مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

دراسة تأثير التفاعلات ما بين الغليونات على الضغط والمخطط الطوريلبلازما كوارك – غليون

د. محمود أحمد*
د. نجاح قبلان†
علي بشير عباس‡

(تاريخ الإيداع 12 / 4 / 2018. قُبِل للنشر في 2 / 10 /2018)

□ ملخّص □

تمَ في هذا العمل دراسة تأثير التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات من المرتبة $\left(\alpha_c = \frac{g^2}{4\pi}\right)$ على الضغط والمخطط الطوري لبلازما كوارك – غليون حيث دُرسَ كل منهما كتابع لدرجة الحرارة والكمون الكيميائي، وذلك بفرض أن البلازما تتكون من نوعين فقط من الكواركات (الكوارك العلوي –الكوارك السفلي)عديمة الكتلة و ذات تأثير متبادل فيما بينها.

اسُتخدمَ في هذه الدراسة نموذج الحجرة حيث افترضنا أن كل من ثابت الترابط بين الجسيمات $_c$ وثابت الحجرة $\boldsymbol{B}$ عبارة عن مقادير ثابتة ومستقلة عن درجة الحرارة والكمون الكيميائي. تمَ التوصل من خلال هذه الدراسة إلى أن التأثيرات المتبادلة ما بين الغليونات من المرتبة(α_c) لها إسهامٌ سلبي على ضغط البلازما، أي أنها تتسبب ببقاء الكواركات في طور الحصر وبالتالي زيادة درجة الحراة الحرجة التي يحدث عندها التحول من الطور الهادروني إلى طور بلازما كوارك غليون. تبين لنا أن هذه النتائج تتعلق بشكل أساسي بالقيمالمستخدمة لكل من ثابت الترابط بين الجسيمات وثابت الحجرة.

الكلمات المفتاحية: بلازما كوارك – غليون، التفاعلات ما بين الغليونات، نموذج الحُجرة، ميكانيك النكهة اللونية، المخطط الطوري لبلازما كوارك–غليون.

*أستاذ مساعد في قسم الفيزياء – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
† أستاذ مساعد في قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
‡ طالب دراسات عليا (دكتوراه) – اختصاص فيزياء نظرية – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد (40) العدد (5) 2018
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. (40) No. (5) 2018

Studding the effect of gluons exchange interaction on the pressure and phase diagram of quark – gluons plasma

Dr.Mhmoud Ahmad[§]
Dr.Najah Kabalan[**]
Ali Bashere Abbas[††]

(Received 12 / 4 / 2018. Accepted 2 / 10 /2018)

□ ABSTRACT □

In this work we have studied the effect of exchange interactions between the gluons of order$\left(\boldsymbol{\alpha_c = \frac{g^2}{4\pi}}\right)$ on the pressure and phase diagram of quark – gluon plasma, where we have studied both of them as function of temperature and chemical potential, and we assumed that, the plasma composed of just two massless quarks (the up and down quark) which exchange interaction.

The bag model has been used, where the bag **B** and coupling $\boldsymbol{\alpha_c}$ constants were assumed to be independent of temperature and chemical potential. We have found that the gluons interactions of order $(\boldsymbol{\alpha_c})$ had a negative effect on the pressure of the plasma, which cause the quarks to stay in the confined phase, and then increases the critical temperature where the hadrons dissolve to quarks and gluons. We have showed that, the results depend strongly on the values of both the coupling and bag constants which had been used.

Key words: QGP plasma, gluons interactions, MIT bag model, Quantum chromodynamic, phase diagram of QGP**.**

[§]**Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[**]**Professor, Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[††]**Postgraduate Student (Phd), theoretical Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

تعتمد دراسة تصادم الأيونات الثقيلة عندَ الطاقات فوق النسبية$\left(m(MeV) \ll T(MeV)\right)$إلى حدٍّ كبير على الفكرة القائلة بأن المادة تصبح أكثر بساطة عندَ هذا الحد من درجات الحرارة، حيث من المتوقع استناداً إلى نظرية التحريك اللوني (QCD) أن تتحلل الهادرونات (البروتونات والنترونات) لتتحول إلى غازٍ من الكواركات والغليونات ذات التأثير المتبادل الضعيف فيما بينها والذي يعرف باسم بلازما كوارك – غليون (QGP) ، ومنه نجد أن دراسة خصائص هذا الطور من المادة يصبح ممكن باستخدام الطُرق التقريبية[2−1].

يَتَصفُ التصور الفيزيائي لبلازما (QGP)، والذي نحصل عليه باستخدام طرق النشر التقريبية بالبساطة، إذ تكون بلازما (QGP) مشابهة بشكل كبير للبلازما الكهرومغناطيسية (QED) مع بعض الاختلافات نتيجة كون جسيمات الأولى تمتلك درجات حرية أكثر من جسيمات الثانية. يُظهر منشور الطاقة لبلازما (QGP) بتابعية ثابت الترابط α_s من المرتبة الأولى أن هذه البلازما مشابهة لغازً من الجسيمات ضعيفة التأثير فيما بينها مع اندفاع متبادل من رتبة $P\sim T$[3]، بينما يظهر تأثير التفاعل على البلازما في نموذج شبه – الجسيم بكونه يحول جسيماتها إلى أشباه جسيمات ثقيلة ذات كتلة فعالة ناتجة عن تبادل التأثير مع باقي الجسيمات في البلازما[5−4].

على الرغم من كون درجات الحرية الخاصة بالبلازما قدّ تمَ تحديدها وكذلك الأمر بالنسبة للنظريات الفعالة اللازمة لدراسة ديناميكية وخصائص هذه البلازما قدّ تمَ وضعها منذ فترة زمنية لا بأس بها [7−6]، إلا أن دراسة الخصائص الترموديناميكية لهذه البلازما بتابعية منشور ثابت الترابطα_s(مُعامل عديم الأبعاد في نظرية التفاعلات القوية يعبر عن قوة التفاعل ما بين الجسيمات) لاتزال قيدَ البحث والدراسة وذلك للوصول إلى أقرب النتائج النظرية التي تتوافق مع أحدث التجارب التي تجري في مصادمات الجسيمات،إضافةً للدراسات التي تستخدم طريقة المحاكاة الحاسوبية لهذه التجارب.[8]

تعود الفكرة القائلة بأن الكواركات والغليونات تتبادل التأثير فيما بينها بشكل ضعيف من أجل درجات الحرارة العالية أو الدفوع المتبادلة الكبيرة إلى خاصية أساسية من خصائص لِـ (QCD)، والتي تعرف باسم الحرية المقاربة (asymptotic freedom)،حيث تبين هذه الخاصية أن ثابت الترابط ما بين الكواركات والغليونات والذي يعبر عن قوة التفاعل ما بين هذه الجسيمات تتناقص قيمته بازدياد كلٍ من درجات الحرارة أو الاندفاع المتبادل[10−9].

استناداً إلى خاصية الحرية المقاربة،توجد طريقتان للحصول على بلازما كوارك – غليون. الأولى: عندَ درجات الحرارة العالية وذلك بفرض أن الكواركات والغليونات جسيمات عديمة الكتلة وعديمة التأثير فيما بينها، حيث تكون الكثافة الباريونية (الكمون الكيميائي) معدومة فإن درجة الحرارة الحرجة التي تتحلل عندها الهادرونات إلى بلازما (QGP)هي[11]$T_c = 140\text{Mev}$. إلا أن بعض الحسابات باستخدام طريقة الشبكة والتي تعتمد الطُرق الحاسوبية لحساب تابع التوزع للبلازما بينت أن هذه الدرجة تساوي تقريباً[12]$T_c \cong 170\text{Mev}$. أما الطريقة الثانية: في حالة الكثافات الباريونية العالية ودرجات الحرارة المنخفضة جداً، فإن الكثافة الباريونية الحرجة التي تتحلل عندها الهادرونات إلى بلازما (QGP) تبين أنها تساوي إلى [11]$n_B \cong 0.7\text{fm}^{-3}$، أي أنها أكبر بحوالي أربع مرات من الكثافة الباريونية للمادة النووية التجريبية [14].استناداً إلى ما سبق يمكننا أن نشاهد بلازما (QGP) في مكانيين في الطبيعة، الأول عندَ بدء الكون بُعيدَ الانفجار العظيم بحدود$(10^{-4}s)$ ، أما الثاني فهو في مراكز النجوم الثقيلة مثل النجوم النيترونية والنجوم الكواركية. إلا أنه تبين تجريبياً أننا نستطيع توليد هذه البلازما أيضاً من خلال استخدام مصادمات الأيونات الثقيلة[13] .

تمَ الحصول على كل من درجة الحرارة الحرجة (عندَ $n_B = 0$) و الكثافة الباريونية الحرجة (عندَ $T = 0$) التي يتم عندهما التحول من الطور الهادروني إلى طور بلازما (QGP) بفرض أن البلازما مكونة من نوعين فقط من الكواركات هما الكوارك العلوي والسفلي(quark up , quark down) وذلك بفرض أن الكواركات والغليونات لا تتبادل التأثير فيما بينها، حيث تمَ أجراء الحسابات السابقة باستخدام نموذج الحجرة (bag model) في المرجع [11]. إضافةٍ لذلك، تم دراسة الخصائص الترموديناميكية لبلازما (QGP) باستخدام نفس الطريقة، وذلك بفرض أن الكواركات تتبادل التأثير فيما بينها بواسطة غليون واحد، حيث اسُتخدمت نظرية سائل فيرمي لحساب طاقة التفاعل ما بين الكواركات وذلك في حالة تبادل غليون واحد[14]. في هذه الدراسة تمَ التعامل مع الغليونات على أنها جسيمات عديمة الكتلة ولا تتبادل التأثير فيما بينها وذلك لسهولة الدراسة. إلا أنه من المعّلوم أن من أهم نقاط الاختلاف بين القوى الكهرومغناطيسية والقوى النووية الشديدة، أن وسطاء التفاعل في الأخيرة (الغليونات) تتفاعل فيما بينها، بينما لا تتبادل هذه الوسطاء(الفوتونات) في الأولى التأثير فيما بينها. ولذلك سوفَ يكون من المهم إعادة نفس الحسابات للمرجع [14] ولكن بعدَ الأخذ بعين الاعتبار أن الغليونات في البلازما تتفاعل فيما بينها، حيث قمنا من خلال هذا العمل بدراسة طاقة التفاعل ما بين الغليونات بتابعية ثابت الترابط حتى المرتبة $(\boldsymbol{\alpha_c})$ و التي تمَ حسابها في المرجع [15]. تمت هذه الدراسة وفق المراحل الأتية: تمَ في المرحلة الأولى عرض نتائج المرجع [11] من أجل الحصول على الضغط في الحالة الحرة للبلازما ولكن من أجل كمون كيميائي للكواركات غير معدوم. أما في المرحلة الثانية عملنا على إعادة عرض نتائج المرجع [14] من أجل الكواركات تتبادل التأثير فيما بينها، في حين تمَ تخصيص المرحلة الثالثة لدراسة تأثير تفاعل الغليونات على هذا الضغط، وأخيراً تمَ عرض و مناقشة النتائج التي حصلنا عليها.

1. حالة عدم التأثير المتبادل ما بين مكونات البلازما:

بفرض أن بلازما كوارك – غليون مؤلفة من غاز مثالي من الكواركات والغليونات لا تتبادل التأثير فيما بينها، عندئذٍ يمكننا كتابة تابع التحاص (التجزئة) لهذه الجملة وفق الصيغة الأتية: [16]

$$\ln Z = \mathrm{V} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3} \ln\left(1 \pm e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\right) \qquad (1.1)$$

حيث أن $\beta = \frac{1}{k_B T}$، k_B: ثابت بولتزمان، T درجة الحرارة، ε: طاقة الجسيم و μ : الكمون الكيميائي.يمكننا حساب طاقة التفاعل ما بين الغليونات بفرض أنها جسيمات حرة مهملة الكتلة انطلاقاً من العلاقةالأتية:[17]

$$\mathcal{E}_g = \int \varepsilon_g \, n_p \mathcal{g}_g \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \qquad (2.1)$$

$\mathcal{g}_g$: عامل التحلل للغليونات ويساوي إلى $\mathcal{g}_g = 2 \times 8 = 16$، بينما ε_gتمثل طاقة الغليون الواحد وتعطى بالعلاقة $\varepsilon_g = \sqrt{p^2 + m^2}$ والتي تتناهى إلى(p)من أجل $m \to 0$ و n_p: تابع توزع بوزه – أينشتاين للغليونات ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$n_p = \frac{1}{e^{P/T-1}} \;\; ; \;\; \mu_g = 0$$

بتعويض العلاقات السابقة في المعادلة (2.1) نحصل على:

$$\mathcal{E}_g = \mathcal{g}_g \int \frac{4\pi p^3}{e^{P/T-1}} \frac{dp}{(8\pi^3)} = \frac{\mathcal{g}_g}{2\pi^2} \int \frac{p^3 dp}{e^{P/T-1}}$$

بإجراء تغير للمتحول في التكامل السابق كما يلي:

$$\frac{P}{T} = X \implies P = T.X \; ; dp = T.dX$$

ومنه نحصل على:

$$\mathcal{E}_g = \frac{\mathcal{g}_{gT^4}}{2\pi^2}\int \frac{X^3 dX}{e^X - 1}$$

يُعد هذا التكامل من التكاملات المعروفة في الفيزياء الإحصائية [18]، وهو يساوي إلى$\left(\frac{\pi^4}{15}\right)$ وبالتالي تصبح طاقة الغليونات في الحالة الحرة مُعطاة بالصيغة الأتية:

$$\mathcal{E}_g = 16\left(\frac{\pi^2}{30}\right)T^4 \qquad (3.1)$$

وبما أن الجملة تعتبر جملة فوق نسبية (حيث تكون كتل جسيمات الجملة مهملة) يمكننا الاستفادة منالعلاقة التي تربط ضغط الجملة وطاقة هذه الجملة كما يلي:

$$\mathrm{P}_g = \frac{1}{3}\mathcal{E}_g = 16\left(\frac{\pi^2}{90}\right)T^4 \qquad (4.1)$$

إن العلاقتين (3.1) و (4.1) تمثل قوانين ستيفان– بولتزمان في الاشعاع مع درجات حرية قدرها في هذه الحالة $\mathcal{g}_g$.
أما بالنسبة للكواركات يمكننا حساب طاقتها مُفترضين أنها جسيمات عديمة الكتلة ولا تتبادل التأثير فيما بينها وذلك من أجل درجات الحرارة العالية جداً بحيث $m_{\mathrm{q}} \ll T$. في هذه الحالة يجب أن نأخذ بعين الاعتبار تواجد أضداد الكواركات$(\bar{\mathrm{q}})$ في الجملة نتيجة عملية بناء وفناء الزوج $(\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}})$، عندئذٍ يمكننا حساب الكثافة العددية للكواركات في الجملة من العلاقة الأتية:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{q}} = \sum_{\varepsilon>0}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

وبما أن عدد أضداد الكواركات يساوي واحد منقوص من عدد الكواركات مع طاقة سالبة يمكننا كتابة:

$$\mathrm{N}_{\bar{\mathrm{q}}} = \sum_{\varepsilon<0}\left(1-\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\right) = \sum_{\varepsilon>0}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

وبالتالي يمكننا اعتبار كل منالكواركات وأضدادها عبارة عن جملتين فيرميونيتين مستقلتين عن بعضهما البعض مع طاقة موجبة ولكن بكمون كيميائي مختلف:

$$m_{q,\bar{q}} \to 0 \quad , \quad \mu_q = -\mu_{\bar{q}} = \mu$$

يصبح تابع التوزع للكواركات وفق الصيغة الاتية:

$$\ln Z = \mathcal{g}_q \sum_p \left[\ln\left(1+e^{-\beta(p-\mu)}\right) + \ln\left(1+e^{-\beta(p+\mu)}\right)\right] \qquad (5.1)$$

حيث$\mathcal{g}_q$: يمثل عامل التحلل للكواركات ويساوي إلى $\mathcal{g}_q = 3\times 2 = 6$ وذلك دونالأخذ بعين الاعتبار عامل الشحنة اللونية للكواركات ، تصبح العلاقة (5.1)بعد إجراء عملية تحويل المجموع إلى تكامل على الفراغ الطوري وفق الصيغة الأتية:

$$\ln Z = \frac{\mathcal{g}_q 4\pi \mathrm{V}}{h^3 c^3}\int d^3p\left[ln\left(1+e^{-\beta(p-\mu)}\right) + ln\left(1+e^{-\beta(p+\mu)}\right)\right]$$

بإجراء عملية المكاملة بالتجزئة نحصل على:

$$\ln Z = \frac{\mathcal{g}_q 4\pi \mathrm{V}}{h^3 c^3}\left(\frac{\beta}{3}\right)\int 4\pi p^2 dp\left[\frac{1}{e^{\beta(p-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{-\beta(p+\mu)}+1}\right]$$

ومن ثم عملية تغير في المتحول في التكامل السابق كما يلي:

$$X = (p-\mu)\beta\,, Y = (p+\mu)\beta \Rightarrow p = XT+\mu\,, p = YT-\mu$$

ليصبح هذا التكامل وفق الصيغة الأتية:

$$\ln Z_q = \frac{g_q 4\pi V}{h^3 c^3}\left(\frac{\beta}{3}\right)\left[\int_0^{\infty} dX \frac{(x+\beta\mu)^3}{e^X+1}\int_0^{\infty} dY \frac{(Y-\beta\mu)^3}{e^Y+1} + \int_{-\beta Y}^{0} dX \frac{(X+\beta\mu)^3}{e^{\beta X}+1} - \int_0^{\beta\mu} dY \frac{(Y-\beta\mu)^3}{e^{\beta Y}+1}\right]$$

إذا ما استبدلنا $(Y=-X)$ وبعدَ ذلك رمزنا لِـ $(Z = X + \beta\mu)$تصبح العلاقة السابقة وفق الصيغة الأتية:

$$\ln Z_q = \frac{g_q V}{6\pi^2 h^3 c^3}\beta^{-3}\left[\int_0^{\infty} dX \frac{2X^3 + 6X(\beta\mu)^2}{e^X+1} + \int_0^{\beta\mu} Z^3 dZ\right]$$

وبالاستفادة من قيم التكاملات الشهيرة الأتية:[18]

$$\int_0^{\infty} \frac{X^3}{e^X+1}dX = \frac{7\pi^4}{120}\,,\int_0^{\infty} \frac{X}{e^X+1}dX = \frac{\pi^2}{12}$$

يصبح تابع التوزع للكواركات مُعطى بالعلاقة الأتية:

$$\ln Z_q = \frac{g_q V}{6\pi^2 \hbar^3 c^3}\left(k_\beta T^3\right)\left[\frac{7\pi^4}{60} + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\mu}{k_\beta T}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{k_\beta T}\right)^4\right]$$

وبالتالي يصبح ضغط الكواركات في جملة الوحدات الطبيعية$(\hbar = c = k_\beta = 1)$وفق الصيغة الأتية:

$$\mathcal{P}_q(\mu,T) = T\frac{\ln Z_q}{V} = \left[\frac{7\pi^2 T^4}{30} + (\mu T)^2 + \frac{1}{2\pi^2}(\mu)^4\right]$$

بإضافة ضغط الغليونات من العلاقة(4.1) إلى العلاقة السابقة يصبح الضغط الكلي للبلازما في الحالة الحرة[19] وفق الصيغة الأتية:

$$\mathcal{P}_{QGP}(\mu,T) = \left[\frac{37\pi^2 T^4}{90} + (\mu T)^2 + \frac{1}{2\pi^2}(\mu)^4 - B\right] \qquad (7.1)$$

حيث يمثل (B) ثابت الحجرة المستخدم في نموذج (bag model)، وهو يمثل الضغط المطبق على الكواركات والغليونات من قبل الخلاء[20]، وذلك لتفسير بقائها محصورة ضمن الهادرونات، حيث استخدمنا القيمة $\left(B^{\frac{1}{4}} = 200MeV\right)$ الموجودة في المرجع[21] في هذه الدراسة.

2. حالة التأثير المتبادل ما بين الكواركات:

في هذا المرحلة سوف نعمل على إعادة اشتقاق النتائج التي تمَ الحصول عليها في المرجع [14] حيث تمَ التعامل مع الغليونات على أنها جسيمات لا تتبادل التأثير فيما بينها، وبالتالي فإن حفظها يعطى بالعلاقة(4.1). أما بالنسبة للكواركات فقدّ تمَ التعامل معها على أنها جسيمات عديمة الكتلة و تتبادل التأثير فيما بينها من خلال تبادل غليون واحد،حُسب ضغط الكواركات في هذا المرجع بعدَ أن تمَ حساب الطاقة الكامنة للتفاعل ما بين الكواركات باستخدام نظرية سائل فيرمي ومخططات فاينمانٍ. استناداً إلى نظرية سائل فيرمي يمكننا كتابة طاقة التأثير المتبادل ما بين الكواركات وفق الآتي:[22]

$$\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot} \qquad (1.2)$$

حيث أن $\mathcal{E}_{pot}$ و $\mathcal{E}_{kin}$ تمثل الطاقة الكامنة والحركية للكواركات على التوالي و تُحسب من العلاقات الأتية:

$$\mathcal{E}_{kin} = \int \varepsilon_p \, n_p \frac{g_{\mathrm{q}} d^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{E}_{pot} = \int f_{p,k}^{unpol} n_p \, n_k \frac{g_{\mathrm{q}} d^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mathrm{q}} d^3\mathrm{k}}{(2\pi)^3} \tag{3.2}$$

ε_p: تمثل طاقة الكوارك الواحد، $f_{p,k}^{unpol}$: تابع التأثير المتبادل ما بين الكواركات (تابع لانداو) في حالة عدم الاستقطاب، و n_p يمثل تابع توزع فيرمي – ديراك.إن تابع التأثير المتبادل ما بين الكواركات يرتبط بسعة التبعثر ما بين الكواركين وفق الصيغة الأتية:[23]

$$f_{p,k}^{unpol} = \frac{\varepsilon_p}{m_q} \frac{\varepsilon_k}{m_q} \mathcal{M}_{p,k} \tag{4.2}$$

حيث أن $\mathcal{M}_{p,k}$ يمثل عنصر مصفوفة لورنتز والذي يعبر عن سعة التبعثر للتفاعل ما بين كواركين وذلك من خلال تبادل غليون واحد،حيث أن القيمة المتوسطة لعنصر مصفوفة لورنتز لهذا التفاعل تعطى بالصيغة الأتية:[24]

$$\overline{\mathcal{M}}_{p,k} = \frac{2}{9} \frac{g^2}{m_q^2} \frac{2m_q^2 - k.p}{(k-p)^2} \tag{5.2}$$

بتعويض العلاقة السابقة بالعلاقة (4.2) يصبح تابع لانداو في حالة الكواركين العلوي والسفلي وذلك بعدَ إهمال كتلتيهما معطي بالصيغة الأتية:

$$f_{p,k}^{unpol} = \frac{g^2}{9} \frac{1}{|\mathrm{p}||\mathrm{k}|} \tag{6.2}$$

بتعويض العلاقة السابقة في العلاقة(3.2)وإجراء عملية التكامل تصبح الطاقة الكامنة:[14]

$$\mathcal{E}_{pot} = \frac{\alpha_c T^4}{\pi^3} \left[\frac{\pi^4}{9} + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] \tag{7.2}$$

أما بالنسبة لحدّ الطاقة الحركية يصبح بعدَ إجراء عملية التكامل في العلاقة(2.2)وفق الصيغة الأتية:

$$\mathcal{E}_{kin} = \left[\frac{21\pi^4 T^4}{30} + 3(\mu T)^2 + \frac{3}{2\pi^2} (\mu)^4 \right]$$

حيث يكون هذا الحد مُتضمن مسبقاً في الطاقة الحرة، وبالتالي يصبح ضغط البلازما في هذه الحالة:

$$\mathcal{P}_{QGP} = \mathcal{P}_q(inte) + \mathcal{P}_g(Free) - B$$

$$= \frac{\alpha_c T^4}{3\pi^3} \left[\frac{\pi^4}{9} + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{T}\right)^4 \right] + \left[\frac{37\pi^4 T^4}{90} + (\mu T)^2 + \frac{1}{2\pi^2} (\mu)^4 - B \right] \tag{8.2}$$

ومن أجل التعبير عن الضغط كتابع للكثافة الباريونية نقوم أولاً بحساب كثافة الكواركات وفق العلاقة الأتية:

$$n_q(\mu, T) = T \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\ln Z_q(\mu, T)}{V} \right) \right]_T = \frac{4\pi G_q}{3(2\pi)^3} (\pi^2 T^2 \mu + \mu^3) \tag{9.2}$$

حيث أن $G_q = 2g_q = 12$ عامل التحلل للكواركات في حالة وجود نوعين من الكواركات، لحساب المقادير الترموديناميكية كتابع لدرجة الحرارة والكثافة الباريونية يجب أن نكتب الكمون الكيميائي كتابع للكثافة الباريونية، حيث أن العدد الباريوني للكوارك هو $1/3$ عندئذٍ يمكننا أن نكتب:

$$n_b(\mu,T) = \frac{1}{3}n_q(\mu,T) = \frac{1}{3}T\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\ln Z_q(\mu,T)}{V}\right]_T = \frac{2}{3\pi^2}(\pi^2T^2\mu+\mu^3) \qquad (10.2)$$

ومن العلاقة السابقة يمكننا كتابة الكمون الكيميائي كتابع لدرجة الحرارة والكثافة الباريونية وفق الصيغة الأتية:[14]

$$\mu(n,T) = \left(\frac{3\pi^2}{4}n_b + \sqrt{\frac{9\pi^4}{16}n_b^2+\frac{\pi^6T^6}{27}}\right)^{1/3} + \left(\frac{3\pi^2}{4}n_b - \sqrt{\frac{9\pi^4}{16}n_b^2+\frac{\pi^6T^6}{27}}\right)^{1/3} \qquad (11.2)$$

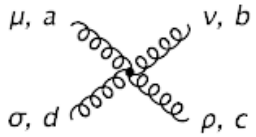
وبالتالي تصبح المقادير الترموديناميكة تابعة لكل مندرجة الحرارة والكثافة الباريونية، وذلك من خلال تابعيتها للكمون الكيميائي كما هو مُبين في العلاقة السابقة.

3. حالة التأثيرات المتبادلة ما بين الغليونات حتى المرتبة $\left(\alpha_c = \frac{g^2}{4\pi}\right)$:

كما أشرنا سابقاً فإن الغليونات على عكس الفوتونات تتبادل التأثير فيما بينها وهذا التأثير المتبادل يعتبر الاختلاف الجوهري ما بين البلازما الكهرطيسية(QED) والبلازما اللونية (QGP)، حيث سنعمل في هذا المرحلة على إعادة استنتاج العلاقة الرياضية المعبرة عن طاقة الغليونات حتى المرتبة (α_c)، المحسوبة في المرجع[15]، وذلك قبل استخدام العلاقة الأخيرة لدراسة تأثير التفاعلات ما بين الغليونات على الضغط والمخطط الطوري للبلازما. باستخدام نظرية الحقل ومخطط فاينمان يمكننا دراسة التفاعلات ما بين الغليونات وإيجاد طاقة التأثير المتبادل بين الغليونات كتابع لثابت الترابط مابين هذه الجسيمات، استناداً إلى نظرية الحقل فإن إسهام التفاعلات ما بين الغليونات في عبارة الطاقة الحرة لبلازما كوارك – غليون حتى المرتبة (α_c) ينتج عن مخططات فاينمان الأتية[25] :

$$\varepsilon_g(\alpha_c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$$

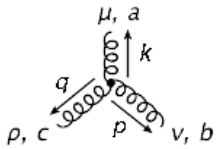
تمثل هذه المخططات على التوالي كل من لفات التفاعل الرباعية والثلاثية للغليونات إضافةٍ لتفاعل هذه الغليونات مع الجسيمات الافتراضية (ghost particles)[26–27]، حيث نفترض هنا أن الغليونات التي تتبادلها الكواركات فيما بينها ليست حرة وإنما تتفاعل فيما بينها وفق المخططات السابقة،من أجل حساب إسهام كل لفة من هذه اللفات في طاقة التفاعل الذاتي للغليون علينا أولاً حساب إسهامات عُقد التفاعل الموجودة في كل لفة من هذه اللفات وذلك باستخدام مخططات فاينمان لهذه العقد [27]، و من ثمّ تعويض هذه الإسهامات في علاقة التكامل الخاصة بكل لفة، حيث نبدأ أولاًبتعويض العلاقة المعبرة عن إسهام العقدة الرباعية للتفاعل الذاتي للغليونات، بعدَ ذلك يمكننا حساب إسهام هذه التفاعلات في حدّ اللفة الرباعية للتفاعل الذاتي للغليونات وفق الصيغة الأتية:



$$= -\frac{1}{4}\left\{-g^2 N_c d I_T(0) \sum_K \int \frac{\delta^{ab}\delta_{\mu\mu}}{K^2}\right\}$$

$$= \frac{g^2}{4} N_c\left(N_c{}^2 - 1\right) d(d+1)[I_T(0)]^2 \qquad (1.3)$$

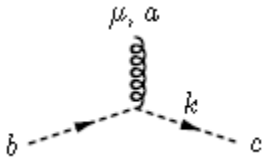
حيث K: يمثل كمية الدفع المتبادل ما بين الغليونات في العقدة، بينما $N_c = 3$ عدد درجات الحرية اللونية للكواركات وهي (الأحمر والأزرق والأخضر) بينما لدينا $I_T(0) = \sum_K \int \frac{1}{K^2}$ و $d = 3$ أبعاد الفراغ الثلاثي.أما بالنسبةلإسهام اللفة الثلاثية للتفاعل الذاتي للغليونات يمكننا حسابه وفق الصيغة الأتية:



$$= -\frac{1}{6}\left\{\frac{3g^2 N_c}{2} d \sum_K \int \frac{\delta^{ab}}{K^2} \sum_P \int \frac{K^2 + (K-P)^2 + P^2}{P^2(K-P)^2}\right\}$$

$$= -\frac{g^2}{4} N_c\left(N_c{}^2 - 1\right) d \times 3[I_T(0)]^2 \qquad (2.3)$$

كذلك الأمر يمكننا حساب إسهام اللفة الخاصة بالجسيمات الافتراضية وفق الآتي:



$$= -\frac{1}{2}\left\{-g^2 N_c \sum_K \int \frac{\delta^{ab}}{K^2} \sum_P \int \frac{P^2 - K.P}{P^2(K-P)^2}\right\}$$

$$= \frac{g^2}{4} N_c\left(N_c{}^2 - 1\right) \sum_{KP} \int \frac{P^2 + (K-P)^2 - K^2}{K^2 P^2 (K-P)^2}$$

$$= \frac{g^2}{4} N_c\left(N_c{}^2 - 1\right)[I_T(0)]^2 \qquad (3.3)$$

الآن بضم العلاقات (1.3)، (2.3)، (3.3)، بعضها إلى بعض واستخدام $d = 3$ إضافةٍ إلى $I_T(0) = \frac{T^2}{12}$، [15] نحصل على الإسهام الكلي حتى المرتبة الثانية بتابعية ثابت الترابط لطاقة التفاعل الذاتي للغليون، وذلك في عبارة الكثافة الطاقية الحرة للبلازما وفق الصيغة الأتية:

$$f_1(1)|gluons = g^2(N_c^2 - 1)\frac{T^4}{144}\left[\left(3 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right) N_c\right]$$

$$= g^2 N_c (N_c^2 - 1)\frac{T^4}{144} \qquad (4.3)$$

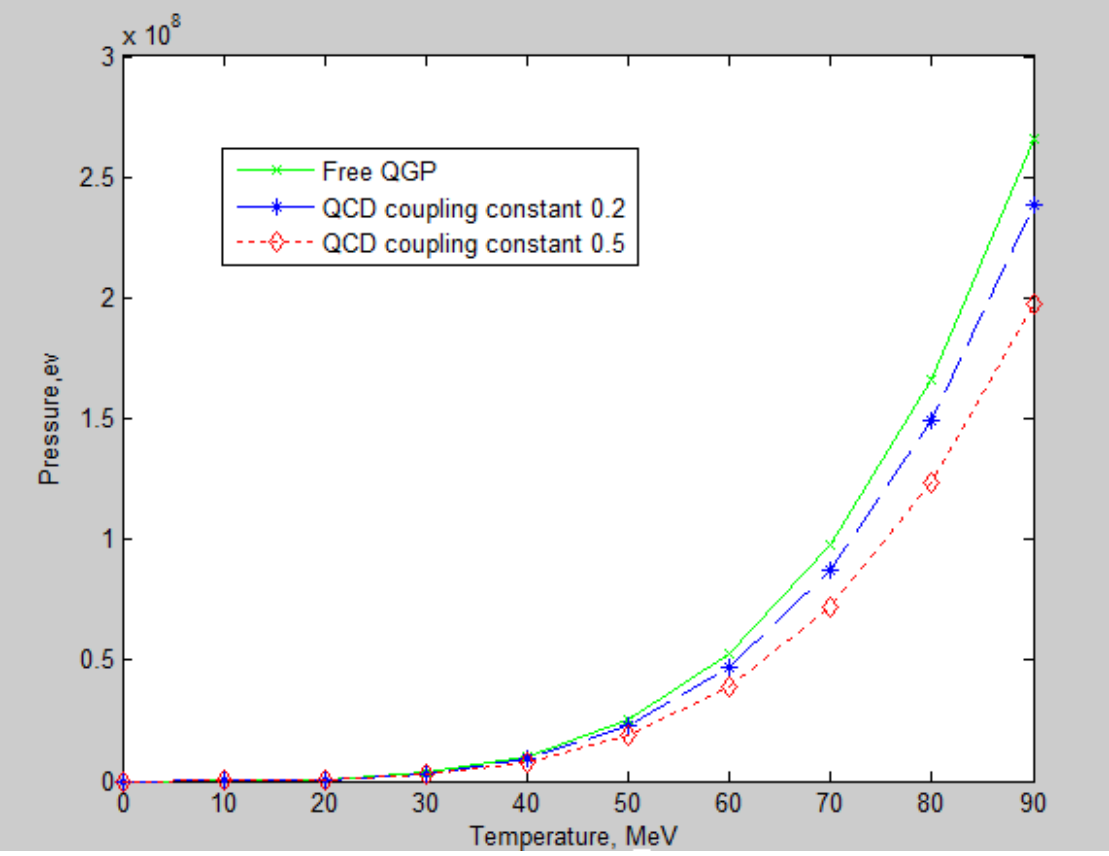
يمكن حساب ضغط الغليونات الناتج عن هذه الطاقة من خلال استخدام العلاقة التي تربط الكثافة الطاقية الحرة بالضغط وفق الآتي:[16]

$$P_g(\boldsymbol{\alpha_c}) = -f_1(1)|gluons = -g^2 N_c (N_c^2 - 1)\frac{T^4}{144} = -\left(\frac{\boldsymbol{2\alpha_c}\pi}{3}\right) T^4 \qquad (5.3)$$

نلاحظ أن التصحيح الأول على الطاقة الحرة للغليونات عبارة عن مقدار موجب، وهذا يشير إلى أن التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات من هذه المرتبة تكون تجاذبيه. مما يسبب في تناقص ضغط البلازما أمام الضغط المفروض عليها من قبل الخلاء وهذا يساهم بدوره في إبقاء الكواركات والغليونات محصورة ضمن الهادرونات.

النتائج والمناقشة:

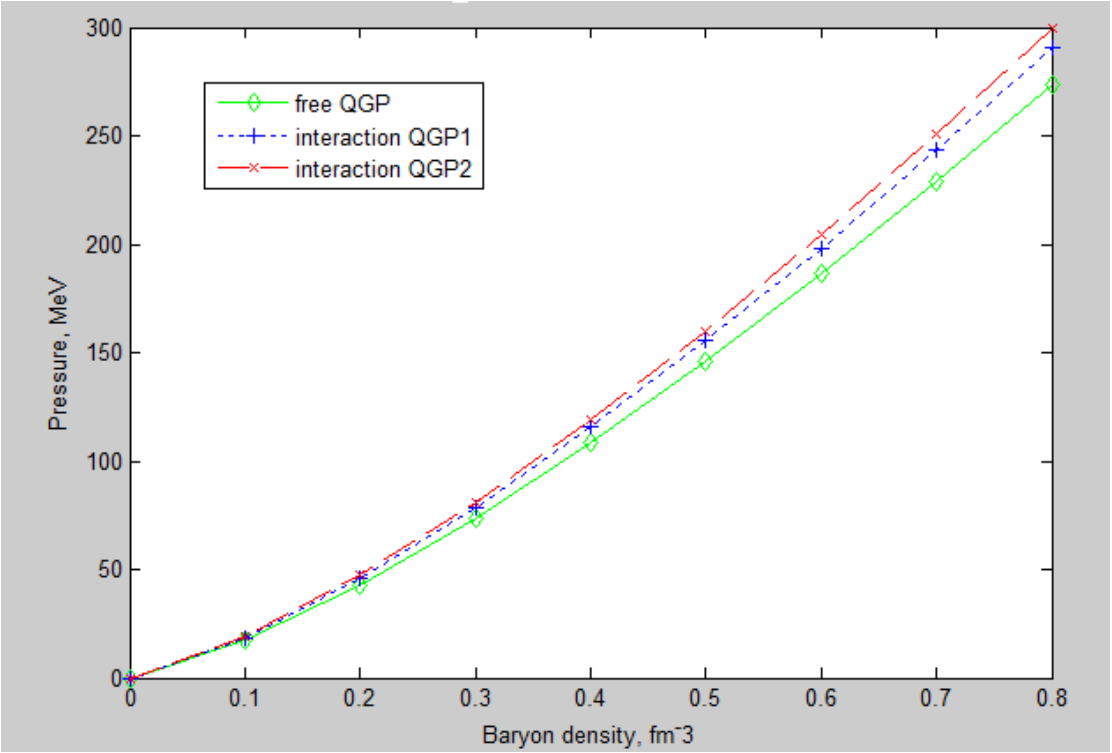
قمنا أولاً بدراسة ضغط البلازما كتابع لدرجة الحرارة من أجل كمون كيميائي معدوم أو بمعنى أخر كثافات باريونية معدومة، وذلك بعدَ الأخذ بعين الاعتبار الحالة الحرة(العلاقة (7.1)) وكذلك الأمر ضغط الغليونات حتى المرتبة α_s المحسوب من العلاقة (5.3) ومن أجل $(B = 0)$حيث حصلنا على المنحنيات الموضحةفي الشكل رقم (1). نلاحظ من هذه المنحنيات أن ضغط البلازما قدّ تناقص عندَالأخذ بعين الاعتبار التأثيرات المتبادلة ما بين الغليونات من أجل قيمة لثابت الترابط $(\alpha_s = 0.2)$ (المنحني الأزرق)، وكذلك الأمر عندما أُخذت هذه التأثيرات المتبادلة ما بين الغليونات عندَ قيم أكبر لثابت الترابط $(\alpha_s = 0.5)$(المنحني الأحمر)، نلاحظ من الشكل رقم (1) أنضغط البلازما قد تناقص عن ما كان عليه عندَ افتراض أن الغليونات جسيمات عديمة التأثير فيما بينها أي الحالة الحرة (المنحني الأخضر)، وذلك عندما أخذت التفاعلات ما بين الغليونات بعين الاعتبار في عبارة ضغط البلازما(المنحني الأزرق والأحمر).



الشكل 1: ضغط بلازما كوارك – غليون كتابع لدرجة الحرارة من أجل $(\mu = 0)$

ومنه نستنتج أنه عندما تتبادل الغليونات التأثير فيما بينها فإن هذه التفاعلات تتسبب في تناقص ضغط البلازما مما يعني أن هذه التأثيرات يجب أن تكون تجاذبيه وهذا ما تمت الإشارة إليه في العلاقة (5.3).أي أن التفاعلات من المرتبة الأولى بتغير ثابت الترابط للغليونات تساهم في الإبقاء على مكونات البلازما ضمن الهادرونات لدرجات حرارة أعلى أو بمعنى أخر يجب تقديم طاقة أكبر لهذه الكواركات والغليونات للخروج من الضغط المفروض عليها من قبل الخلاء والمتمثل في نموذج الحجرة بالحدّ $(\boldsymbol{B})$ وذلك للوصول بهذه الجسيمات إلى طور عدم الحصر.

ولدراسة تأثير الكثافة الباريونية على ضغط البلازما قمنا بدراسة تابعية هذا الضغط للكثافة الباريونية من أجل درجات الحرارة المعدومة (الشكل 2). حيث كما هو ملاحظ من هذا المنحنيات أن الضغط كتابع للكثافة الباريونية يكون متزايد بصفة عامة، إلا أن هذا التزايد يُصبح مختلف في حالة أخذنا بعين الاعتبار التفاعلات المتبادلة ما بين الكواركات من خلال تبادل الغليونات (العلاقة(8.2))،وذلك من أجل قيم مختلفة لثابت الترابط.



الشكل 2: ضغط بلازما كوارك – غليون كتابع للكثافة الباريونية من أجل $(\boldsymbol{T = 0})$

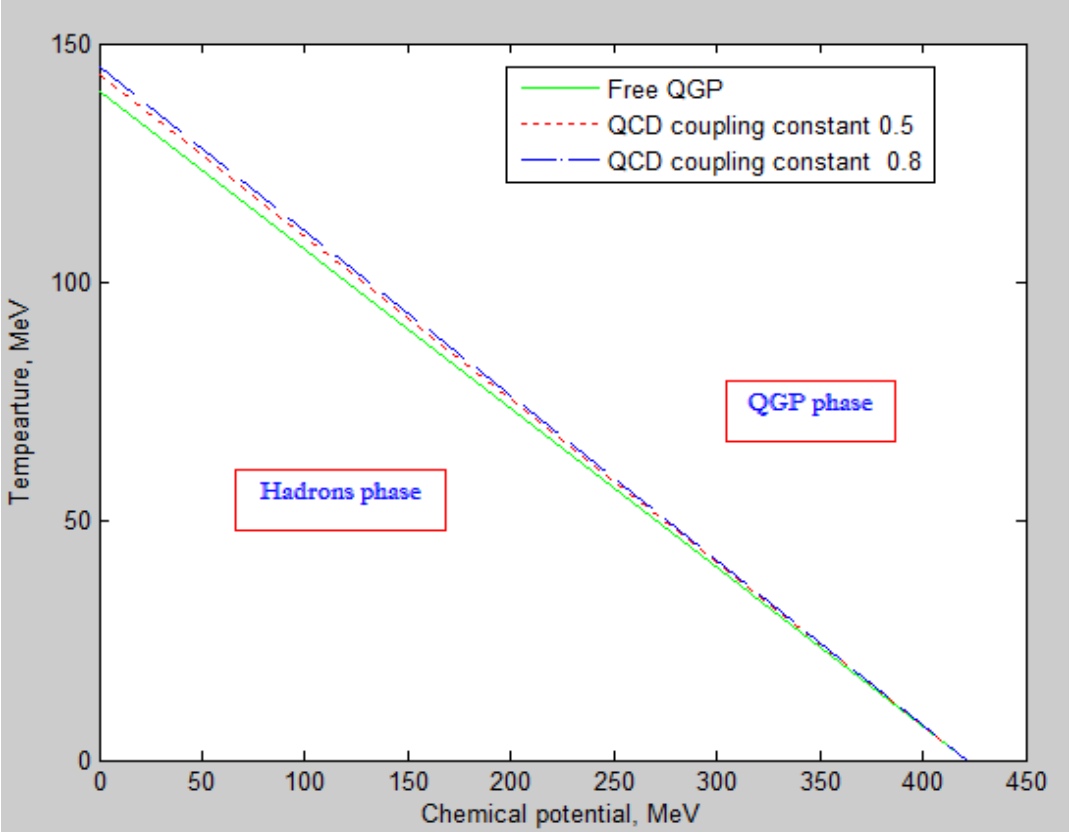
من الملاحظ من هذه الدراسة، أن الضغط يصبح أكبر مما هو عليه في الحالة الحرة للبلازما وذلك من أجل نفس القيم للكثافة الباريونية. حيث نلاحظ من هذه المنحنيات أنه بزيادة قوة التفاعل ما بين الكواركات يزداد ضغط البلازما(المنحني الأزرق)حيث كانت قيمة ثابت الترابط $(\alpha_s = 0.2)$أما بالنسبةللمنحني الأحمر فكانت قيمة ثابت الترابط $(\alpha_s = 0.5)$. يمكن تفسير هذا التزايد في الضغط نتيجة لطبيعة التأثيرات المتبادلة ما بين الكواركات والتي كما هو معروف في حالة تبادل غليون واحد تكون تنافرية [14]. وبالتالي بزيادة تعداد الجسيمات نتيجة زيادة الكثافة الباريونية يزداد ضغط البلازما. أما المنحني الأخضر فهو يعبر عن ضغط البلازما وهي في الحالة الحرة أي عندما تكون الكواركات والغليونات غير متفاعلة فيما بينها.

أن التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات المحسوبة من العلاقة(5.3) لا تؤثر على شكل المنحنيات المحسوبة في المرجع [14]، بمعنى أخر أن هذه التفاعلات لا تغير من تابعية ضغط البلازما للكثافة الباريونية وهذا الأمر طبيعي طالما أن هذه التفاعلات لاتتغير بتابعية الكثافة الباريونية وذلك لكون الكمون الكيميائي للغليونات معدوم إذ أنها جسيمات فوق نسبية يتم إصدارها وامتصاصها من قبل الكواكات في البلازما بشكل مستمر.

للحصول على المخطط الطوري للبلازما يجب حلّ المعادلة الأتية:

$$\mathcal{P}_{QGP} = \mathcal{P}_q(\mu, T) + \mathcal{P}_g(T) - B = 0$$

حيث يمكننا حلها استناداً إلى نموذج الحُجرة في الحالتين الحرة والمتفاعلة لمكونات البلازما وذلك من خلال تطبيق الشروط الحدية التي يحدث عندها التحول من الطور الهادروني إلى طور البلازما.تتمثل هذه الشروط بمساواة ضغط الخلاء المتمثل بالحدّ (B) بضغط البلازما [11]،كما هو واضح من المعادلة السابقة، حيث استخدمنا قيمة لثابت الحجرة تساوي $B^{\frac{1}{4}} = 200MeV$ [21].



الشكل 3 : المخطط الطوري لبلازما كوارك – غليون

من الملاحظ من (الشكل 3) أن درجة الحرارة الحرجة التي يحصل عندها التحول من الطور الهادروني إلى طور بلازما كوارك – غليون تتزايد بتزايد قيمة ثابت الترابط ما بين مكونات البلازما حيث تأخذ القيمة $(T_c = 145MeV)$ من أجل قيمة لثابت الترابط تساوي$(\alpha_c = 0.8)$.

تعتبر النتيجة السابقة لدرجة الحرارة الحرجة منطقية نظراً لكون هذه التفاعلات تجاذبية، إذ أنه كلما ازدادت قوتها سوف يصبح من الأصعب تحرير الكواركات من الهادرونات أي يجب علينا أن نقدم لها طاقة أكبر للوصول بها إلى الطور الحرّ أي طور البلازما. وهذه الدرجة من الحرارة تقابل كمون كيميائي حرج(الشكل 3) مقداره $(\mu_c =$

($422MeV$والقيمة الحرجة للكثافة الباريونية المقابلة لهذا الكمون هي ($n_B = 0.7\text{fm}^{-3}$).مما سبق نستنتج أن قيمة درجة الحرارة الحرجة تصبح أكبر مما هي عليه عندَ أخذ التفاعلات المتبادلة ما بين الكواركات بالحسبان فقط والتي تمَ حسابها في الدراسة السابقة [14]، والتي وجدت قيمتها عندئذٍ بحدود ($T_c \cong 140MeV$)، أما بالنسبة للكثافة الباريونية الحرجة فهي تبقى نفسها المحسوبة في نفس المرجع.

إن الزيادة في درجة الحرارة الحرجةوالتي وجدت في هذه الدراسة تفسر لنا سبب التناقص في ضغط البلازما عندَما أُخذت التفاعلات ما بين الغليونات من المرتبة الأولى في منشور ثابت الترابط بعين الاعتبار وعدم إهمال أن هذه الجسيمات تتبادل التأثير فيما بينها، حيث كما أشرنا سابقاً أن هذه التفاعلات تسبب زيادة في قوة الترابط ما بين الكواركات وبالتالي للوصول بالكواركات والغليونات إلى طور عدم الحصر المتمثل بتشكل بلازما كوارك – غليون يتوجب علينا رفع درجة الحرارة لهذه الهادرونات أو بمعنى أخر زيادة طاقتها الحركية للتغلب على الطاقة الكامنة التي تنتج عن تفاعلات الغليونات فيما بينها.

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

قمنا في هذا العمل بدراسة تأثير التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات والكواركات من المرتبة(α_c) على الضغط والمخطط الطوري لبلازما كوارك – غليون والمكونة من نوعين فقط من الكواركات عديمة الكتلة (الكوارك العلوي – والكوارك السفلي)، وذلك بدراسة الضغط كتابع للكثافة الباريونية من أجل درجات حرارة معدومة و كتابع لدرجة الحرارة من أجل كثافات باريونية معدومة. لقد وجدنا أن الضغط في الحالة العامة هو تابع متزايد لكل من درجة الحرارة والكثافة الباريونية، إلا أنه من أجلَ نفس القيم للكثافة الباريونية يصبح ضغط البلازما أكبر في حالة الأخذ بعين الاعتبارالتأثيرات المتبادلة ما بين الكواركات بتبادل غليون واحد، كما وجدَ أنهذه الزيادة في الضغط تزداد بزيادة قيمثابت الترابط ما بين الكواركات. أما بدراسة ضغط البلازما كتابع لدرجة الحرارة من أجل كثافات باريونية معدومة، فقدّ وجدنا أن التأثيرات المتبادلة ما بين الغليونات من المرتبة (α_c) تسبب تناقصفي ضغط البلازما عن ما كان عليه في الحالة الحرة من أجل نفس القيم لدرجات الحراة،عندَ دراسة هذه التأثيرات على الضغط كتابع للكثافة الباريونية من أجل درجات حرارة معدومة، فقد وجدنا أن تأثير التفاعلات ما بين الغليونات لا يُسهم في تغير قيمة ضغط البلازما في هذه الحالة، وتفسير ذلك يعود لكون الغليونات عبارة عن بوزونات يتم إصدارها و امتصاصها من قبل الكواركات باستمرار أي تبقى كثافتها الباريونية معدومة وبالتالي لا تتسبب بتغير الكثافة الباريونية للجملة (الكمون الكيميائي).

تمَ في هذه العمل أيضاً، دراسة تأثير التفاعلات ما بين مكونات البلازما على المخطط الطوري للبلازما، حيث وجدنا أن تأثير التفاعلات ما بين الغليونات على المخطط الطوري للبلازما يؤدي إلى رفع درجة الحرارة الحرجة التي يحصل عندها التحول من الطور الهادروني إلى طور البلازما حيث وجدنا أن القيم الحرجة لكل من درجة الحراة والكمون الكيميائي التي يحصل عندهما التحول هما على الترتيب($\mu_c = 422MeV, T_c = 145MeV$)، حيث فسرنا الزيادة في درجة الحرارة الحرجة عن القيمة ($T_c \cong 140MeV$) المحسوبة في المرجع [14] لكون التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات من المرتبة (α_c)هي تفاعلات تجاذبيه، مما يعني أنها تزيد من قوة الترابط ما بين مكونات البلازما وبالتالي نحتاجلطاقة أكبر (درجات حرارة أعلى) لجعل هذه الجسيمات تتباعد عن بعضها البعض وبالتالي الوصول بالهادرونات إلى طور عدم الحصر المتمثل بتكون بلازما كوارك – غليون.

التوصيات:

لقدّ فرضنا في هذه العمل أن كل من ثابت الحجرة **B**و ثابت الترابط($_c$) عبارة عن مقادير ثابتة ومستقلة عن درجة الحرارة والكمون الكيميائي، وبالتالي نوصي في دراسات مستقبلية بإعادة هذه الدراسة بفرض أن كل منهما يتغير كتابع للكمون الكيميائي ودرجة الحرارة. كذلك الأمر في دراستنا هذه افترضنا أن البلازما مكونة فقط من نوعين (شحنتين لونيتين) من الكواركات هما (الكوارك العلوي – والكوارك السفلي)، وبناء عليه يمكننا في دراسات مستقبلية إدخال أنواع أخرى من الكواركات والتي تساهم في تكوين البلازما مثل (الكوارك الغريب strange quark) وذلك لدراسة تأثيرات الأنواع المختلفة من الكواركات على الضغط والمخطط الطوري للبلازما. وأخيراً لابدَ من الإشارة إلى أنه في هذه الدراسة لم نأخذ بعين الاعتبار سوى التفاعلات المتبادلة ما بين الغليونات من المرتبة $(\boldsymbol{\alpha_c})$ في منشور ثابت الترابطوبالتالي يمكننا في دراسات مستقبلية أيضاً إدخال الحدود الإضافية من المراتب$(\boldsymbol{\alpha_c})^{3/2}$،$(\boldsymbol{\alpha_c})^2$ .....في عبارة طاقة البلازما، وذلك لدراسة تأثيراتها المختلفة على خصائص البلازما الترموديناميكية.

المراجع

[1] Kapusta. .I.J. *"Quantum chromodynamics at high temperature"*.Nucl. Phys, B148,1979,461.

[2] Hagedorn. R. *"Statistical thermodynamics of strong interactions at highenergies"*. NuovoCim, Suppl3, 1965,147.

[3] Blaizot .P.J,andIancu . E. "*The quark-gluon plasma: Collective dynamics and hard thermal loops*". Phys. Rept, 2002,355- 359.

[4] Bluhm .M, andKampfer. B.*"Quasiparticle model of quark-gluon plasma at imaginary chemical potential"*. *Phys. Rev.* D77,2008.

[5] Gardim. G. F, andSteffens. M. F. "*Thermodynamics of quasi-particles"*. Nucl. Phys.A797, 2007, 50.

[6] Kapusta. I.J. *" Finite-temperature field theory"* .Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.

[7]I. Arsene et.al*"BRAHMS Collaboration"*. Nucl. 757, 1,2005.

[8]Bellac.M. Le.*" Thermal Field Theory"*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.

[9] Gross .D. J, andWilczek. F.*" Ultraviolet behavior of non-Abelian gauge theories"*. Phys. Rev. Lett. 30, 1973,1343.

[10] Politzer.H. D. *"Reliable perturbativeresults for strong interactions"*.Phys. Rev. Lett. 30, 1973,1346.

[11] *Wong S. M." Introductory Nuclear Physics"*.Wiley-VCHVerlag GmbH and Co. KGaA, 2004,469.

[12] *Aoki Y. et al.* // JHEP. 2009. V. 0906. P. 088.

[13] J. Adams *et al.*"*The STARCollaboration's critical assessment of the evidence fromRHIC collisions,Experimental and theoretical challengein the search for the quark gluon plasma"*.Nucl. Phys, A**757,**2005,102.

[14] M. Modarres, and A. Mohamadnejad. "The Thermodynamic properties of weakly interacting quark gluon plasma via the one gluon exchange interaction" Phys. Part. Nucl. Lett, 10, 2013.

[15] M. Laine and A. Vuorinen.*" Basic thermal theory, A tutorial on perturbative calculations"*.May, 2016,220.
[16]Arovas.D.*" Lectures notes in thermodynamic and statistical mechanics (A work in progress)"*.University of California. March, 2012,477.
[17] Landau.L.D, andLifschitz. E.M. *"Statistical Physics"*.Pergamon Press, VOL9, Part2, 1980.
[18]Khvorostukhin.A.S. *" Simple way to the high-temperature expansion of relativistic Fermi-Dirac integrals"*. arXiv:1508.02230v2 [math-ph].11 Nov 2015.
[19]Gyulassy.M.*"Introduction to QCD Thermodynamics and the Quark-Gluon plasma"*.Nuclear Science Division, Malistop,A70,1985,3307.
[20] Rodinov.E.N.*" The MIT bag model in nuclear and particle physics"* university of Adelaide, Australia, 1978.
[21]Spieles. C; H. Stocker; andGreiner .C*" Phase transition of a finite quark-gluon plasma"*.arXiv: hep-ph /9708280v1,1997.
[22] Baym. G, and C.Pethick "*Landau Fermi-Liquid Theory"*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004.
[23] Baym. G, andChin. S*"Landau Theory of Relativistic Fermi Liquids".Nuclear Physics A*, Vol. 262, No. 3, 1976,p. 527-538.
[24] Modarres. M, andGholizade.H*"Strange quark matter in the framework of one gluon exchange and density and temperature dependent particle mass models"*.Int J Mod Phys,E17, 2008,1335–1355.
[25] Kapusta. J, and Gale .C.*" Finite-Temperature Field Theory"*. Cambridge Univ,Press, 2006.
[26]Faddeev.L. D, and Popov .V. N*"Feynman diagrams for the Yang-Mills fields"*
Phys. Lett, B25, 1967,29.
[27] Polyakov.A. M. "Thermal properties of gauge fields and quark liberation". phy. Lett,B72, 1978, 477.

.