

حركة واشعاع جملة مؤلفة من شحنتين

الدكتور علي عساف*

(تاريخ الإيداع 10 / 4 / 2018. قُبل للنشر في 4 / 7 / 2018)

□ ملخص □

تناولنا في هذا البحث حركة الجسيمات المشحونة في الحقول الخارجية واشعاع جملة مؤلفة من شحنتين متبادلتين التأثير. حيث تبين لنا أن حركة كل جسيم مشحون، أو بدقة حركة الجسيمات المشحونة المتحركة في مسارات، لها أشكال قطوع مخروطية، وتقع محارقها في مركز العطالة، وهذا ما هو متوافق مع مسألة كيلر في تعيين حركة الكواكب. كما تبين لنا من خلال النتائج التي تم الحصول عليها أن الجملة المؤلفة من جسيمين متماثلين، أو من جسيمات مختلفة، ولها نفس النسبة (e/m) ، لا يمكن أن تشع في تقريب ثنائي القطب، وأن الشحنة المتحركة في مسار مغلق تشع طاقة بشكل مستمر.

وقد تم حساب المقطع العرضي التفاضلي لتشتت الجسيمات وفقاً لقانون كولوم، وتم أخيراً حساب قيمة الإشعاع الناتج عن سقوط حزمة من الجسيمات المشحونة على شحنة ساكنة (إشعاع الكبح)، حيث وُجد أن الطاقة المشعة تتناسب عكساً مع سرعة الجسيم وكذلك عكساً مع مكعب مدى تصويب الإشعاع، كما ترتبط مع زاوية التشتت والزاوية السميتية.

الكلمات المفتاحية: الكمون الفعال - الشدة الإشعاعية - التشتت - المقطع العرضي - تشتت زررورد - إشعاع الكبح.

* أستاذ مساعد في قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية - سورية

Motion and radiation of System Consisting of Two Charges

Dr. Ali ASSAF*

(Received 10 / 4 / 2018. Accepted 4 / 7 / 2018)

□ ABSTRACT □

In this paper, we discussed the motion of charged particles in the external fields and the radiation of a system of two action reciprocal charges. Where we find that the motion of each charged particle, or precisely the motion of the moving charged particles in orbits has conical forms, and their foci are located in the center of inertia, and this is compatible with Kepler's problem in determining the motion of the planets.

As we have shown, the results obtained are that a system consisting of two identical particles, or of different particles, with the same ratio (e / m), can not radiate in a dipole approximation, and that the moving charge in a closed orbit continuously radiates energy.

The differential cross section of particles scattering was calculated according to the Coulomb law, and the radiation value resulting from the incident of a beam of charged particles was finally calculated on a static charge (the braking radiation), where the radiation energy was found to be inversely proportional to the particle velocity as well as the cube with the radius of the radiation correction, and it is associated with the angle of scattering and the azimuth angle.

Key words: effective potential- radiation intensity- scattering- cross section- Rutherford scattering- braking radiation.

* Associate Prof. at the Department of Physics, Science Faculty, Tishreen Uni., Lattakia–Syria.

مقدمة

نتناول في هذا البحث مسألة حركة الجسيمات المشحونة في الحقول الخارجية التي تسببها الشحنات الأخرى، حيث نبدأ أولاً بدراسة مسألة حركة جسيمين متبادلي التأثير، ونقتصر هنا على الحالة الدورية لهما. ومن الممكن حل هذه المسألة باستخدام طريقة التقريبات المتتالية [2-1]، ففي التقريب الأول نفترض أن ضياع طاقة الجسيمين على شكل اشعاع ضعيف، وبالتالي يمكن تعيين مسار الجسيمين، وبمعرفة هذا المسار يمكن تعيين اشعاع الجملة. ومن ثم سندرس ثانياً تشتت الجسيمات واشعاعها عند تشتتها ونعين المقطع التفاضلي لتشتت هذه الجسيمات، ومن ثم نعين أخيراً مقدار الاشعاع الناتج عن سقوط حزمة من الجسيمات المشحونة على شحنة ساكنة (اشعاع الكبح). ومن الممكن بحث هذه المسألة من وجهة نظر الميكانيكا التقليدية.

أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى دراسة حركة واشعاع جملة مؤلفة من شحنتين في حالة الحركة الدورية لهما، وكذلك الظواهر التي تحدث في أثناء تدافع الجسيمات المشحونة أو تجاذبها عند سقوطها على بعضها في الحالة التي تكون فيها طاقة الجملة موجبة، ومن ثم حساب المقطع التفاضلي لتشتت هذه الجسيمات والطاقة المتشتتة الضائعة على شكل اشعاع.

طرائق البحث ومواده

نفترض أن لدينا جسيمين مشحونين كتلتيهما m_1 و m_2 ، وشحنتيهما e_1 و e_2 ، يمكن عندئذٍ كتابة الطاقة الكامنة بالشكل:

$$U = e_1 \varphi(r) \quad (1.1)$$

علماً أن $\varphi(r)$ الكمون الذي تسببه الشحنة e_2 الموجودة على بُعد يساوي r عن الشحنة الأولى. إن تابع لاغرانج لهذه الجملة يكون من الشكل:

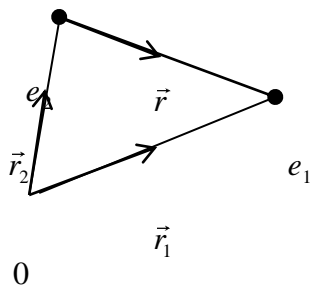
$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - e_1 \varphi(\vec{r}) \quad (1.2)$$

علماً أن: $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1$ و $\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2$ ، حيث ترمز \vec{r}_1 و \vec{r}_2 لنصفي القطرين المرسومين من مبدأ الاحداثيات o إلى النقطتين اللتين يقع فيهما الجسيمين المشحونين. ونظراً لأن الطاقة الكامنة تتعلق بالبُعد بين الشحنتين فقط، أي أن $U = U(|\vec{r}|)$ ، حيث أن:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

من المناسب الانتقال إلى جملة احداثيات مركز العطالة. لنفترض أن مبدأ الاحداثيات يقع في مركز جملة العطالة، الذي يعين بنصف القطر المتجه \vec{R} بالنسبة لأية جملة احداثيات اختيارية.

$$(1.4)$$



$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

نجد عندئذٍ من جملة العبارتين (1.3) و (1.4)، وبعد إجراء بعض الحسابات البسيطة أن:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} + \vec{R} \quad , \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} + \vec{R}$$

وبإجراء اشتقاق هذين المقدارين المتجهين الأخيرين بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 + \dot{\vec{R}} \quad , \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 + \dot{\vec{R}} \quad (1.5)$$

علماً أن $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}$ ، وهي السرعة النسبية للجسيمين، أما $\dot{\vec{R}}$ فهي سرعة مركز العطالة.

وبوضع قيمتي السرعتين \vec{v}_1 و \vec{v}_2 المحسوبتين في (1.5) في تابع لاغرانج (1.2)، نجد أن:

$$L = \frac{M}{2} (\dot{\vec{R}})^2 + \frac{\mu}{2} (\dot{\vec{r}})^2 - U(|\vec{r}|) \quad (1.6)$$

حيث $M = m_1 + m_2$ وهي الكتلة الكلية للجملة، و $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ وهي مايسمى الكتلة المختزلة للجملة".

إن احداثيات مركز عطالة الجملة \vec{R} هي احداثيات دورية (تتكرر كل دور)، والاندفاع المعمم الموافق لهذا المركز، يكون اندفاعاً محفوظاً لأن الجملة لاتخضع لتأثير قوة خارجية.

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}} = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} = \overline{const} \quad (1.7)$$

ويتحرك مركز عطالة الجملة بسرعة ثابتة (وفي الأغلب يبقى ساكناً). ولتتبع الحركة النسبية للشحنات نستخدم الاحداثيات، التي يقع مبدؤها في مركز العطالة. ونظراً لأن الطاقة الكامنة للفعل للتأثير المتبادل لاتتعلق إلا بالبعد $|\vec{r}|$ فإن الحقل يتمتع بتناظر كروي. والاحداثيات الموافقة الدوران الكيفي للجملة هي الاحداثيات الدورية، وهذا يعني أنه يتحقق قانون انحفاظ العزم.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \overline{const} \quad (1.8)$$

وذلك لأن عزم الدوران يكون معدوماً: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ لأن القوة تكون محمولة عندئذٍ على نصف القطر

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{P}) = \vec{v} \times (m \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

المتجه $\vec{F} = F \vec{e}_r$ ، وبالتالي يكون: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ (حيث \vec{e}_r متجه الوحدة)، وبضرب (1.8) سلمياً بنصف القطر المتجه \vec{r} ، نجد أن: $(\vec{L} \cdot \vec{r}) = 0$ وبالتالي فإن الحركة تتم في المستوي العمودي على \vec{L} . لنختار عزم الدوران وفق المحور oz ، نلاحظ عندئذٍ أن الحركة تكون في المستوي العمودي على z ، أي في المستوي (xy) . وباستخدام الاحداثيات القطبية (r, ψ) يمكن معاودة كتابة تابع

$$\text{لاغرانج الموافق الحركة النسبية للجملة: } L_{rel} = \mu \frac{v^2}{2} - e_1 \phi(r) \quad , \text{ حيث:}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi)^2 + (\dot{r} \sin \psi + r \dot{\psi} \cos \psi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2$$

وبالتالي يكون تابع لاغرانج:

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) - e_1 \phi(|\vec{r}|) \quad (1.9)$$

نجد وفق (1.9) أن:

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \mu r^2 \dot{\psi} = \text{const} \quad (1.10)$$

لنحسب L_z في الإحداثيات القطبية، فنلاحظ أن:

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{P})_{oz} = \mu(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = \mu r^2 \dot{\psi} \quad (1.11)$$

وبمقارنة (1.10) مع (1.11)، نلاحظ أن:

$$P_\psi = L_z = \mu r^2 \dot{\psi} = \text{const}$$

ونظراً لأن تابع لاغرانج لا يتعلق بالزمن،

فإن قانون انحفاظ الطاقة، يتحقق:

$$(1.12)$$

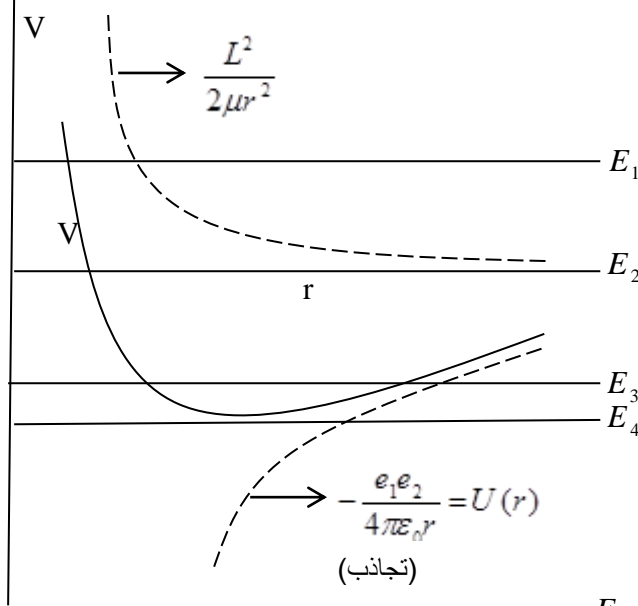
$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) + e_1 \phi(|\vec{r}|) = \text{const}$$

لنحسب $\dot{\psi}$ بدلالة L_z من (1.11)، ومن

ثم نعوض في (1.12) فنلاحظ أن:

$$(1.12')$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + e_1 \phi(|\vec{r}|) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V(|\vec{r}|)$$



علماً أن $V(|\vec{r}|)$ هو الكمون الفعال، أو كمون الطرد المركزي، ويساوي:

$$V(|\vec{r}|) = e_1 \phi(|\vec{r}|) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (1.13)$$

من الملاحظ أن الطاقة (1.12') تتطابق من حيث الشكل مع طاقة الجسيم الذي يقوم بحركة وحيدة البعد في حقل طاقته الكامنة $V(|\vec{r}|)$. تُعين خواص الحركة النسبية للجسيمات بشكل التابع $\phi(|\vec{r}|)$ ، فلو أخذنا بمثابة مثال حالة جسيمين مختلفين بإشارة الشحنة:

$$\phi(|\vec{r}|) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_2}{r} \quad (1.14)$$

علماً أن e_2 شحنة الجسيم الثاني، نلاحظ عندئذٍ أن مسار الطاقة المركزية لهذه الجملة يكون بالشكل المرسوم جانباً.

فالخطان المنقطان يعينان مساري المنحنيين $(-\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r})$ و $(\frac{L^2}{2\mu r^2})$ ؛ ومسار المنحني $V(|\vec{r}|)$ ، وموضع نقطة

النهاية الصغرى يتعلقان بقيمة العزم L . نعاود كتابة العلاقة (1.12') بالشكل:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} (E - V(|\vec{r}|)) \quad (1.15)$$

نلاحظ أن المناطق المسموح بها للحركة النسبية تتعلق بالعلاقة بين E و V . ففي المناطق التي يكون فيها $E > V(|\vec{r}|)$ ، فهي مناطق ممكنة (مسموح بها) للحركة، أما المناطق التي يكون فيها $V > E$ ، فهي مناطق محظورة على الحركة. وإذا تحققت جذور للمعادلة:

$$E = V(|\vec{r}|) \quad (1.16)$$

فإنها توافق نقاط التوقف (الانقطاع) أو نقاط الاستقرار r_0 ، التي تؤول فيها السرعة القطرية إلى الصفر. إذا كانت $E \geq 0$ فإن المناطق المسموح بها للحركة تمتد من المنطقة لامتناهية البعد $r \rightarrow \infty$ ، إلى نقطة التوقف أو الانقطاع، الموافقة النهائية الصغرى للبعد بين الجسمين، والتي تعين بنقطة تقاطع المستقيم E مع المنحني $V(|\vec{r}|)$. أما إذا كانت $E < 0$ ، فإنه توجد نقطتان للانقطاع، وتوافقان البعدين الأصغر والأكبر بين الشحنتين، حيث تتم الحركة عندئذٍ بين هاتين النقطتين. حتى نعين المسار نتخلص من الزمن في (1.11) و (1.12)، وعندئذٍ وبعد إجراء حسابات بسيطة نلاحظ أن:

$$\psi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L^2} (E - e_1 \varphi) - \frac{1}{r^2}}} - \psi_0 \quad (1.17)$$

حيث $(-\psi_0)$ ثابت المكاملة. وعندما تكون الحركة في حقل كولومي يمكن استبدال φ ، بقيمتها المعطاة في (1.14)،

$$\text{ونجد عندئذٍ أن: } \psi = - \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{e_1 e_2 \mu}{2\pi \epsilon_0 L^2} u + \frac{2\mu E}{L^2}}} - \psi_0 \quad (\text{علماً أن } u = \frac{1}{r})$$

وبالإمكان معاودة كتابة هذه العبارة بالشكل: $\psi + \psi_0 = - \int \frac{du}{\sqrt{Au^2 + Bu + C}}$ حيث: $A = -1$ و

$$B = \frac{e_1 e_2 \mu}{2\pi \epsilon_0 L^2} \text{ و } C = \frac{2\mu E}{L^2}. \text{ وبإجراء المكاملة، عندما تتحقق الشروط المذكورة أعلاه، نحصل على [12]:}$$

$$\begin{aligned} \psi + \psi_0 &= \frac{-1}{(-A)^{1/2}} \arcsin \frac{2Au + B}{(B^2 - 4AC)^{1/2}} = - \arcsin \frac{\frac{e_1 e_2 \mu}{2\pi \epsilon_0 L^2} - 2u}{\sqrt{\left(\frac{e_1 e_2 \mu}{2\pi \epsilon_0 L^2}\right)^2 + \frac{8\mu E}{L^2}}} \\ &= - \arcsin \left[- \frac{\left(\frac{4\pi \epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} u - 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu (e_1 e_2)^2}}} \right] = \arcsin \left(\frac{\frac{4\pi \epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} u - 1}{\sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu (e_1 e_2)^2}}} \right) \\ &= - \arcsin \left(\frac{\frac{4\pi \epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} u - 1}{\sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu (e_1 e_2)^2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{والتالي:} \quad \cos(\psi + \psi_0) &= \left(\frac{\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} u - 1}{\sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu(e_1 e_2)^2}}} \right) \quad \text{أي أن:} \\ \text{أو:} \quad 1 + \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu(e_1 e_2)^2}} \cos(\psi + \psi_0) &= \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} u \\ \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu} \frac{1}{r} &= 1 + \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu(e_1 e_2)^2}} \cos(\psi + \psi_0) \end{aligned} \quad (1.18)$$

وبمقارنة هذه العبارة الأخيرة (1.18) مع المعادلة العامة للقطع المخروطي: $\frac{P}{r} = 1 + e \cos(\psi + \psi_0)$ علماً أن e هي الشذوذ (الاختلاف أو الانحراف المركزي). نلاحظ أن حركة الشحنات تتم في قطع مخروطي، انحرافه المركزي (شذوذه):

$$e = \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 E L^2}{\mu(e_1 e_2)^2}} \quad (1.19)$$

و أن بارامتر (أو معلم) هذا القطع $P = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu}$ ، وتبعاً لإشارة الطاقة E تكون لدينا الأشكال الآتية:

$$I) E > 0, \quad e > 1; \quad \text{قطع زائد;} \quad (1.20)$$

$$II) E = 0, \quad e = 1; \quad \text{قطع مكافئ;} \quad (1.20)$$

$$III) E < 0, \quad e < 1; \quad \text{قطع ناقص (اهليلجي);} \quad (1.20)$$

لنعين الآن اشعاعه
عندما $E < 0$. إن الطاقة
الطاقة تخرج من الجملة)
دائرة $IV) E = -\frac{\mu(e_1 e_2)^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 L^2} \Rightarrow E < 0, e = 0;$ السالب أن

$$-\frac{dE}{dt} = I = \int \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\vec{P}^2(\tau_0)}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\vec{P}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (1.21)$$

حيث $\vec{P} = e\vec{d} \Rightarrow \vec{P} = e\vec{d} = e\vec{r} = e\vec{w}$ و \vec{S} متجهة بوينتتغ، $d\vec{\Sigma}$ عنصر السطح،
[4-5]، d البعد بين شحنتي ثنائي القطب، \vec{w} متجه التسارع. إذا كانت الجملة مؤلفة
 $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$ (زمن تأخر الجملة)

من جسمين فإن: $\vec{P} = e_1 \vec{w}_1 + e_2 \vec{w}_2$ ، \vec{w}_1 و \vec{w}_2 مركبتي التسارع، وزيادة على ذلك كانت جملة مغلقة، يكون:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1}, \quad \vec{w}_2 = -\frac{\vec{F}}{m_2}$$

$$\vec{P} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2 = e_1 \vec{w}_1 + e_2 \vec{w}_2 = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \vec{F}$$

تكون عندئذٍ الطاقة الضائعة خلال الزمن dt مساوية كما يتضح لنا من (1.21):

$$-dE = \frac{\ddot{\vec{P}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (\vec{F})^2 dt \quad (1.21')$$

حيث $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^3} \vec{r}$ (القوة الكولومية). بمكاملة هذه العلاقة (1.21') نحصل على الزمن $t \approx 10^{-9} s$ ، علماً أن

$r \approx 10^{-10} m$. وتكون الطاقة الضائعة على شكل اشعاع خلال زمن يساوي الدور T ، مساوية:

$$-(\Delta E)_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^T \ddot{\vec{P}}^2 dt = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_0^T \vec{F}^2 dt \quad (1.22)$$

من النتائج الهامة التي تنتج عن العبارة الأخيرة (1.22)، هو أن الجملة المؤلفة من جسيمان متماثلين، أو من جسيمات مختلفة، لكن لها النسبة $\frac{e}{m}$ ذاتها، لا يمكن أن تشع في تقريب ثنائي القطب، وحتى نعين في هاتين الحالتين وأمثالهما الشدة الاشعاعية، يجب أن نأخذ بالحسبان حدوداً أخرى من مراتب أعلى في التقريب المستخدم. وبدلاً من مكاملة هذه العبارة الأخيرة خلال الدور T ، يمكن مكاملتها بالنسبة للزاوية ψ باستخدام العلاقة (1.11):

$$-(\Delta E)_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 (e_1 e_2)^2 \frac{\mu}{L} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r^2}$$

فإذا ماتم تعويض r بقيمتها محسوبة من العبارة السابقة، التي تعين المعادلة العامة للقطع المخروطي:

$$\frac{P}{r} = 1 + e \cos(\psi + \psi_0) \quad \text{و} \quad P = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{e_1 e_2 \mu}$$

$$-(\Delta E)_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0}\right)^4 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^3}{L^5} \int_0^{2\pi} [1 + e \cos(\psi + \psi_0)]^2 d\psi \quad \text{نجد:}$$

وبالتالي:

$$-(\Delta E)_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0}\right)^4 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^3}{L^5} \pi(2 + e^2) \quad (1.23)$$

ونرى من ذلك أن الشحنة المتحركة في مسار مغلق تشع طاقة بشكل مستمر. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها المسار دائرياً، حيث يكون عندئذٍ - كما يتبين من الحالة الأخيرة من (1.20) أن: $L^2 = -\frac{\mu(e_1 e_2)^2}{32\pi^2 \epsilon_0 E}$ وبالتالي تؤول

عندئذٍ (1.23) إلى الشكل الآتي، علماً أن $E < 0$:

$$-(\Delta E)_T = \frac{16\pi\sqrt{2\mu}}{3\epsilon_0^{5/2} c^3 e_1 e_2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 |E|^{5/2} \quad (1.24)$$

يتضح لنا من ذلك أن النموذج الدوراني التقليدي يؤدي إلى سقوطه على النواة. في حين تبين المعالجة الكمومية لهذه المسألة أن هذا السقوط يتناقض مع الواقع، كما وتوضح هذه المعالجة عدم استقرار النموذج المداري الكوكبي للذرة، وهذا يعني بدوره عدم صلاحية استخدام الميكانيك والالكتروديناميك التقليديين لدراسة الظواهر التي تحدث داخل الذرة.

2- تشتت الجسيمات واشعاعها في أثناء التشتت

لندرس الآن الظواهر التي تحدث في أثناء تدافع الجسيمات المشحونة أو تجاذبها عند سقوطها على بعضها في الحالة التي تكون فيها طاقة الجملة موجبة ($E > 0$). لو أمعنا النظر في الشكل المرسوم في الفقرة السابقة، الذي

يوضح تغيرات $V(r)$ ، نرى أنه في كلتي الحالتين المذكورتين (التدافع أو التجاذب) لا تكون الحركة عندئذٍ في مسار مغلق.

وبهدف التوضيح نفترض أن أحد الجسمين ثابت في جملة المقارنة المخبرية الساكنة، حيث يسمى هذا الجسم بالهدف (الجسم الي يحدث عليه التشتت)، أما الجسم الآخر (الثاني)، فهو الجسم الوارد على الهدف (الجسم الي يقع عليه فعل التشتت)، حيث نفترض أنه يتحرك بالنسبة للجسم الأول. فعلى بُعد كبير من مكان وقوع التشتت تكون حركة هذا الجسم، مستقيمة، وبسرعة تساوي \vec{v}_0 ، لكن بعد اقترابه من الجسم الأول يحدث حيود أو انحراف في حركته عن الحركة المستقيمة. في حين أن الجسم الأول (المشتت)، والذي كان في البداية ساكناً يكتسب اندفاعاً، وقد ينتقل من جراء ذلك إلى الوضع الحركي. حيث نقول عندئذٍ أنه حدث تصادم بين الجسمين، وينشأ من جراء ذلك فعل متبادل. هذا ويمكن أن تعطي دراسة عمليات التشتت معلومات هامة عن خواص الأفعال المتبادلة بين الأجسام.

تعد دراسة ظواهر التشتت في وقتنا الحاضر أسس الطرائق التجريبية في الفيزياء النووية، وتتم دراسة الأفعال المتبادلة بين الجسيمات كالإلكترونات السريعة أو البروتونات عن طريق اسقاط حزمة منها لها خواص معينة وسرعات معلومة على عينة من المادة، التي تحتوي على جسيمات أو عناصر من نوع آخر. ومن خلال متابعة حزمة الجسيمات المشتتة ودراستها يمكن التوصل إلى بعض النتائج عن خواص الأفعال المتبادلة، الناتجة عن التصادم. ويكون للتشتت عند اجراء هذا النوع خواصاً كتلية، حيث تتم مراقبة سلوك الحزمة التي تحتوي على عدد هائل من الجسيمات. لكن يقع في أساس هذه العملية الأفعال المتبادلة الافرازية للجسيمات المشتتة والمشتتة، ولذلك يجب أن يعين التشتت بمقدار لايتعلق لا بخواص الحزمة الواردة (الساقطة) ولا بخواص المادة المشتتة مثل كثافتها مثلاً، بل يعين بشكل استثنائي بالفعل المتبادل للجسيم الواحد المشتت مع الجسيم الآخر المشتت (المفاعيل الافرازية).

تعين الحزمة الواردة عادة بشدتها أو بكثافة تدفق جسيماتها $I_0 = n v_0$ ، علماً أن n عدد الجسيمات الموجودة في الحزمة الواردة في وحدة الحجم، والتي سرعتها v_0 . يتبين من ذلك لنا أن I_0 تساوي كذلك عدد الجسيمات المارة من خلال سطح يساوي وحدة السطوح، من مقطع الحزمة، في وحدة الزمن.

لنفترض أن الجسم المُشْتَت يقع في مبدأ الاحداثيات، وليكن عدد الجسيمات المارة خلال المساحة، التي تُرى من مركز التشتت ضمن الزاوية المجسمة العنصرية $d\Omega$ في وحدة الزمن هو dN جسيماً مشتتاً. ولنعين الآن الكمية الرئيسية التي تحدد (تعين) عملية التشتت، والتي هي المقطع التفاضلي للفعال للتشتت $d\sigma$ [4-7]، والذي يعين بالعلاقة:

$$d\sigma = \frac{dN}{I_0} \quad (2.1)$$

يتضح لنا من هذا التعيين أن قياس المقطع الفعال للتشتت هو قياس مساحة، وعندئذٍ يكون عدد جسيمات الجملة، المشتتة في الزاوية العنصرية المجسمة $d\Omega$ خلال الزمن dt في الحجم V مساوياً:

$$dN_{tot} = d\sigma I_0 \rho V dt \quad (2.2)$$

علماً أن ρ كثافة الجسيمات (وبالتالي يكون $\rho V dt$ هو العدد الكلي للجسيمات المشتتة خلال الزمن dt).

فإذا ماتم التشتت بدون تغير طاقة الجسيمات المشتتة فإنه بضرب بسط ومقام (2.1) بطاقة الجسيم ϵ ، يمكن معاودة

كتابة المقطع التفاضلي للتشتت، بالشكل:

$$d\sigma = \frac{dI}{\epsilon I_0} \quad (2.3)$$

علماً أن dI تدفق الطاقة، التي تحملها الجسيمات في وحدة الزمن في الزاوية المجسمة $d\Omega$ و ϵI_0 هي كثافة تدفق الطاقة في الحزمة الواردة. إضافة إلى المقطع التفاضلي للتشتت يعين المقطع الكلي بالعلاقة:

$$\sigma = \int d\sigma \quad (2.4)$$

علماً أن المكاملة تتم من أجل جميع القيم الممكنة للزاوية المجسمة. يمكن تعيين الكمية $d\sigma$ ، التي تعين من خلال القياس المباشر للكميات، بدلالة البارامترات (المعلمات) التي تعين التصادمات الافراضية المنفصلة.

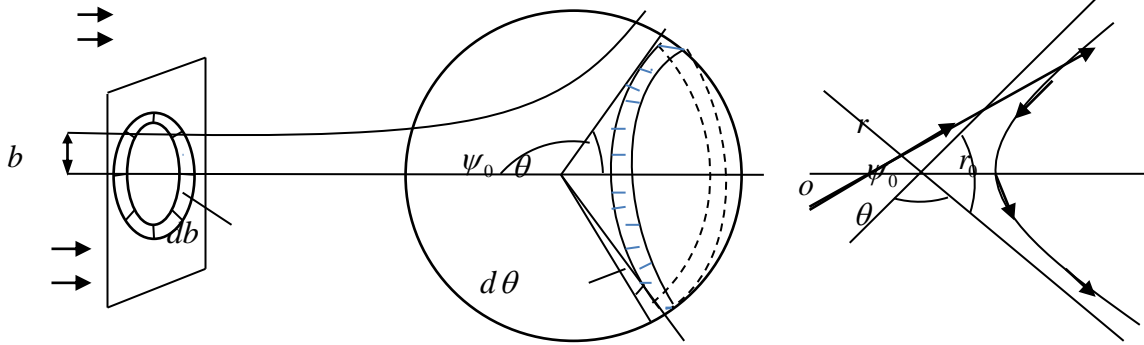
لننتبع الفعل الافراضي بين جسيمين، مقتصرين على الحالة التي تبقى فيها الطاقة الداخلية لكلي الجسيمين دون تغيير، حيث يسمى هذا النوع من التصادمات بالتصادمات المرنة. ويجب هنا تجنب وقوع التباس من نوع ما، في أنه في أثناء التصادمات المرنة تبقى طاقة التشتت للجسيمات ثابتة، فالجسيم المُشْتَت يأخذ من الجسيم المتشتت عليه، بعض الاندفاع والطاقة، حيث تتعلق قيمة كل من هذين المقدارين بقيمة النسبة بين كتلتي هذين الجسيمين. عندما تكون التصادمات الحاصلة غير مرنة كتصادم الكترون مثلاً مع أيون، تنتج طاقة إضافية، تنتقل إلى الأيون، حيث تتغير حالته الداخلية، وتعد هذه المسألة معقدة، لذلك ندع البحث فيها الآن جانباً.

يتم في البداية حساب عملية تشتت جسيمين بالنسبة إلى جملة مركز العطالة. فوفقاً للنتائج التي حصلنا عليها في الفقرة السابقة، تؤول هذه الحركة إلى حركة جسيم واحد، كتلته، تساوي "الكتلة المختزلة" $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ، بالنسبة إلى

مركز القوة غير المتحرك، الذي يقع بدوره في مركز العطالة.

لنفترض أن حركة الجسيم الوارد (الساقط) من مكان بعيد عن مركز العطالة، هي حركة مستقيمة، بسرعة تساوي \vec{v}_0 ،

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \mu \vec{r} \times \vec{v}_0 \quad , \quad E = \mu \frac{v_0^2}{2} \quad \text{تكون عندئذٍ طاقته الحركية وعزمه مساويين:}$$



الشكل (1)

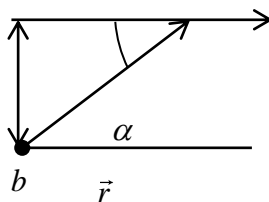
الشكل (2)

فإذا فرضنا أن البعد بين مركز القوة المؤثرة، والمستقيم الذي كان يتحرك وفقه الجسيم بسرعة تساوي \vec{v}_0 عندما لم يكن

بعد بينه وبين الجسم المشتت أي فعل متبادل، هو b ، فإن:

$$|\vec{r} \times \vec{v}_0| = r v_0 \sin(\pi + \alpha) = r v_0 \sin \alpha = v_0 b$$

وبالتالي يكون:



\vec{v}_0

$$L = \mu v_0 b = b \sqrt{2\mu E}, \quad E = \mu \frac{v_0^2}{2} \quad (2.5)$$

تسمى عادة b معامل الصدم. فإذا ماتم تعيين قيمتي E و b ، فإنه يتم تعيين مسار الجسيم بشكل كامل. تعين ظاهرة التشتت بزواوية التشتت (أو الحيود) θ ، والتي هي الزاوية الكائنة بين اتجاهي حركة الجسم المتشتت الوارد من بُعد كبير من مركز التشتت قبل حدوث التشتت وبعده، هذا ويتم (أو تكمل) الزاوية θ ، الزاوية ψ_0 ، الكائنة بين المماسين للمسار، إلى الدرجة 180° . ومن جراء تناظر خطوط الحقل وشكل الحركة بالنسبة إلى محور الحزمة، فإن عدد الجسيمات المتشتتة ومعها المقطع الفعال للتشتت يتعلقان بالزاوية θ فقط، ولا يتعلقان بالزاوية السمتية ψ ، ولذلك يمكن تعيين الزاوية المجسمة $d\Omega$ بالشكل: $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ ويكون عدد الجسيمات المتشتتة في الزاوية المجسمة $d\Omega$ مساوياً، وفق (2.1):

$$dN = \sigma d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta I_0 \sigma(\theta) = I_0 d\sigma \quad (2.6)$$

حيث: $d\sigma = 2\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$. ونظراً لكون مسار التشتت يعين تعييناً وحيد القيمة بدلالة الطاقة E ومعامل الصدم b ، فإن كل زاوية تشتت توافق مساراً له معامل صدم معين، وينتج من ذلك أن عدد الجسيمات المتشتتة وفق زاوية التشتت θ هو عدد الجسيمات المتشتتة، التي تبعد عن المركز بعداً لانهائياً لكن لها جميعاً القيمة نفسها لمعامل الصدم. بكلام آخر تشتت جميع الجسيمات التي لها معامل صدم واحد b يقع في المجال $[b, b+db]$ ضمن الزاوية $d\Omega$. لذلك يمكن كتابة عدد الجسيمات المتشتتة بشكل آخر زيادة على العلاقة (2.6):

$$dN = I_0 2\pi b db \quad (2.7)$$

علماً أن $2\pi b db$ هي مساحة الحلقة المعروضة في الجزء الأيسر من الشكل السابق (الشكل (1)). وبمقارنة (2.6) مع (2.7) نلاحظ أن:

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.8)$$

ونظراً لأن القيم الكبيرة لـ b توافق قيمة صغيرة لـ θ ، ولأن مقطع التشتت يجب أن يكون كمية موجبة فلقد تم في (2.8) أخذ القيمة المطلقة للمقدارين التفاضليين db و $d\theta$. بمكاملة (2.8) في اليسار تبعاً لزاوية التشتت في المجال من θ إلى π وفي اليمين تبعاً لقيم b الموافقة، (أي في المجال من $b(\theta)$ إلى الصفر) نحصل على العبارة الهامة الآتية:

$$\int_{\theta}^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta d\theta = -\int_b^0 b db \Rightarrow \frac{b^2}{2} = \int_{\theta}^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta d\theta \quad (2.9)$$

ولحساب المقطع التفاضلي الفعال للتشتت، يجب تعيين العلاقة بين معامل الصدم b وزاوية التشتت θ ، ويكفي لذلك تعيين المسار وتابعة الزاوية بين المماسين للمسار ψ_0 و معامل الصدم b . فلو عدنا إلى العلاقة (1.17) للاحظنا أن

$$(\psi_0 + \psi) = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - \frac{L^2}{r}}} \quad \text{تعيين بالشكل:}$$

وباستخدام (2.5) و (1.13) في هذه العبارة يمكن معاودة كتابتها بالشكل:

$$(\psi_0 + \psi) = b \sqrt{2\mu E} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V(r))}} = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}} \quad (2.10)$$

هذا ويتم تعيين حدود التكامل تأسيساً على الاعتبارات الآتية: تعد ψ_0 مقدار تغير الزاوية ψ في أثناء حركة الجسم المتشنت في كامل مساره، هذا وللمسار فرعان فرع يقترب فيه الجسم المتشنت من الجسم المشنت (مركز التشنت) آتياً من اللانهاية إلى أقرب نقطة له، نقطة توقفه اللحظي، أو تغير منحى مساره r_0 ، وفرع آخر يبتعد فيه عن النقطة r_0 ذاهباً إلى اللانهاية، ويكون مسار هذا الجسم المتشنت متناظراً بالنسبة إلى نقطة توقفه r_0 في أثناء اقترابه من الجسم المشنت. وينتج عن (من) جراء هذا التناظر امكانية اعتبار عملية التشنت هذا بمثابة انعكاس في الاتجاه المعاكس، ولذلك يمكن كتابة التكامل السابق (2.10) على شاكلة مجموع تكاملين متساويين ومأخوذتين في المجال من r_0 إلى اللانهاية:

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}} \quad (2.11)$$

علماً أن r_0 جذر المعادلة الواقعة في مقام (2.10):

$$E - V(r_0) = 0 \quad ; \quad E - \left[U(r_0) + \frac{L^2}{2\mu r_0^2} \right] = 0$$

$$E = V(r_0) = U(r_0) + \frac{b^2 E}{r_0^2} \quad (2.12)$$

حيث $V(r)$ معينة في العلاقة (1.13) و L معينة في العلاقة (2.5). ونظراً لأن زاوية التشنت $\theta = \pi - \psi_0$ (الشكل (2))، فإن العلاقتين (2.11) و (2.12) تربطان القيمة المبحوث عنها للزاوية θ مع بارامترات (معلمات) التصادم، والتي هي E و b ، من أجل القيم الاختيارية للطاقة الكامنة $U(r)$ ، التي تتعلق بقيمة البعد r فقط.

بمثابة حالة خاصة ندرس فيما يلي حالة التدافع الكولومي: $U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{r}$. تأخذ في هذه الحالة العلاقة (2.12)

$$.E = \frac{b^2 E}{r_0^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{r_0} \quad \text{الشكل التالي:}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{b^2 E} + \sqrt{\left(\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{b^2 E} \right)^2 + \frac{1}{b^2}} \quad (2.14)$$

أما العبارة (2.11)، فتأخذ في هذه الحالة، الشكل التالي:

$$\psi_0 = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{E r}\right) - \frac{1}{r^2}}} \quad (2.15)$$

لنستخدم الآن متحولاً جديداً: $z = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{z} \Rightarrow dr = -\frac{dz}{z^2}$ يكون عندئذ:

$$\psi_0 = -2 \int_{1/z_0}^0 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{E b^2} \right) z - z^2}} = -2 \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 \cdot e_2|}{b^2 E} \right) z - z^2}}$$

أو: $\psi_0 = 2 \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$ ، حيث:

$$A = -1, \quad B = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{E b^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad A < 0,$$

$$|2Az + B| < (B^2 - 4AC)^{1/2}, \quad B^2 > 4AC$$

$$\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}} = \frac{-1}{(-A)^{1/2}} \arcsin \frac{(2Az + B)}{(B^2 - 4AC)^{1/2}} \quad \text{لدينا [3]:}$$

$$\Rightarrow \psi_0 = 2 \arcsin \frac{(-2z_0 - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{E b^2})}{\sqrt{(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{E b^2})^2 + \frac{4}{b^2}}} \Bigg|_{z_0=0}^{z_0 = \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E} + \sqrt{(\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E})^2 + \frac{1}{b^2}}} \quad \text{(وفق (2.14))}$$

$$\Rightarrow \psi_0 = 2 \arcsin(-1) - 2 \arcsin \left[-\frac{\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E}}{\sqrt{(\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E})^2 + \frac{1}{b^2}}} \right]$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\psi_0}{2} = \frac{\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E}}{\sqrt{(\frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{|e_1 e_2|}{b^2 E})^2 + \frac{1}{b^2}}}$$

لنحسب $\frac{\psi_0}{2}$ tg، ومن ثم لنأخذ بالحسبان أن $\psi_0 + \theta = \pi$ فنجد أن:

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{\psi_0}{2} &= \frac{8\pi \epsilon b E}{|e_1 e_2|} \Rightarrow b = \frac{|e_1 e_2|}{8\pi \epsilon E} \text{tg} \frac{\psi_0}{2} \\ \Rightarrow b &= \frac{|e_1 e_2|}{8\pi \epsilon E} \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{|e_1 e_2|}{8\pi \epsilon E} \text{ctg} \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

تعين العبارة (2.17) العلاقة بين b و θ . بوضع قيمة b محسوبة من (2.17) في (2.8)، نجد أن:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{256} \left(\frac{|e_1 e_2|}{\pi \epsilon E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.18)$$

وتعين العلاقة (2.18) المقطع التفاضلي لتشتت الجسيمات وفقاً لقانون كولوم ونظراً لأن $(e_1 \cdot e_2) \sigma$ ، فإنه يتم الحصول في حالة التجاوب ($E > 0$) على النتائج نفسها، وتسمى هذه العلاقة بعلاقة زررورد، وكان قد حصل عليها في أثناء قيامه بإجراء تجارب لتشتت جسيمات α [8-11] على الذرات. وقد سمح ذلك لزررورد بتعيين بنية الذرات، وبتعيين شكل التابع $U(r)$.

لنحسب أخيراً قيمة الاشعاع الناتج عن سقوط حزمة من الجسيمات المشحونة على شحنة ساكنة. وتسمى هذه الظاهرة اشعاع الكبح أو الاعاقة [5]، حيث يستخدم ذلك للحصول على أشعة رونتجن أو الأشعة السينية (القاسية) ذات الطيف الكثيف، والتي تلعب دوراً هاماً في إعاقة الجسيمات ذات الطاقات العالية، التي تتحرك في الأوساط المادية. نظراً لأن أهمية هذه الظاهرة تكون للحالات التي تخص الجسيمات عالية الطاقة، فإننا نقتصر على معالجة هذه الحالة. عندما تكون طاقة الحزمة الواردة كبيرة بشكل كافٍ تكون زاوية التشتت θ صغيرة، ويتم هنا استثناء حالات التصادم المباشرة لأنها حالات قليلة احتمال الحدوث. ولتبسيط الحسابات اللازمة لهذه الدراسة نفترض أن المسار شبه مستقيم.

لندرس أولاً حالة اشعاع جسيم واحد، فنفترض أن مركز التشتت يقع في مبدأ الاحداثيات. يمكن عندئذٍ كتابة العبارات الآتية لمركبات القوة المؤثرة على هذا الجسيم الوارد أو الساقط:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^3} x, \quad F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^3} y \quad (2.19)$$

حيث تتم الحركة في المستوي (xy) لذلك لاوجود لـ F_z .

لنفترض أن سرعة الجسيم \vec{v} صغيرة، وأن الانحراف عن الحركة المستقيمة في أثناء الحركة صغيراً، يمكن عندئذٍ أن نضع في مركبتي القوة السابقتين (2.19) القيمتان التقريبيتان لكل من x و y :

$$x = vt, \quad y = b \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2} \quad (2.20)$$

وبالتالي يمكن الحصول على الطاقة التي يشعها الجسيم في الزاوية المجسمة $d\Omega$ عند مروره بالقرب من مركز

التشتت، وذلك بمكاملة العبارة: $-dE = I = \int \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$ حيث $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H})^2 \vec{e}_r$ حيث \vec{H}

$$\vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\vec{H})^2 \cdot r^2 d\Omega, \quad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi) \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\tau_0) = \vec{\nabla} \tau_0 \times \frac{d\vec{A}}{d\tau_0} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\dot{\vec{A}} \times \vec{e}_r}{c} = \frac{1}{4\pi cr} \ddot{\vec{P}} \times \vec{e}_r$$

حيث: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{P}}$ (الكومون المتجه)، وبالتالي $\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{P}}$ لأنه في التقريب الموجي [5] نفترض أن r ثابتة.

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\Delta E &= \int Idt = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{16\pi^2 c^2 r^2} \int (\ddot{\vec{P}} \times \vec{e}_r)^2 r^2 d\Omega dt, \quad dt = \frac{dx}{v} \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1}\right)^2 \frac{d\Omega}{v} \int (\vec{F} \times \vec{e}_r)^2 dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

حيث: $\vec{P} = e_1 \vec{d} \Rightarrow \ddot{\vec{P}} = e_1 \ddot{v} \Rightarrow \ddot{\vec{P}} = \frac{e_1}{m_1} \vec{F}$

$$(\vec{F} \times \vec{e}_r)^2 = F^2 - (\vec{F} \cdot \vec{e}_r)^2 = (1 - e_x^2) F_x^2 + (1 - e_y^2) F_y^2 - 2F_x F_y e_x e_y$$

علماً أن e_x و e_y مركبتي متجهة الوحدة \vec{e}_r في اتجاه (وفق) الزاوية المجسمة.

وبالتالي يتطلب حساب الطاقة التي يشعها الجسيم في الزاوية المجسمة $d\Omega$ ، حساب ثلاثة تكاملات، وهي:

$$\begin{aligned} \text{I) } \int_{-\infty}^{\infty} F_x^2 dx &= \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{r^6} dx = 2 \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^3} dx \quad \text{((2.19) و (2.20))} \\ &= 2 \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{tg^2 \varphi}{(1 + tg^2 \varphi)^3} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 2 \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{8b^3} \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \end{aligned}$$

وبشكل مشابه، نجد:

$$\text{II) } \int_{-\infty}^{\infty} F_y^2 dx = \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(x^2 + b^2)^3} dx = 2 \left(\frac{e_1 e_2 b}{4\pi\epsilon}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^3} = \frac{3\pi}{8b^3} \left(\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon}\right)^2$$

$$\text{III} \int_{-\infty}^{\infty} F_x F_y dx = 0 \quad (\text{لأنه تابع فردي بالنسبة لـ } x)$$

وبتعويض قيمة هذه التكاملات الثلاثة في عبارة الطاقة التي يشعها الجسم في الزاوية المجسمة العنصرية $d\Omega$

$$-\Delta E = \frac{1}{8} \frac{(e_1^2 e_2^2)^2 (1-e_x^2) + 3(1-e_y^2)}{m_1^2 \epsilon_0^3 c^3 b^3} d\Omega \quad (2.21) \quad \text{نجد أن:}$$

فإذا أخذنا بالحسبان أن: $d\Omega = 1 \cdot \sin \theta d\theta d\psi$; $n_x = 1 \cdot \sin \theta \cos \psi$; $n_y = 1 \cdot \sin \theta \sin \psi$; نجد:

$$-\Delta E = \frac{e_1^4 e_2^4}{8(16\pi)^2 \epsilon_0^3 c^3 m_1^2 b^3 v} [4 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \psi] \cos \theta d\theta d\psi \quad (2.22)$$

يتضح لنا أن الطاقة المشعة تتناسب عكساً مع سرعة الجسم \bar{v} وكذلك عكساً مع مكعب معامل الصدم b ، وترتبط مع الزاويتين θ و ψ . وبإجراء بعض الحسابات البسيطة نلاحظ أن الطاقة الكلية المشعة، حيث

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad \text{أن:}$$

$$-\Delta E_{tot} = \frac{e_1^4 e_2^4}{8(16)^2 m_1^2 \epsilon_0^3 c^3 b^3 v} [16\pi - \frac{8}{3}\pi] = \frac{1}{192\pi \epsilon_0^3 c^3} \left(\frac{e_1^4 e_2^4}{v m_1^2 b^3} \right) \quad (2.23)$$

هذا وتهتم الجوانب التطبيقية بحساب الطاقة الضائعة من الجسيمات المشحونة السريعة على وحدة الطول من مسارها داخل الأوساط المادية، وتعد النواة التي شحنتها $e_2 = ze$ ، حيث z العدد الذري، مركز التشتت، الذي ينحرف عنه (بنحاد) الجسم المشتت (الالكترون الوارد) الذي له بدوره شحنة تساوي e (علماً أن التشتت على الالكترون يكون بدوره صغيراً، بالمقارنة مع النواة)، ويتم إهماله، وعند التشتت على كل نواة يشع الجسم المتشتت الوارد طاقة تعين بالعبارة (2.23). وبضرب (2.23) بعدد النوى في وحدة الطول من اسطوانة نصف قطرها $[b, b+db]$ ، ومن ثم بإجراء المكاملة على كامل معامل الصدم، نجد العبارة الآتية للطاقة المتشتتة الضائعة:

$$-\frac{dE}{dt} = -\int \Delta E_{tot} N \cdot 2\pi b db = \frac{N e_1^4 (ze)^2}{96 \epsilon_0^3 c^3 v} \int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{db}{b^2} = \frac{z^2 N e_1^4 e^2}{96 \epsilon_0^3 c^3 v} \frac{1}{b_{min}} \quad (2.24)$$

علماً أن N عدد النوى الموجودة في وحدة الحجم و b_{min} القيمة الصغرى لمعامل الصدم b .

نلاحظ أن العبارة (2.24) تفقد معناها (أو صلاحيتها للاستخدام) إذا لم تتحقق قيمة دنيا (صغرى) لمعامل الصدم، حيث تكون الطاقة الضائعة على شاكلة اشعاع في مسار الجسم المتشتت في الوسط المادي لانتهائية. في الواقع تكون في هذه الحالة وأمثالها قوانين الفيزياء التقليدية غير صالحة للاستخدام، وذلك عندما تكون الأبعاد عن النوى صغيرة جداً، ولا تعين القيمة الدنيا عندئذٍ لمعامل الصدم b_{min} إلا بالاعتماد على قوانين ميكانيكا الكم.

النتائج ومناقشتها

توصلنا من خلال هذا البحث النظري ونتيجة الحسابات التحليلية إلى عبارات وعلاقات رياضية تؤدي بدورها إلى نتائج فيزيائية مفيدة، حيث اتضح لنا من العلاقة (1.9) أن تابع لاغرانج الموافق الحركة النسبية للجملة L_{rel} يتطابق بالشكل مع تابع لاغرانج لجسيم واحد، لكن لهذا الجسم كتلة تساوي $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ، ويتحرك هذا الجسم في حقل كمون خارجي $e_1 \phi$. وأن الاحداثي ψ هو بدوره احداثي دوري (يكرر نفسه كل دور)، ووافق اندفاعاً معمماً منحنياً.

كما يعين الحل الي حصلنا عليه من العلاقة (1.18) حركة كل جسيم مشحون، أو بدقة حركة الجسيمات المشحونة المتحركة في مسارات لها أشكال قطوع مخروطية، وتقع محارقها في مركز العطالة. وهذا الحل يتوافق مع حل مسألة كبلر في تعيين حركة الكواكب. والقيم المميزة للقطوع المخروطية هنا هي كما هي هناك.

أيضاً من النتائج التي حصلنا عليها من خلال العلاقة (1.24) أن ضياع الطاقة على شكل اشعاع يؤدي إلى التحول التدريجي للمدار الدائري للشحنات إلى حلزون منضغط. حيث توصلنا إلى حساب الزمن $t \approx 10^{-9} s \approx ns$ من العلاقة (1.21')، التي تعني أن الالكترين الذي يدور حول البروتون يشع كامل طاقته خلال زمن يساوي $t \approx 10^{-9} sec$ ، إذا كان البعد الخطي لمداره حول البروتون من مرتبة $10^{-10} m$ ، وهذه النتيجة تتطابق مع نتيجة المرجع [11]. كما يتضح من العلاقة (2.22) أن الطاقة المشعة تتناقص كلما زادت سرعة الجسيم ومعامل الصدم وتتعلق بزوايا التشتت θ والاحداثي القطبي ψ . زد على هذه النتائج نتائج أخرى ذكرناها وناقشناها في فقرة "مواد وطرق البحث".

الاستنتاجات والتوصيات

استنتجنا من خلال بحثنا هذا أن الشحنة المتحركة في مسار مغلق تشع طاقة بشكل مستمر، وأن ضياع الطاقة على شكل اشعاع يؤدي إلى تحوّل المدار الدائري للشحنات بشكل تدريجي إلى حلزون منضغط، كما أن طاقة اشعاع الكبح تتناسب عكساً مع سرعة الجسيم وعكساً مع معامل الصدم، حيث ترتبط هذه الطاقة بشكل أساسي مع زاوية التشتت θ والزوايا القطبية ψ ، كل ذلك ذُكر في متن البحث. من المفيد متابعة هذا البحث ليشمل دراسة حركة واشعاع جملة مؤلفة من ثلاث شحنات تتحرك بسرعات منخفضة ومقارنتها مع حالة حركة واشعاع جملة مؤلفة من شحنتين.

المراجع

- [1] M.A. Jafari and A. Aminataei, Method of Successive Approximations for Solving the Multi-Pantograph Delay Equations, Gen. Math. Notes, Vol. 8, No. 1, January 2012, pp.23-28.
- [2] M.M. Hosseini, Taylor-successive approximation method for solving nonlinear integral equations, Journal of Advanced Research in Scientific Computing, Vol. 1, Issue. 2, 2009, pp. 1-13.
- [3] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 7th edn, 2007.
- [4] R. G. Brown, Classical Electrodynamics, Duke University Physics Department, 2007.
- [5] John David Jackson, Classical Electrodynamics 3rd ed. (Wiley, 1998).
- [6] Robert T. Thompson, Covariant electrodynamics in linear media, arXiv:1712.06872v2 [gr-qc] 8 Mar 2018.
- [7] Sunil Golwala, Electrodynamics, California Institute of Technology, 2018.
- [8] R. Rujiwarodom, B. Asavapibhop and P. Sangpeng, Study of Rutherford Scattering Cross Section via Geant4 Methods, Kasetsart J. (Nat. Sci.) 45 : 960 - 966 (2011).
- [9] L.D. LANDAU and E.M. LIFSHITZ, Mécanique, 4^e Edition, Traduction Française Edition Mir 1981.
- [10] R. Kumar, C. A. Bertulani, and G. Robinson, Relativistic effects in heavy-ion Coulomb scattering, PHYSICAL REVIEW C 96, 034605 (2017).
- [11] K.S. Krane, Introductory Nuclear physics, John Wiley & sons, 1988. p. 210.
- [12] I.N. Bronstein & K. A. Semendiaev, aide-mémoire de Mathématique, éditions Rylolles, 1990