزائدي:

باستخدام التحويل الموجي (6) وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية (4)، مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left[c(t) + \frac{dc(t)}{dt}t\right]\frac{du(\xi)}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}$$

نحصل على المعادلة التفاضلية العادية للدالة المجهولة $u(\xi)$ الآتية:

$$-\left[c(t) + \frac{dc(t)}{dt}t\right]u' + p(t)u'' + q(t)u^2 + r(t)u^3 = 0 \tag{12}$$

بفرض أنه يمكن كتابة حل المعادلة (12) بالشكل (11)، ولدينا:

$$\deg\left(u(\xi)^3\right) = 3m \quad , \quad \deg\left(\left(\frac{d^2 u}{d\xi^2}\right)\right) = m + 2$$

عندئذ بموازنة تجانس $u^3$ مع $u''$، نجد أن $3m = m + 2$، ومنه $m = 1$، وبالتعويض في (11)، نحصل على:

$$u(\xi) = a_1 Y + a_0 \;;\; Y = \tanh(\mu\xi) \tag{13}$$

حيث $a_0$ و $a_1$ معاملان، يطلب تحديدهما. وبالتالي تكون مشتقات الدالة المجهولة $u(\xi)$:

$$\frac{du}{d\xi}=a_1\mu\left(1-Y^{2}\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=-2a_1\mu^2Y\left(1-Y^{2}\right)$$

نعوض العلاقة (13) في المعادلة التفاضلية (12)، فنحصل على:

$$C_0+C_1Y+C_2Y^{2}+C_3Y^{3}=0 \qquad (14)$$

حيث:

$$C_0=-\left(c(t)+\frac{dc(t)}{dt}t\right)a_1\mu+q(t)a_0^2+r(t)a_0^3$$

$$C_1=-2p(t)\mu^2a_1+2q(t)a_0a_1+3r(t)a_0^2a_1$$

$$C_2=\left(c(t)+\frac{dc(t)}{dt}t\right)a_1\mu+q(t)a_1^2+3r(t)a_0a_1^2$$

$$C_3=2p(t)\mu^2a_1+r(t)a_1^3$$

بجعل:

$$C_0=0\ ,C_1=0\ ,C_2=0\ ,C_3=0 \qquad (15)$$

نحصل على الجملة غير الخطية ذات المجاهيل $a_0$ و $a_1$ و $c(t)$ و $\mu$، وبحل هذه الجملة مستخدمين برنامج الحسابات الرياضية الصيغية Maple، نحصل على الحالات الآتية:

**<u>حالة 1:</u>** إذا كان:

$$c(t)=\frac{\int\left(\frac{-q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_1}{t},\ \mu=\frac{-q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}},\ a_0=\frac{-q(t)}{2r(t)},\ a_1=\frac{q(t)}{2r(t)}$$

وبالتعويض في (13) نحصل على حل المعادلة (4):

$$u(x,t)=\frac{-q(t)}{2r(t)}+\frac{q(t)}{2r(t)}\tanh\left(\frac{-q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}}\left(x+\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_1\right)\right) \qquad (16)$$

**<u>حالة 2:</u>** إذا كان:

$$c(t)=\frac{\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_2}{t},\ \mu=\frac{q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}},\ a_0=\frac{-q(t)}{2r(t)},\ a_1=\frac{q(t)}{2r(t)}$$

وبالتعويض في (13) نحصل على حل المعادلة (4):

$$u(x,t)=\frac{-q(t)}{2r(t)}+\frac{q(t)}{2r(t)}\tanh\left(\frac{q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}}\left(x-\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_2\right)\right) \qquad (17)$$

**<u>حالة 3:</u>** إذا كان:

$$c(t)=\frac{\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_3}{t},\ \mu=\frac{-q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}},\ a_0=\frac{-q(t)}{2r(t)},\ a_1=\frac{-q(t)}{2r(t)}$$

وبالتعويض في (13) نحصل على حل المعادلة (4):

$$u(x,t)=\frac{-q(t)}{2r(t)}-\frac{q(t)}{2r(t)}\tanh\left(\frac{-q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}}\left(x-\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_3\right)\right) \quad (18)$$

**<u>حالة 4:</u>** إذا كان:

$$c(t)=\frac{\int\left(\frac{-q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_4}{t},\ \mu=\frac{q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}},\ a_0=\frac{-q(t)}{2r(t)},\ a_1=\frac{-q(t)}{2r(t)}$$

وبالتعويض في (13) نحصل على حل المعادلة (4):

$$u(x,t)=\frac{-q(t)}{2r(t)}-\frac{q(t)}{2r(t)}\tanh\left(\frac{q(t)}{2\sqrt{-2r(t)p(t)}}\left(x+\int\left(\frac{q(t)\sqrt{-2r(t)p(t)}}{2r(t)}\right)dt+c_4\right)\right) \quad (19)$$

حيث $c_1$ و $c_2$ و $c_3$ و $c_4$ ثوابت المكاملة.

لنضع $p(t)=-1$ و $q(t)=-1$ و $r(t)=1$، أي لدينا حالة معادلة زيلدوفيتش التقليدية (1)، بالتالي بالتعويض في (16) سيكون لدينا الحل:

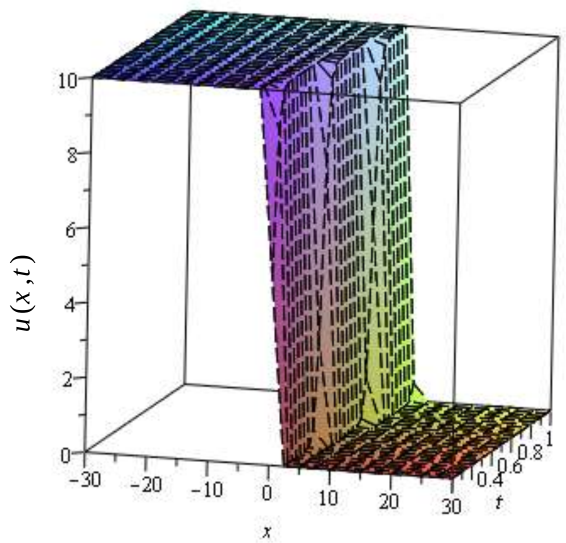
$$u(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right) \quad (20)$$

حيث اخترنا الثابت الكيفي $c_1=0$، وهذه النتيجة متوافقة مع نتيجة المرجع [8]، حيث لدينا هناك معادلة زيلدوفيتش التقليدية تقبل حلاً ذو موجة متقدمة من1 إلى 0 من أجل سرعة الموجة $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

لنأخذ الآن حالة معادلة زيلدوفيتش ذات الأمثال الثابتة (3) ولنضع $p(t)=-1$ و $q(t)=-10$ و $r(t)=1$، بالتالي بالتعويض في الحالة الرابعة نحصل على الحل:

$$u(x,t)=5+5\tanh\left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{2}t\right)\right) \quad (21)$$

وهذا متوافق أيضاً مع نتائج المقالة [9]، إذ لدينا هنا أيضاً أن $u\to 10$ عندما $x\to-\infty$، وكذلك $u\to 0$ عندما $x\to\infty$، أي أنه يحافظ على شكله وارتفاعه أثناء العبور، كما في الشكل (1) وأيضاً لدينا نفس الحل.



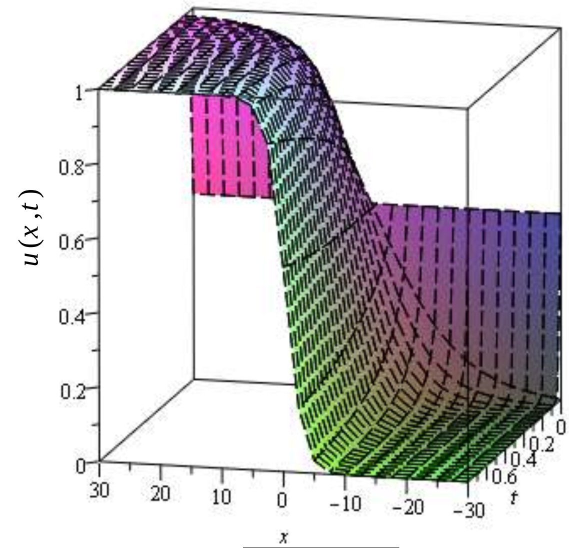

الشكل (1)

بوضع $p(t)=t$ و $q(t)=t^2$ و $r(t)=-t^2$، حالة معادلة ذات أمثال تابعة للزمن، فتصبح سرعة الموجة بعد التعويض في الحالة الرابعة:

$$c(t)=\frac{-\sqrt{2}}{5}\sqrt{t^3}$$

أي أن سرعة الموجة $c(t)$ لاخطية بالنسبة للزمن، أي لدينا موجة غير خطية، وبالتالي يصبح الحل:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{t}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{5}t^{5/2}\right)\right) \qquad (22)$$




الشكل (2)

يمثل الشكل (2) الحل المعطى بالعلاقة (22)، إذ نلاحظ تأثير الطبيعة اللاخطية للموجة على شكل الحل بالمقارنة مع الموجة الخطية في الحل المعطى بالعلاقة (21) والممثل بالشكل (1).
وإذا كان $r(t)p(t) > 0$، فإننا في هذه الحالة سنحصل على حلول عقدية للمعادلة (4)، لأن $\sqrt{-2r(t)p(t)} = i\sqrt{2r(t)p(t)}$.

## الاستنتاجات والتوصيات:

لقد حصلنا من خلال استخدام طريقة دالة الظل الزائدي، على حلول تحليلية ذات موجة غير خطية منعزلة *(nonlinear soliton wave solution)* لمعادلة زيلدوفيتش ذات أمثال التابعة للزمن، وأجرينا مقارنة مع إحدى نتائج المرجع [8] وإحدى نتائج المرجع [9]، ووجدنا تطابق معها، كما رأينا تأثير الطبيعة اللاخطية لسرعة الموجة بالنسبة للزمن على شكل الحل، كذلك حصلنا على حلول عقدية لهذه المعادلة تبعاً لطبيعة أمثالها. يمكننا القول من وجهة نظر تحليلية بأن هذه الطريقة أظهرت فعالية كبيرة لحل مثل هذا النوع من المعادلات التفاضلية الجزئية، إذ فشلت في حلها كل من طريقة *sine–cosine* المستخدمة في المرجعين [4،3] وطريقة المعادلة التفاضلية المساعدة المستخدمة في المرجع [2]. يجدر بنا أن نشير أخيراً إلى أن جميع الحسابات المتعلقة بهذا العمل تمت باستخدام برنامج *Maple13*.

## المراجع


[1] Yang Y, Tao Z-l, Austin Francis R. *Solutions of the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion*. App Math Comput 2010;216:1029–35.
[2] Triki H, Wazwaz AM. *On soliton solutions for the Fitzhugh–Nagumo equation with time-dependent coefficients*. Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 3821–3828
[3] Triki H, Wazwaz AM. *Traveling wave solutions for fifth-order KdV type equations with timedependent coefficients*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014;19:404–408.
[4] Guner O, Bekirb A. *Traveling wave solutions for time dependent coefficient nonlinear evolution equations*, Waves in Random and Complex Media,2015.
[5] Baishya C, *Solution of Newell-Whitehead-Segel equation with power law nonlinearity and time dependent coefficients*, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. 3(2) (2015) 59 – 64.
[6] Zeldovich YB, *Theory of Flame Propagation,* National Advisory Committee for Aeronautics Technical Memorandum 1282 (1951), 39 pp. Translation of: Zh. Fiz. Khim. 22 (1948), 27-49.
[7] Zeldovich YB, Raizer Y P, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena Volume I,* Academic Press, New York,1966.
[8] Gilding B H, Kersner R, *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Volume 60, Springer Basel AG,2004.
[9] Korkmaz, A. *Complex Wave Solutions to Mathematical Biology Models I: Newell-Whitehead-Segel and Zeldovich Equations*. *Preprints* 2018
[10] Danilov, V.G., Maslov, V.P., Volosov, K.A., *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995.

[11] Gilding, B.H., Kersner R, *Traveling Waves in Nonlinear Diffusion convection-reaction*, University of Twente, Memorandum No. 1585. 2001.
[12] Malfliet W, *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*, Am. J. Phys. 60 (7) (1992) 650–654.
[13] Yang Y, Tao Z, Austin F.R, *Solutions of the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion*, Appl. Math. Comput. 216 1029–1035. 2010.
[14] Wazwaz A.M, *The tanh–coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations*, Appl. Mathe. Comput. 188 (2) 1467–1475. 2007.
[15] Wazwaz A.M, *The tanh-coth and the sine–cosine methods for kinks, solitons, and periodic solutions for the Pochhammer–Chree equations*, Appl. Math. Comput. 195 (1) 24–33. 2008.
[16] Wazwaz A.M, *New solitons and kinks solutions to the Sharma–Tasso–Olver equation*, Appl. Math. Comput. 188 1205–1213. 2007.