مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

انتشار الابتكار والنماذج العقلانية المعممة

د. مبارك ديب *

(تاريخ الإيداع 25 / 6 / 2018. قُبِل للنشر في 9 / 8 /2018)

□ ملخّص □

الغاية من هذا البحث هو تطوير واستخدام اثنين من النماذج العقلانية المعممة(Generalized Rational Models) (GRM I،GRM II) التي يمثل كل منهما أنموذجاً رياضياً قابلاً للحل الواقعي، وغير متوفر مع نماذج اخرى، كما سنوضح فائدتها وقابلية تطبيقها على نطاق واسع، انطلاقاً من مقارنتها بنماذج ملتوية اخرى($S-shaped$)، وتقاربها بشكل جيد.

الكلمات المفتاحية: النمذجة الفوضوية، نمذجة الانتشار، سرعة الانتشار، انتشار الابتكار، النماذج غير الخطية، التذبذبات الفوضوية.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية - سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (4) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (4) 2018

Diffusion of Innovation and Generalized Rational Models

Dr. Mubarak Deeb*

(Received 25 / 6 / 2018. Accepted 9 / 8 /2018)

□ ABSTRACT □

The purpose of this research is to develop and use two generalized Rational Models (GRM I, GRM II), each of which is a realizable mathematical model, not available with other models, and we will demonstrate its utility and applicability on a large scale, compared to other (S-shaped) models, and converging well.

Keywords: Chaotic modeling, Diffusion modeling, Innovation diffusion, Non-linear models, Chaotic oscillations, diffusion models.

***Assistant Professor, Department of mathematical, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يمر تبني انتشار الابتكار(Innovation Diffusion) من حيث المبدأ بعدة مراحل:

1- الوعي(الادراك- awareness)، 2- الاهتمام(interest)، 3- التقييم(evaluation)، 4- المحاكمة (الاختبار- trail)، 5- التبني(الاقرار والتأكيد- adoption).

فقد يتعرض الشخص للابتكار ولكن يفتقر إلى المعلومات حول هذا الموضوع، وعندما يهتم بالموضوع يسعى للحصول على المعلومات الاضافية، ثم يقوم بمحاولة تطبيق الابتكار عقلياً على وضعه الحالي والمستقبلي، وبعدها يقرر ما إذا كان سيحاول ذلك أم لا، وبالمحاكمة أو الاختبار، يتبين أنه سيستفيد من الابتكار، وبالتالي يقرر الاستمرار وتبني الموضوع.

تلعب النماذج الرياضية اللوجستية دوراً مميزاً في انتشار الابتكار[5]، وقد اقترحت العديد من النماذج لتمثيل العمليات التي من خلالها ينتشر" تبني منتج أو فكر أو ... أو تكنولوجيا" جديدة، لتحل محل " منتج أو فكر أو ...أو تقنية" موجودة.

اعتمدت النظرية السلوكية الاساسية في تطوير مثل هذه النماذج على نماذج لوجستية مختلفة(نماذج ملتوية الشكل $S-$ $sigmoid$) بعد تقدير قدرة الحمل($carrying\ capacity$)، وأظهرت الدراسات المختلفة حول انتشار الابتكار، الحاجة إلى نماذج تصف السلوك غير المتماثل، وهي حالة لا يمكن تحقيقها من خلال الأنموذج اللوجستي المعروف(الأكثر شعبية)[6],[5] .

وقد كان لأنموذج Bass (أنموذج انتشار المنتجات والتكنولوجيا- Model Bass) التالي[1]:

$$N_t = N_{t-1} + p(m - N_{t-1}) + q(\frac{N_{t-1}}{m}(m - N_{t-1})$$

حيث:

N_t – عدد المتبنين في الزمن t ، m – امكانات السوق (market potential)، p – معامل الابتكار ، q– معامل التقليد (حيث المحاكاة هي دوماً عملية تقليد)، دوراً هاماً على نطاق واسع لتحليل السوق والتنبؤ بالطلب على التكنولوجيا الجديدة، وينطبق ذلك على مجال واسع من ظواهر الانتشار. وبالواقع، إن معظم نماذج نشر الابتكار متجذرة في أعمال(1969 – Bass)، وقد كان لهذا الأنموذج تأثيراً كبيراً في مجال التسويق والإدارة، حتى أنه اختير في عام 2004 كواحدة من الأوراق العشرة الأكثر تكراراً في تاريخ العلوم الإدارية خلال الخمسين سنة الماضية، ثم بدأت التحسينات وتحديث المقاييس ومصادر البيانات المستخدمة فيها. وانطلاقاً من نظرية انتشار الابتكار، فإن التكنولوجيا الجديدة تنتهج عادة، مسار انتشار بمنحنى لوجستي.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في دراسة وتطوير بعض النماذج الرياضية العقلانية اللوجستية والمرتبطة بتطور نماذج البدائل التكنولوجية (الطبية – الاقتصادية- الادارية،...)، حيث لعامل الزمن تأثير كبير في معاملات النماذج المشكلة.

ومن المعلوم أن نماذج الانتشار تعتمد على نظرية الانتشار للتنبؤ باعتماد الابتكار، كما أن انتشار الابتكار هو العملية التي ينتقل من خلالها الابتكار في الوقت المناسب[2].

طرائق البحث ومواده:

تنطلق فكرة البحث من مفهوم النمذجة الرياضية والرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص من النماذج الرياضية اللوجستية ذات التطبيقات العملية الواسعة جدا في الحياة العملية الواقعية، اخذين بالاعتبار أهمية انتشار الابتكار في المجالات المختلفة.

البدائل التكنولوجية والنماذج اللوجستية:

تركزت الأدبيات التي تصف عملية نشر الابتكار في السنوات الأخيرة على نماذج رياضية ذات خصائص متغيرة في معامل الانتشار b . سننطلق من النماذج ذات الشكل[8],[5]:

$$\dot{f} = b(F - f) \qquad (1)$$

$$\dot{f} = b\frac{F-f}{F}f \qquad (2)$$ ، حيث:

$\dot{f} = \frac{df}{dt}$ هو معدل التبني(القبول− rate of adoption).

f − عدد المتبنين(number of adopters) أو الحصة السوقية لمنتج ما في الزمن t.

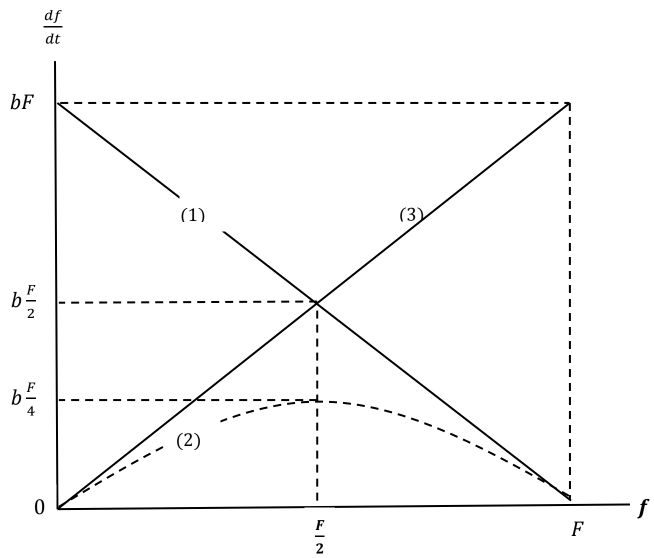
F − العدد الإجمالي للمتبنين المحتملين أو الحد الأعلى للحصة السوقية للمنتج.

b − بارامتر الانتشار الذي يمثل عدد المتبنين أو الحصة السوقية المغطاة لكل وحدة زمنية.

المراحل المبكرة $(f \to 0)$ في (2) تتبع الأنموذج الاسي، والمراحل اللاحقة $(f \to F)$ توصف بـ (1)، في حين المراحل المتوسطة تمثل عملية التفاعل بين المتبنين، والمتبنين المحتملين ويمثلها الأنموذج (2). أي يكون:

$$\dot{f} = bf \qquad (3)$$

من الواضح أن نقطة انعطاف (2) هي: $f = \frac{F}{2}$. انظر الشكل(1):



الشكل(1)

ولكن، بسبب الخصائص المتغيرة لإمكانات السكان المتبنين، والتغيرات التكنولوجية، وتعديلات المنتجات، وتغيرات الأسعار، والظروف الاقتصادية العامة، والعوامل الخارجية والداخلية الأخرى، فإنه من المرجح أن تتغير معاملات أنموذج الانتشار بمرور الوقت[5]، لذلك نفرض أن b يتغير بمرور الزمن(وهذا افتراض واقعي) تبعاً للعلاقة:

$$b(t) = a + b\frac{f}{F} \qquad (4)$$

، حيث a و b ثابتان.

من (1) و (4) يكون:

$$\dot{f} = (a + b\frac{f}{F})(F - f) \qquad (5)$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$\dot{f} = a(F - f) + b\,\frac{F-f}{F}\,f \qquad (6)$$

وهي تركيب خطي للأنموذجين (1) و (2) .

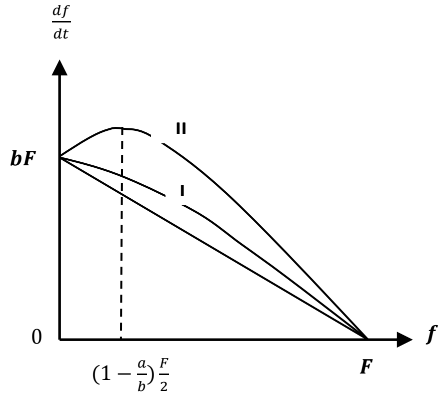
وتكون نقطة الانعطاف في(6) بالشكل:

$$f = \frac{F}{2}(1 - \frac{a}{b}) \qquad (7)$$

من أجل:

- $0 < \frac{a}{b} < 1$ ، يكون الانعطاف: $0 < f < \frac{F}{2}$، وتتقارب العملية من المنحني (II)،(انظر الشكل (2))،
- $0 < \frac{a}{b} \ll 1$، فإن العملية تتقارب من (2) .
- $\frac{a}{b} > 1$ لا يوجد انعطاف، ويأخذ الأنموذج شكل المنحني (I)، (انظر أيضاً الشكل(2)).

- $b \ll a$ تتقارب العملية من(1).



شكل(2)

تمثل نقطة الانعطاف تلك المرحلة من عملية الاستبدال التي يتم فيها الوصول إلى الحد الأقصى لمعدل التبني $\frac{df}{dt}$ ، وبالتالي، الغاية من دراسة الانعطاف هو معرفة النقطة أو القيمة التي يبلغ فيها معدل الانتشار قيمته العظمى.

عموماً، من المنطقي أن يتغير المعامل b بمرور الوقت وبشكل منهجي كدالة للحصة السوقية التي اكتسبها المنتَج في الوقت المناسب، ويمكن التعبير عن هذا التغير بالعلاقة: $b(t) = b\,f^{\alpha}$ حيث α ثابت، عندئذً، ومن أجل الأنموذج اللوجستي(على سبيل المثال): $\frac{df}{dt} = bf(F-f)$ يكون:

$$\frac{df}{dt} = bf^{\alpha+1}(F-f) = b\,f^{\delta}(F-f)\ ;\ \delta = \alpha+1$$

تبين العلاقة الأخيرة أن هناك تفاعل غير خطي بين المتبنين f وغير المتبنين $(F-f)$.

(المقصود بالمتبنين بالمفهوم العام، اولئك الذين اعتمدوا المنتج أو الفكرة أو التكنولوجيا المعروضة أو ... الخ) .

لاحظ أن: $\frac{db(t)}{df} = b(\delta-1)\ f^{\delta-2}\ ;\ \alpha = \delta-1$

بالتالي: $\frac{db}{df} < 0 \quad for \quad 0 < \delta < 1$

$$\frac{db}{df} = 0 \quad for \quad \delta = 1$$

$$\frac{db}{df} > 0 \quad for \quad \delta > 1$$

بهذا الشكل، يمكن أن يزيد معامل التقليد أو ينقص مع الوقت أو يبقى ثابتًا، وهي مرونة لا تقدمها النماذج الأخرى[4].

ومن النماذج المقترحة أيضاً للانتشار : الأنموذجين التاليين: الأنموذج:

$$\dot{f} = b\,\frac{(F-f)^2}{F^2}\,f \qquad (8)$$

ونقطة الانعطاف حيث: $\frac{d}{df}\left(\frac{b}{{}_2}\,f(F-f)^2\right) = 0$ تكون: $f = \frac{F}{3}$.

والأنموذج:

$$\dot{f} = \frac{b}{F}\,\frac{(F-f)^2}{F-(1-\sigma)f}\,f\ \ ;\ 0 \le \sigma \le 1 \qquad (9)$$

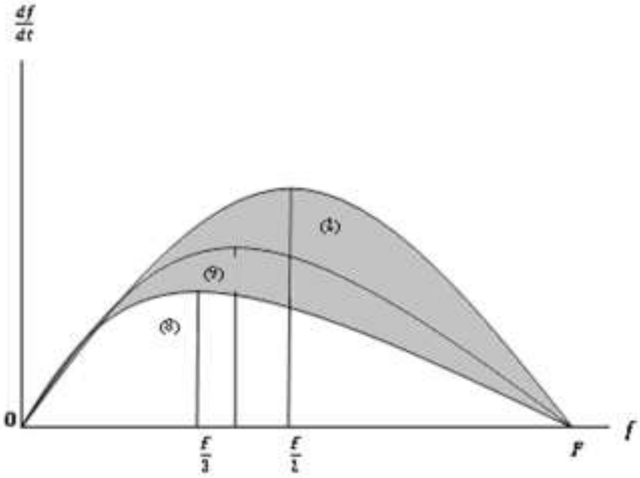
ونقطة الانعطاف، حيث: $\frac{d}{df}\left(\frac{b}{F}\ \frac{f(F-f)^2}{F-f(1-\sigma)}\right) = 0$

$$\frac{b}{F}[(F-f(1-\sigma))((F-f)^2 - 2f(F-f)) + f(F-f)(1-\sigma)$$

$$(F-f(1-\sigma))(F-3f) + f(F-f)(1-\sigma) = 0 \qquad (*)$$

وبتبسيط المعادلة (*) يكون: $(2-2\sigma)f^2 - 3Ff + F^2 = 0$، بالتالي:

عندما $\sigma = 1$ ، ينتج: $f = \frac{F}{3}$، وعندما $\sigma = 0$، ينتج: $f = \frac{F}{2}$ ، والحل العام بالشكل: $f = \frac{3F-\sqrt{F^2+8\,\sigma F^2}}{4(1-\sigma)}$، ونقطة الانعطاف هي بالواقع في حدود ($\frac{F}{3}$ و $\frac{F}{2}$). (انظر الشكل (3) – مقارنة بين النماذج (2 ، 8 ، 9).



شكل(3)

نريد تشكيل أنموذج عقلاني معمم يكون قابل للحل دوماً، ولأجل ذلك، اقترح الأنموذج من الشكل:

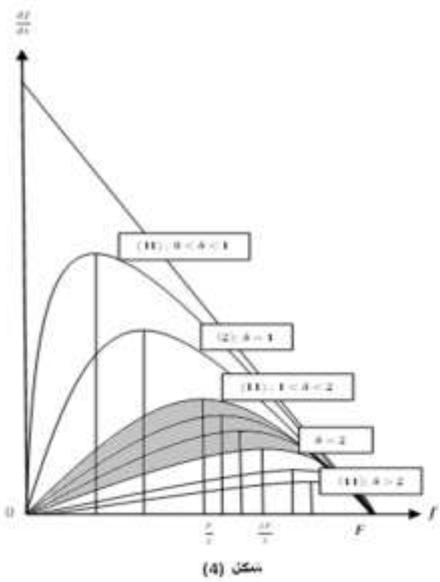
$$\dot{f} = b\,(\frac{f}{F})^{\delta}(F - f) \quad ; \; 0 < \delta < 1 \qquad (11)$$

يرمز لمثل هذا الأنموذج بالرمز NSRL (Non–Symmetric Responding Logistic –أنموذج لا يوجد فيه مستوى خطورة كبير ، (له حل فقط من أجل قيم δ المحددة).

ومن السهولة ايجاد نقطة الانعطاف:

$$f = \frac{F\delta}{1+\delta} \equiv \frac{F}{1+\frac{1}{\delta}} \qquad (12)$$

وهي بين 0 و F عندما تتغير δ من 0 إلى ∞ . انظر الشكل (4):



شكل (4)

–

من أجل:$\delta = 2$، فإن (11) (أي أنموذج NSRL) يأخذ الشكل:

$$\dot{f} = \frac{b}{F^2}\,(F - f)f^2 \qquad (13)$$

ولهذا الأنموذج نقطة الانعطاف التالية: $f = \frac{2F}{3}$

- من أجل: $0 < \delta < 1$، ينحرف الأنموذج إلى اليسار بنقطة انعطاف بين $\frac{F}{2}$ و $\frac{2F}{3}$.
- ومن أجل: $\delta > 2$، تتغير نقطة الانعطاف من $\frac{2F}{3}$ إلى F .

تعديل أنموذج NSRL:

يمكن تمديد الأنموذج NSRL بحيث يغطي المنطقة أسفل الأنموذج (8)، باستخدام الأنموذج الأسي كأساس لأنموذج المعادلة(3)، وبفرض أن البارامتر b يتغير مع الزمن وفقًا للمعادلة:

$$b(t) = b\,(1 - \tfrac{f}{F})^{\delta} \qquad (14)$$

عندئذٍ، من(14) و(3) يكون:

$$\dot{f} = b\,(1 - \tfrac{f}{F})^{\delta} f \qquad (15)$$

وهذا ما يسمى بأنموذج NSRL المعدل (Modified Non−Symmetric Responding Logistic)، عندما:

$\delta = 0$ ، فإننا نحصل على (3)(أي نحصل على الأنموذج المحدد بالعلاقة(3))،

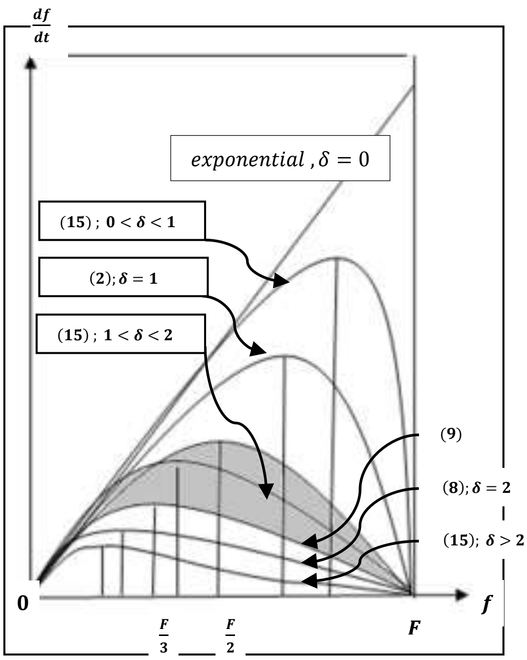
$\delta = 1$ ، فإننا نحصل على (2)،

$\delta = 2$ ، فإننا نحصل على (8)، وعندما:

$0 < \delta < 1$، فإن الأنموذج يغطي المنطقة بين:(3) و(2)،

$\delta > 2$، نحصل على المنطقة تحت(8)، (انظر الشكل (5))،

$1 < \delta < 2$، فإن المنطقة التي يغطيها الأنموذج(المنطقة المظللة) تكون مماثلة لتلك المحددة بالأنموذجين (2) و(8)، ونفس المنطقة تغطي أيضاً الأنموذج (9).



شكل(5)

وبحساب نقطة انعطاف (15) (أي: نقطة انعطاف الأنموذج NSRL المعدل) تكون:

$$f = \frac{F}{1+\delta} \qquad (15_a)$$

وهي تتغير من F إلى 0، عندما تتغير δ من 0 إلى ∞ .

من الواضح أن الأنموذجين المتشابهين:(14) و (15)(أي: أنموذج NSRL و NSRL المعدل) لهما حل من أجل قيم معينة لـ δ .

كما ذكرنا سابقاً، نريد بناء أنموذج قابل للحل دوماً، ولأجل ذلك، نعبر عن (15) بالشكل:

$$\dot{f} = b\,(1-\frac{f}{F})^{n-\varepsilon} f\ ,\ n-\varepsilon = \delta\,;0 \le \varepsilon \le 1 \qquad (16)$$

حيث:$n \in [1,\infty)$ عدد صحيح، $\delta \in [0,\infty)$ ، و : $\delta < n \le \delta + 1$ ، أو بالشكل:

$$\dot{f} = b\,\frac{(1-\frac{f}{F})^{n}}{(1-\frac{f}{F})^{\varepsilon}}\, f \qquad (17)$$

، والتي يمكن كتابتها أيضاً بالشكل:

$$\dot{f} = b\,\frac{(1-\frac{f}{F})^{n}}{(1-\varepsilon\frac{f}{F})}\, f \qquad (18)$$

حيث: $(1-\frac{f}{F})^{\varepsilon} \approx 1-\varepsilon\frac{f}{F}$، والتقريب الأفضل يكون عندما:$\varepsilon\frac{f}{F} \ll 1$.

وبوضع: $\varepsilon = 1-\sigma$ في (18) والترتيب، يكون:

$$\dot{f} = b\,\frac{(F-f)^{n}}{F^{n-1}[F-(1-\sigma)f]}\, f\ \ ,\ n = 1,2,\ldots,\ \ 0 \le \sigma \le 1 \qquad (19)$$

يعرَّف الأنموذج (19) بالأنموذج العقلاني المعمم، ويرمز له بالرمز (GRM I).

يغطي هذا الأنموذج نفس منطقة الأنموذج (15)(أي أنموذج NSRL المعدل) الموضح في الشكل(5).

في الأنموذج (19): ومن أجل:

$n = 1\,,\sigma = 0$ ينتج (1)

$n = 1\,,\sigma = 1$ ينتج (2)

$n = 2\,,\sigma = 1$ ينتج (8)

ولحل(19) نكتبها بالشكل:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = b\,\frac{(F-f)^{n}}{F^{n-1}[F-(1-\sigma)f]}\, f$$

$$\Rightarrow \frac{F^{n-1}[F-(1-\sigma)f]}{f(F-f)^{n}}\, df = bdt \qquad (19-1)$$

$$\frac{F^{n-1}[(F-f)+\sigma\, F^{n-1}\, f)]}{f(F-f)^{n}}\, df = bdt$$

$$[\frac{F^{n-1}}{f(F-f)^{n-1}} + \sigma\,\frac{F^{n-1}}{(F-f)^{n}}]\, df = bdt \qquad (19-2)$$

بنشر الحد الأول في العلاقة الاخيرة، يكون:

$$[\frac{1}{f} + \frac{1}{F-f} + \frac{F}{(F-f)^2} + \cdots + \frac{F^{n-2}}{(F-f)^{n-1}} + \sigma\,\frac{F^{n-1}}{(F-f)^{n}}]\, df = bdt \qquad (19-3)$$

بمكاملة الطرفين:

$$ln\, f - ln(F-f) + \frac{F}{F-f} + \cdots + \frac{F^{n-2}}{(n-2)(F-f)^{n-2}} +$$

$$+\sigma\,\frac{F^{n-1}}{(n-1)(F-f)^{n-1}} = c + bt \qquad (19-4) \equiv: (20)$$

حيث: $n = 2,3,\ldots$

ومن أجل:$n = 1$، فإن$(19-2)$ تصبح بالشكل:

$$(\frac{1}{f} + \frac{\sigma}{F-f})df = bdt \qquad (19-5)$$

بالتالي:

$$ln\, f - \sigma\, ln(F-f) = c + bt \qquad (19-6) \equiv: (21)$$

حيث c ثابت تتعين قيمته بوضع $t = 0$.

بمفاضلة (19) بالنسبة لـ f ومساواتها بالصفر، تنتج نقطة الانعطاف التالية:

$$f = F\,\frac{(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}}{2n(1-\sigma)}$$

$$or: \quad f = \frac{2F}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}} \qquad (22)$$

إذا كان للانموذجين:(NSRL المعدل و GRM I) نفس قيمة الانعطاف f، فإنه ينتج من تساوي المعادلتين: (15_a) و (22) [3],[6] أن:

$$\frac{F}{1+\delta} = \frac{2F}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}}$$
$$\Rightarrow (n+1)^2 - 4n(1-\sigma) = (2(1+\delta)-(n+1))^2$$
$$\equiv (2\delta-(1-n))^2$$

بفك وترتيب الطرفين، ينتج:

$$\sigma = \frac{\delta(1+\delta-n)}{n} \qquad (23)$$

أي أن الانموذجين:($(15) \equiv$ NSRL المعدل و $(19) \equiv$ GRM I)، ولأجل البارامترات: σ , n و δ يؤديان العلاقة (23) أعلاه. بالتالي:

$$if \quad n=1 \Rightarrow \sigma = \delta^2 \qquad (24)$$
$$. \ if \quad n=2 \Rightarrow \sigma = \frac{\delta}{2}(\delta-1) \qquad (25)$$

نلاحظ:

من أجل: $n=1$ في(19): نحصل على الأنموذج:

$$\dot{f} = b\ \frac{(F-f)}{F-(1-\sigma)f}\ f \qquad (26)$$

، ونسميه $\mathrm{GRM\ I_1}$.

ونحصل على نقطة انعطاف هذا الأنموذج، باستبدال n بـ 1 في الأنموذج (22)، أي:

$$f = \frac{F}{1+\sqrt{\sigma}} \qquad (27)$$

وهي تتغير من $\frac{F}{2}$ إلى F ، عندما تتغير σ من 1 إلى 0.

يغطي الانموذج $\mathrm{GRM\ I_1}$ المنطقة بين الانموذجين: (2) و(3)، وهي ذات المنطقة التي يغطيها أنموذج NSRL المعدل عندما: $0 \le \delta \le 1$.

ومن أجل: $n=2$ في (19)، نحصل على الأنموذج:

$\dot{f} = \frac{b}{F}\ \frac{(F-f)^2}{F-(1-\sigma)f}\ f$ وهو ما يدعى بأنموذج $\mathrm{GRM\ I_2}$ والذي يتطابق مع (9)،

ونقطة انعطافه (كما في (10)) هي:

$$f = F\ \frac{3-\sqrt{1+8\sigma}}{4(1-\sigma)} \ \equiv F\ \frac{2}{3+\sqrt{1+8\sigma}}$$

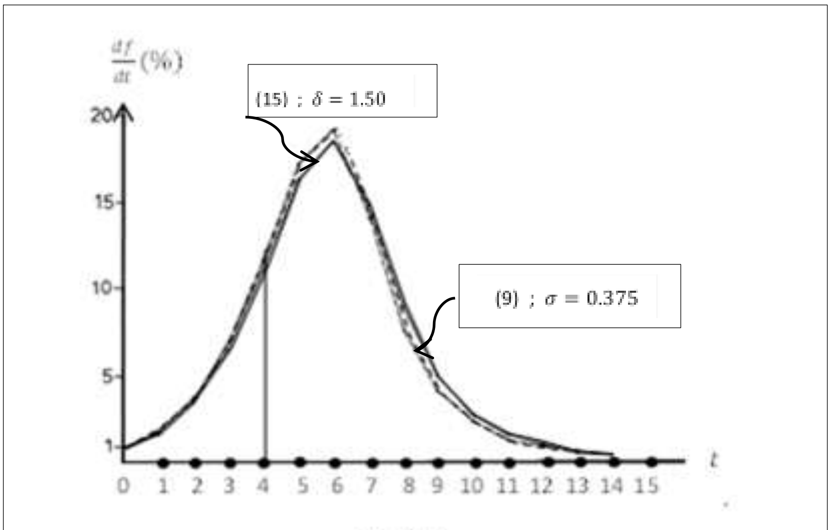
وبوضع: $n=2$ في (20)، فإن أنموذج $\mathrm{GRM\ I_2}$ (أو(20))، يعطى بالشكل:

$$ln\, f - ln(F-f) + \sigma\frac{F}{(F-f)} = c + bt \qquad (28)$$

وهذا الأنموذج يغطي نفس المنطقة التي يغطيها أنموذج $NSRL$ المعدل عندما: $1 \le \delta \le 2$.

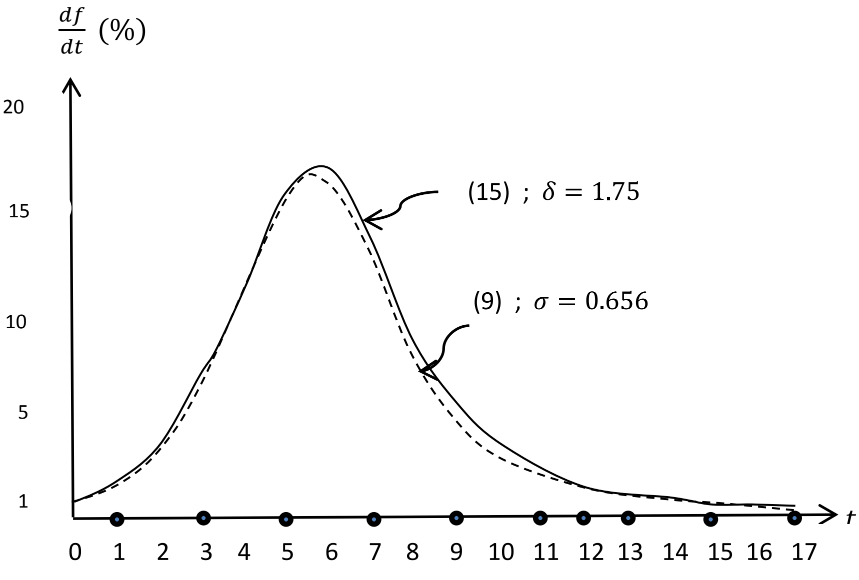
المقارنة بين الأنموذجين محددة في الاشكال(6–7–8)، بافتراض أنه في الفترة الأولية $(t=0)$، كانت: $\frac{df}{dt} = 1\ \%$ ، وحيث: $b=1$، وحيث الثنائيات الثلاث:

$\{GRM\ I_2,\ (9),\ (NSRL-$المعدل$)\}$ ممثلة بذات نقطة الانعطاف لكل ثنائية، والبارامترات δ و σ مختارة من العلاقة السابقة (25)، مع ملاحظة أن الأنموذج $\mathrm{GRM\ I_2}$ يطابق الأنموذج (9).

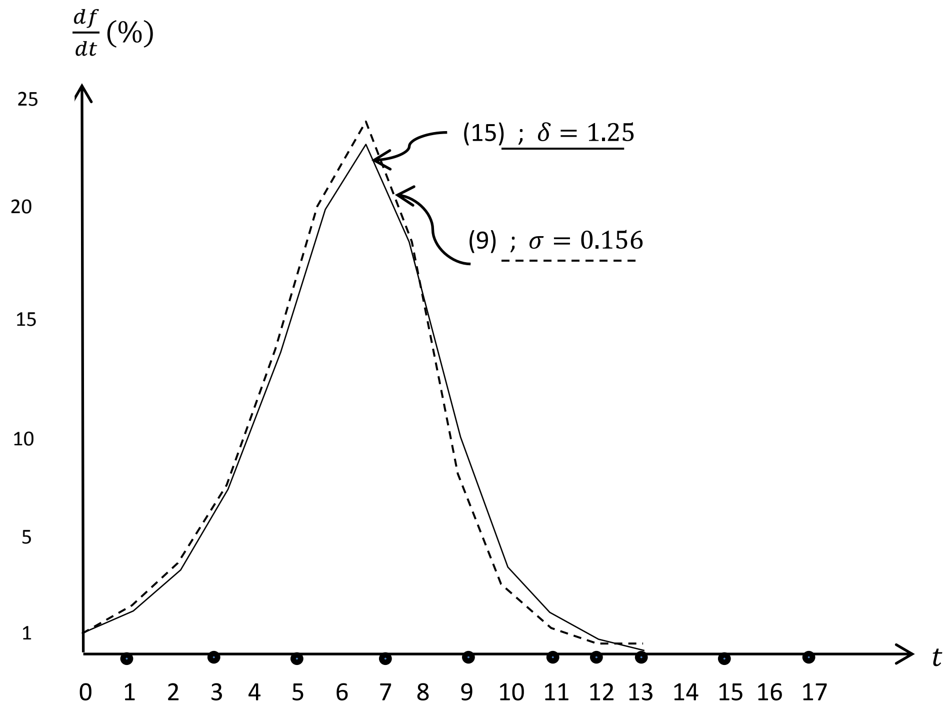


الشكل (6)

يبين الشكل(6) مقارنة بين الأنموذجين (9) و (15) بافتراض أنه في الفترة الأولية (t = 0)، كانت: $\frac{df}{dt} = 1\ \%$ ، وحيث: $b = 1$، ونقطة الانعطاف عند $f = 0.4\,F$.



الشكل(7)



الشكل(8)

وبالواقع، إن النماذج المقارنة تتقارب من بعضها البعض بشكل جيد جداً، حيث نقاط الانعطاف متطابقة رغم اختلاف قيم البارامترات δ و σ المعتمدَة حسب العلاقة(25).

الأنموذج العقلاني المعمم GRM II:

ينبثق هذا الأنموذج من أنموذج $NSRL$ بالطريقة التي تم تطبيقها لصياغة أنموذج $GRM\ I$، وهكذا يتم التعبير عن المعادلة (11) التي تمثل أنموذج *NSRL*:

$$\dot{f} = b\,(\tfrac{f}{F})^{\delta}(F-f) \quad ; \; 0<\delta<1 \qquad (29)$$

حيث: $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $n-\varepsilon=\delta$ ، n عدد صحيح يتغير من:1 إلى 0، عندما يتغير δ من: 0 إلى ∞ ، وبحيث: $\delta < n \leq \delta+1$. نعيد كتابة(29) بالشكل:

$$\dot{f} = b\,\frac{(\frac{f}{F})^{n}}{(\frac{f}{F})^{\varepsilon}}(F-f) \qquad (30)$$

يمكن تقريب الحد $(\frac{f}{F})^{\varepsilon}$ في مقام المعادلة الأخيرة (باعتبار أن: $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ، $0<\frac{f}{F}<1$) بالشكل:

$$(\tfrac{f}{F})^{\varepsilon} = e^{\varepsilon\, ln(\frac{f}{F})} = e^{\varepsilon\, ln\left[1-\left(1-\frac{f}{F}\right)\right]} \quad ; \quad 0<1-\frac{f}{F}<1$$

$$= e^{\varepsilon\left[-\left(1-\frac{f}{F}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{f}{F}\right)^{2}-\cdots\right]}$$

$$\approx e^{-\varepsilon(1-\frac{f}{F})}$$

والتقريب هو الأفضل في المراحل الأخيرة من عملية الانتشار عندما: $\left(1-\frac{f}{F}\right) \ll 1$، بالتالي:

$$(\tfrac{f}{F})^{\varepsilon} = 1-\varepsilon\left(1-\frac{f}{F}\right)+\frac{1}{2!}\,\varepsilon^{2}\left(1-\frac{f}{F}\right)^{2}-\cdots$$

$$\approx 1-\varepsilon\left(1-\frac{f}{F}\right)$$

أي يمكن أن نكتب:

$$(\tfrac{f}{F})^{\varepsilon} = 1-\varepsilon\left(1-\frac{f}{F}\right) \equiv 1-\varepsilon+\varepsilon\frac{f}{F}$$

والتقريب الأفضل، عندما: $\varepsilon\left(1-\frac{f}{F}\right) \ll 1$ ، بالتالي، يمكن كتابة المعادلة (30) بالشكل:

$$\dot{f} = b\,\frac{(\frac{f}{F})^n}{1-\varepsilon+\varepsilon\frac{f}{F}}(F-f) \qquad (31)$$

وباستبدال ε بـ $(1-\sigma)$ واعادة الترتيب، نحصل على أنموذج جديد يعرف باسم الأنموذج العقلاني المعمم الثاني (GRM II) التالي:

$$\dot{f} = b\,\frac{f^n}{F^{n-1}[\sigma\,F+(1-\sigma)f]}(F-f) \qquad (32)$$

حيث: $n = 1,2,\ldots$ و : $0 \le \sigma \le 1$

يغطي هذا الأنموذج نفس منطقة الأنموذج (11) (أي أنموذج $NSRL$) الموضح بالشكل (4).

في الأنموذج الأخير، ومن أجل:

$(n = 1, \sigma = 0)$، نحصل على(1).

$(n = 1, \sigma = 1)$ أو: $(n = 2, \sigma = 0)$، نحصل على(2).

$(n = 2, \sigma = 1)$ أو: $(n = 3, \sigma = 0)$، نحصل على(13).

لحل المعادلة (32)(أنموذج GRM II) نكتبها بالشكل:

$$\frac{F^{n-1}[\sigma\,F+(1-\sigma)f]}{f^n(F-f)}df = bdt \qquad :(G-1)$$

$$Or: \quad \frac{F^{n-1}[\sigma(F-f)+f]}{f^n(F-f)}df = bdt$$

$$\left[\frac{F^{n-1}}{f^{n-1}(F-f)} + \sigma\,\frac{F^{n-1}}{f^n}\right]df = bdt \qquad :(G-2)$$

بنشر الحد الأول (في الطرف الأيسر)، يكون:

$$\left[\frac{1}{(F-f)} + \frac{1}{f} + \frac{F}{f^2} + \cdots + \frac{F^{n-2}}{f^{n-1}} + \sigma\,\frac{F^{n-1}}{F^n}\right]df = bdt \qquad :(G-3)$$

ويكون الحل عندئذٍ، بالشكل:

$$lnf - ln(F-f) - \frac{F}{f} - \cdots - \frac{F^{n-2}}{(n-2)f^{n-2}} - \sigma\,\frac{F^{n-1}}{(n-1)f^{n-1}} = c + bt \qquad (33)$$

حيث: c ثابت تتحدد قيمته من أجل $t = 0$، و $n = 2,3,\ldots,$.

عندما:$n = 1$، فإن العلاقة $(G-2)$ تصبح بالشكل: $\left[\frac{1}{(F-)} + \frac{\sigma}{f}\right]df = bdt$ ، وبالتالي يكون:

$$\sigma\,ln\,f - ln(F-f) = c + bt \qquad (34)$$

من الملاحظ أن (GRM II) ينتج من (GRM I) بوضع:$f = F - f$، وبالتالي، إذا بدلنا هذه القيمة في(22)، ينتج:

$$F - f = F\,\frac{(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}}{2n(1-\sigma)}$$

$$f = F - F\,\frac{(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}}{2n(1-\sigma)}$$

$$f = F\left[1 - \frac{(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-4n(1-\sigma)}}{2n(1-\sigma)}\right] \qquad (35)$$

ويكون بالتالي للأنموذجين: (GRM II) و (NSRL) ذات الدالة f في نقطة الانعطاف عندما:

$$\sigma = \frac{\delta(1+\delta-n)}{n} \qquad (36)$$

والمعادلة الأخيرة تتطابق مع (23) التابعة لـ $(GRM\ I)$ و $(NSRL)$ بما يخص البارامترات σ , n و δ .

- بوضع $n = 1$ في(32)(أي في أنموذج $GRM\ II$)، يكون:

$$\dot{f} = b\,\frac{f}{\sigma\,F+(1-\sigma)f}(F-f) \qquad (37)$$

وتكون نقطة الانعطاف بالشكل:

$$f = \frac{-\sigma+\sqrt{\sigma}}{1-\sigma} \qquad (38)$$

ولهذا الأنموذج (أي للأنموذج(37)) أهمية كبيرة كونه يمثل عملية انتشار مختلطة لتفاعل داخلي(تقليد)، وتأثير خارجي ممثل بالأنموذج (1).

يوفر البارامتر σ مقياسًا لنسبة هاتين القوتين العامتين اللتان تؤثران بشكل أساسي على انتشار الابتكار[7].

- بوضع $n = 2$ في (32)، فإن أنموذج $(GRM\ II)$ يأخذ الشكل:

$$\dot{f} = b\ \frac{f^2}{F[\sigma F+(1-\sigma)f}(F-f) \qquad (39)$$

وحلها يكون:

$$\sigma \ln f - \ln(F-f) - \sigma \frac{F}{f} = c + bt \qquad (40)$$

ونقطة الانعطاف بالشكل:

$$f = F\,\frac{1-4\sigma+\sqrt{1+8\sigma}}{4(1-\sigma)} \qquad (41)$$

عندما $\sigma = 1$، فإن(39) تعطي أنموذجاً مماثلًا للأنموذج(8)، ومطابقاً للأنموذج (13)، الناتج بدوره من أنموذج $NSRL$ (أي من الأنموذج (11)) عندما $\delta = 2$.

مقارنة الأنموذجين: GRM II وNSRL :

تستخدم النماذج الرياضية وخاصة اللوجستية منها في المجال الطبي بشكل واسع، وأرى أنها تستخدم في كافة المجالات الحياتية (تحب وتكره وتأكل وتشرب وتعمل وتتبنى وترفض وتخترع....وتفرح وتحزن...)إلى حدٍ ما، وكل فكرة، يمكن أن تُقبل بشروط وبارامترات محددة، وقد قدمت بعض هذه النماذج خدمة كبيرة في المجال الطبي، لاحظ (على سبيل المثال) العلاقة المباشرة بين ثوابت الانتشار وأجهزة التصوير الطبقي المحوري حيث:

– تم توصيف الماسح الضوئي CT للرأس، والماسح الضوئي CT للجسم، بالمعادلة (37) ،حيث البارامتر n في أنموذج GRM II ، يساوي 1.

– تم توصيف الأمواج فوق الصوتية والتصوير الشعاعي للثدي من أجل $n = 2$ ، في العلاقة (39). (قد نستغرب ذلك للوهلة الاولى).

يوضح الجدول التالي تقدير بارامترات الأنموذجين لثلاث ابتكارات تكنولوجية طبية[3]:

1– تصوير شعاعي للرأس(CT Head Scanner – Computed Tomography): " يسمى أحياناً بالتصوير المحوري المحوسب (Computerized Axial Tomography– CAT) ويستخدم لتقييم الهياكل المختلفة للدماغ للبحث عن كتلة، سكتة دماغية، منطقة نزيف، أو شذوذ في الأوعية الدموية ".

وهو اختبار غير مؤلم يستخدم جهاز $X - ray$ خاص لالتقاط الصور المطلوبة، حيث تدور الآلة على شكل دونات حول الرأس، وتلتقط صوراً لتزويد قطاعات متقاطعة من الدماغ من زوايا مختلفة.

"وبالمناسبة، تم تطوير CT بشكل مستقل من قبل مهندس بريطاني يدعى السير Godfrey Hounsfield والدكتور Alan Cormack. وأصبح دعامة أساسية لتشخيص الأمراض الطبية (منحا جائزة نوبل في عام 1979)" [3],[1].

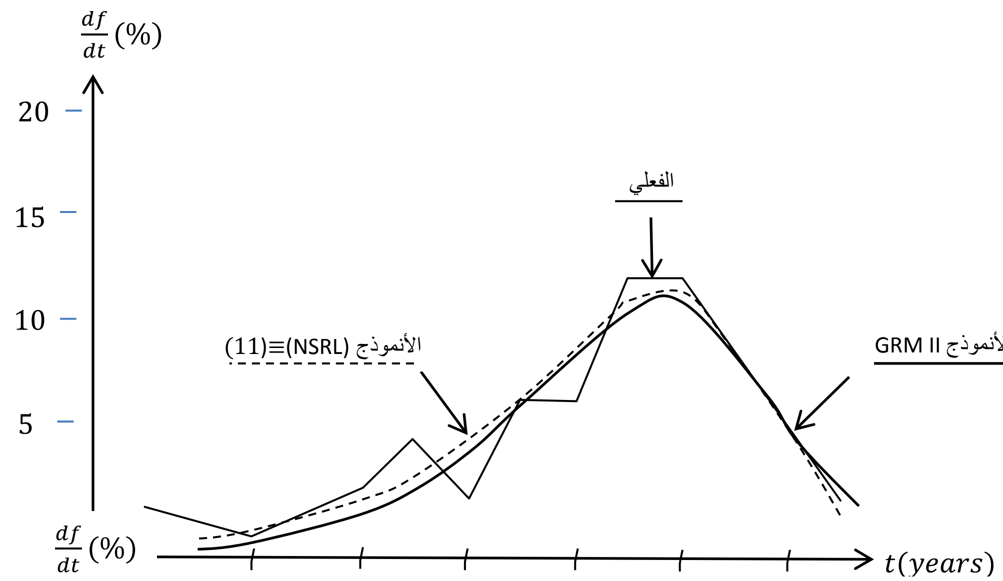
بدأت لأول مرة تثبيت الماسحات الضوئية CT في عام 1974. وقد طورت أجهزة التصوير المقطعي المحسنة بشكل كبير راحة المريض لأن المسح يمكن أن يتم بسرعة. أدت التحسينات إلى صور عالية الدقة(نتيجة تعديل بعض بارامترات الأنموذج)، والتي تساعد الطبيب في إجراء التشخيص. مثلاً: يمكن أن يساعد التصوير المقطعي المحوسب الأطباء على تصور العقيدات الصغيرة أو الأورام الصغيرة، والتي لا يمكن رؤيتها باستخدام أشعة سينية عادية، كما يمكن للأشخاص المصابين بالسرطان إجراء الأشعة المقطعية لتقييم انتشار المرض(لذلك كان التركيز أكبر على نقطة الانعطاف).

2– تصوير شعاعي للجسم (CT Body Scanner)

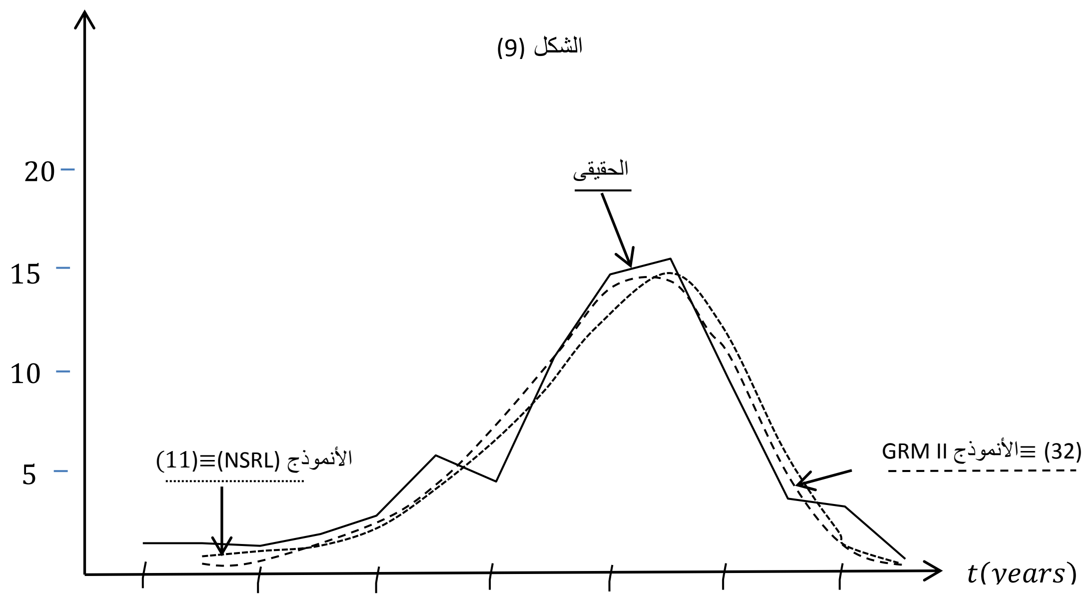
3– تصوير الثدي بالأشعة السينية (Mammograms) " أشعة سينية لتصوير الثدي، وهي الطريقة الأكثر كفاءة للكشف عن سرطان الثدي في وقت مبكر ".

	NSRL				GRM II			Point of Inflection		Mean Squared Error	
	b	F	δ	n	b	F	σ	NSRL	GRM II	NSRL	GRM II
CT Head Scanner:	0.9645	0.56	0.6644	1	0.6500	0.58	0.1866	0.40F	0.30F	10.48	10.64
CT Body Scanner:	1.3996	0.47	0.7899	1	0.9547	0.50	0.3129	0.44F	0.36F	4.08	1.52
Mammography:	0.8735	0.56	1.1215	2	0.8349	0.55	0.0184	0.53f	0.51F	3.13	3.02

كما يبين الشكلان التاليان (8) و (9) التقارب القوي بين الأنموذجين خلال فترات زمنية محددة ومتساوية.



الشكل (9)



الشكل(10)

الاستنتاجات والتوصيات:

أوضحنا أهمية استخدام بعض نماذج البدائل التكنولوجية (NSRL,GRM I ,GRM II) استناداً إلى النظرية القائلة بأن الاستبدال عملية تقليد(محاكاة)، بحيث يمكن للأنموذج استيعاب أنماط مختلفة من الاستبدال التكنولوجي، وهو يسمح بتغير معامل التقليد بمرور الوقت وبشكل منهجي، وأن يكون منحنى الاستبدال متناظراً وغير متناظر، وحيث تستجيب نقطة الانعطاف لعملية الاستبدال، وقد انطلقت الدراسة من بعض نماذج الابتكارات الطبية حيث تم توضيح عمومية الأنموذج المدروس. إن تطوير التكنولوجيا المحلية وادارة فعالية الانتشار، تكمن بدراسة نماذج لوجستية اخرى جديرة بالاهتمام، بحيث نتمكن من تبسيطها وبالتالي، فهمها في خضم التعقيدات الحياتية غير المنظمة. أرى أنه من الضروري، بل من الهام جداً، التعاون الوثيق بين الفروع المختلفة للهندسة الطبية والمهتمين بدراسة وتطوير النماذج الرياضية، وخاصة نماذج الانتشار التي تعتمد بشكل رئيسي على نظرية الانتشار للتنبؤ(قبل، أثناء، بعد) اعتماد الابتكار.

المراجع:

[1]- Professor of Marketing Science in the School of Manag. at the Univ. of Texas at Dallas , 2012

[2] - Mathematical modeling of diffusion processes, Barnaul: Almaty State University, 2013

[3]- Fundamentals of Innovation Management: Theory and Practice: A Training Manual, 2000

[4]-Rational models as theories - by CRM McKenzie - 2003 - Cited by 78 - Related articles

[5]-DIFFUSION OF INNOVATIONS Third Edition , Everett M. Rogers,1983

[6]-Innovation Diffusion Models Expressing Asymmetry and/or Positively or Negatively Influencing forces,N.M. DASier 1998

[7]- Chaotic Modelling and Simulation ,Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms,2009

[8]- A NONUNIFORM INFLUENCE INNOVATION DIFFUSION MODEL OF NEW PRODUCT ACCEPTANCE EASINGWOOD, AND EITAN MULLER, 1987